

Расчёт сжатых стержней на статическую устойчивость

04, декабрь 2018

Наумов А. М.¹, Андриевская С. И.^{1,*}

УДК: 52-55

¹Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

nam63@mail.ru

*steandr2@mail.ru

Введение

Некоторые элементы конструкций, например, колонны, части ферм и другие элементы при расчете схематизируются, как гибкий стержень, работающий на сжатие. Однако, если сила, сжимающая стержень, будет больше некоторого значения $F_{кр}$, называемого критической силой, сжатый стержень может выгнуться. Выгибание сжатого стержня при сжатии называется потерей устойчивости. При потере устойчивости стержень теряет свою несущую способность, и конструкция может разрушиться. Поэтому при расчете конструктивных элементов в виде длинных сжатых стержней следует обязательно проводить их расчет на устойчивость.

Данной теме посвящена обширная литература, как признанная уже классической, среди которой достаточно упомянуть лишь основные монографии [1-4], так и современная [5-7]. Тем не менее, во многих из них изложены лишь теоретические аспекты рассматриваемой проблемы. В данной работе предлагается алгоритм численного расчёта сжатых стоек.

Основные задачи, возникающие при расчёте колонн и стержневых конструкций на статическую устойчивость:

1) Определение коэффициента запаса по устойчивости $n_y = \frac{F_{кр}}{F}$, где F - сила, сжимающая стержень, $F_{кр}$ - критическая сила;

2) Вычисление допустимого значения нагрузки $[F] = \frac{F_{кр}}{n_y}$;

3) Подбор размеров поперечного сечения стержня таким образом, чтобы действующая на стержень рабочая (эксплуатационная) сжимающая сила F была примерно равна допустимой силе $[F]$.

Таким образом, при любом виде расчета стержня на устойчивость необходимо знать критическую силу $F_{кр}$.

Рассмотрим подробно один из способов определения $F_{кр}$, который является точным способом (в отличие от приближённого, т.н. энергетического) и может вызывать некоторые трудности при его применении. Именно этот способ послужил основой для создания программного комплекса по определению критической силы численным методом на компьютере.

1. Определение критической силы с помощью дифференциального уравнения изогнутой оси стойки

При расчетах на устойчивость стержень принято называть стойкой. Критической называется сила, при которой происходит смена форм устойчивого равновесия. Значит, при $F = F_{кр}$, где $F_{кр}$ - это критическое значение силы, имеет место состояние безразличного равновесия, когда равновозможны, как прямолинейная, так и *бесконечно близкая* к ней криволинейная форма устойчивого равновесия стойки. Необходимо отметить, что математический аппарат, используемый в данном методе, даёт точное решение лишь при малых перемещениях и малых углах поворота изогнутой оси стойки, поэтому рассмотрим равновесие стойки в искривленном состоянии, бесконечно близком к прямолинейной форме. Прогибы стойки на рисунках условно увеличены, критическая сила в расчетах обозначена как F .

1.1. Порядок расчета

1. Изобразить пунктиром на заданной стойке примерную форму ее оси при потере устойчивости (см. рис. 1).

2. Изобразить стойку в искривленном виде без опор, заменив их реакциями (в общем виде). Провести координатные оси: начало координат расположить на нижнем конце, ось Z направить вверх вдоль оси стойки, ось y - влево. Получили первую четверть, положительный прогиб будет влево.

3. Прогиб на нижнем участке следует дать положительным, в сторону положительной оси y . Вместо отброшенных опор приложить их реакции в общем виде, моменты в опорах направить в соответствии со сжатыми слоями изогнутой оси стойки. Постараться разумно направить реакции опор R (учесть кривизну изображенной на рисунке оси стойки, ее изменение; для реакций R должно удовлетворяться условие $\sum F_y = 0$).

4. Применить метод сечений по участкам (Z на каждом участке следует отсчитывать от начала координат).

5. Изобразить отрезанную часть искривленной стойки с действующими на нее силами. В сечении приложить положительные внутренние суммарные силовые факторы: положительный изгибающий момент дает сжатые слои слева (что соответствует положительной кривизне в первой четверти, так как изгибающий момент пропорционален кривизне), осевая сила N - растягивающая, перерезывающая сила Q направлена вправо.

6. Записать по участкам уравнения равновесия - сумму моментов относительно оси, проходящей через сечение. Выделить из этого уравнения выражение для изгибающего момента M_x .

7. Поскольку изгибающий момент пропорционален кривизне v'' изогнутой оси стойки и изгибной жесткости EI_x , то, подставив в уравнение равновесия выражение для изгибающего момента в виде $M_x = EI_x v''$, получим дифференциальное уравнение. Это уравнение надо переписать так, чтобы слева были все члены, содержащие v , а справа - все остальные члены уравнения. Если ввести обозначение $\alpha^2 = F / EI_x$, получится дифференциальное уравнение второго порядка, решение которого известно.

8. Записать решение дифференциального уравнения. В большинстве случаев это решение имеет вид:

$$v = C_1 \sin \alpha z + C_2 \cos \alpha z + v^*, \text{ где } v^* - \text{частное решение.}$$

9. Для определения констант записать граничные условия по прогибу v и по углу поворота оси стойки v' . Граничное условие по v'' в этом способе не используется. Отсутствие изгибающего момента на **верхнем** конце стойки (это свободный конец или шарнирная опора) реализуем, приравнявая к нулю соответствующее выражение для изгибающего момента, подставив вместо z расстояние до этого конца от нижней опоры, т.е. всю длину стойки. Число граничных условий должно равняться числу констант.

Рассмотрим пример применения данного метода. Для изображенной на рис.1 стойки запишем выражения изгибающего моментов по участкам и граничные условия для определения констант.

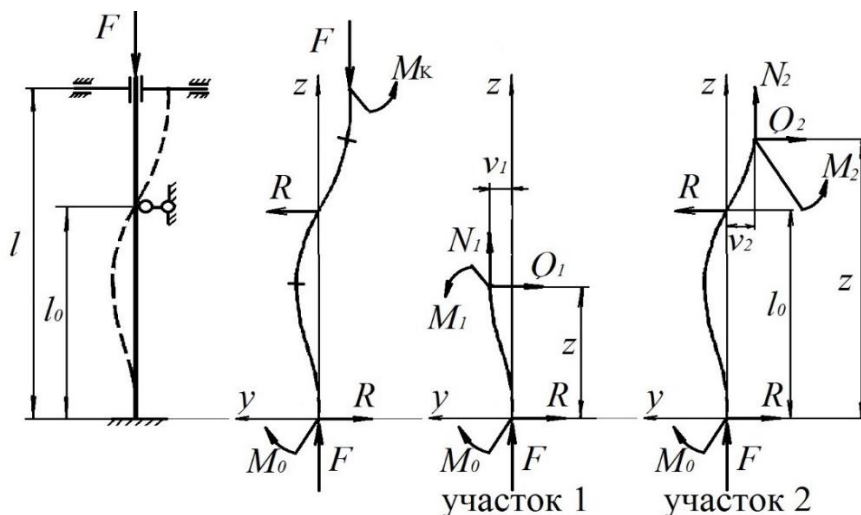


Рис. 1. Пример сжатой стойки с двумя участками с закреплением «заделка - плавающая заделка» и промежуточной опорой

В соответствии с вышеприведенным порядком расчета, применяя метод сечений, запишем выражения изгибающих моментов по участкам.

Участок 1 ($0 \leq z \leq l_0$):

$$M_1 + Fv_1 + Rz - M_0 = 0 \Rightarrow M_1 = M_0 - Fv_1 - Rz. \quad (1)$$

С другой стороны

$$M_1 = EI_x v_1'' . \quad (2)$$

Приравниваем правые части выражений (1) и (2):

$$EI_x v_1'' = M_0 - Fv_1 - Rz. \quad (3)$$

Вводя, как уже было сказано, обозначение $\alpha^2 = F / EI_x$ и, разделив обе части выражения (3) на EI_x , получим

$$v_1'' = \frac{M_0}{EI_x} - \alpha^2 v_1 - \frac{R}{EI_x} z.$$

Перенесем влево член с v_1 , получим неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$v_1'' + \alpha^2 v_1 = \frac{M_0}{EI_x} - \frac{R}{EI_x} z. \quad (4)$$

Решение этого уравнения состоит из общего решения и частного решения. Частное решение можно выбрать в виде правой части выражения (4), деленной на коэффициент при v_1 в левой части (т. е. на α^2 в данном случае), тогда

$$v_1 = C_1 \sin \alpha z + C_2 \cos \alpha z + \frac{M_0}{F} - \frac{R}{F} z. \quad (5)$$

Участок 2 ($l_0 \leq z \leq l$):

$$M_2 - R(z - l_0) - M_0 + Rz - F(-v_2) = 0 \Rightarrow M_2 = M_0 - Fv_2 - Rl_0.$$

На этом участке прогиб стойки отрицательный, поэтому в формуле стоит $(-v_2)$.

$$EI_x v_2'' + Fv_2 = M_0 - Rl_0,$$

или:

$$v_2'' + \alpha^2 v_2 = \frac{M_0}{EI_x} - \frac{R}{EI_x} l_0, \quad (6)$$

$$v_2 = C_3 \sin \alpha z + C_4 \cos \alpha z + \frac{M_0}{F} - \frac{R}{F} l_0. \quad (7)$$

Имеем шесть констант, значит, должно быть шесть граничных условий.

Граничные условия для определения констант $C_1, C_2, C_3, C_4, M_0, R$:

$$\begin{array}{ll} 1) z = 0, v_1 = 0; & 2) z = 0, v_1' = 0 \\ 3) z = l_0, v_1 = 0; & 4) z = l_0, v_2 = 0 \text{ или } v_1 = v_2; \\ 5) z = l_0, v_1' = v_2' & 6) z = l, v_2' = 0 \end{array} \quad (8)$$

Условия (4) и (5) являются условиями стыковки участков: поскольку изогнутая ось стойки это плавная кривая без разрывов и изломов, то на границе участков равны перемещения v и углы поворота оси стойки v' .

Реализовав граничные условия (8), получим систему 6 однородных линейных уравнений относительно неизвестных $C_1, C_2, C_3, C_4, M_0, R$. Решение этой системы приводит, как правило, к трансцендентному уравнению относительно переменной αl , т.е. уравнению, которое не решается аналитически (решается или численно или приближённо графически). При решении этого уравнения определим значение α , а затем из $\alpha^2 = F / EI_x$ получим критическое значение сжимающей стержень силы.

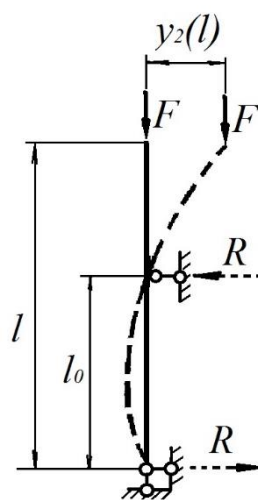


Рис. 2. Пример сжатой стойки с двумя участками с закреплением «шарнир - свободный конец» и промежуточной опорой

Рассмотрим другой вариант граничных условий (рис.2).

Для стойки, изображенной на рис. 2, граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned}
 1) \ z = 0, v_1 = 0; & & 2) \ z = l_0, v_1 = 0 \\
 3) \ z = l_0, v_2 = 0; & & 4) \ z = l_0, v'_1 = v'_2 \\
 5) \ z = l, M_2 = 0
 \end{aligned} \tag{9}$$

Последнее граничное условие реализуем, приравнявая к нулю M_2 - выражение для изгибающего момента на втором участке.

Изгибающий момент на втором участке равен: $M_2 = F(-v_2) - R l_0$, значит, при $z = l$ получим $0 = -Fv_2(l) - R l_0$, где $v_2(l) = C_3 \sin \alpha l + C_4 \cos \alpha l - R l_0 / F$ - прогиб стержня на верхнем конце, т. е. при $z = l$.

1.2. Программа для расчета стержней на устойчивость

Программа **And2001.exe** разработана для восьми видов сжатых стоек (рис.3), имеющих сечения, изображенные на рис. 4.

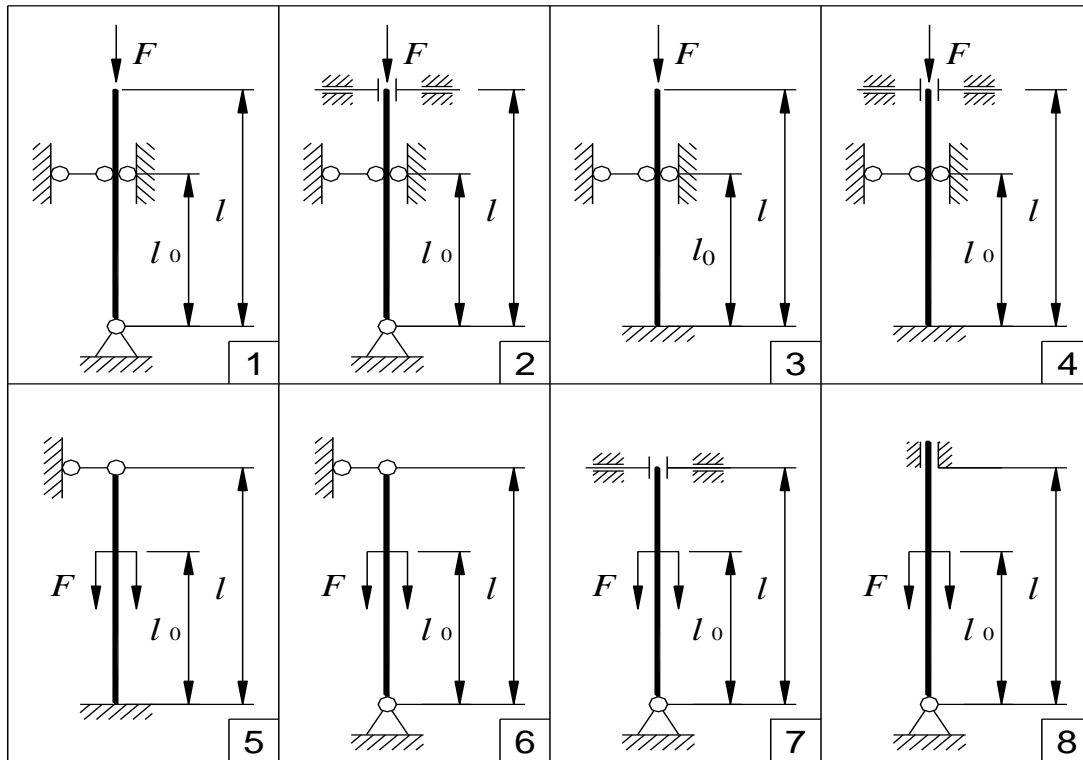


Рис. 3. Виды сжатых стоек с различными закреплениями и сечениями приложения силы

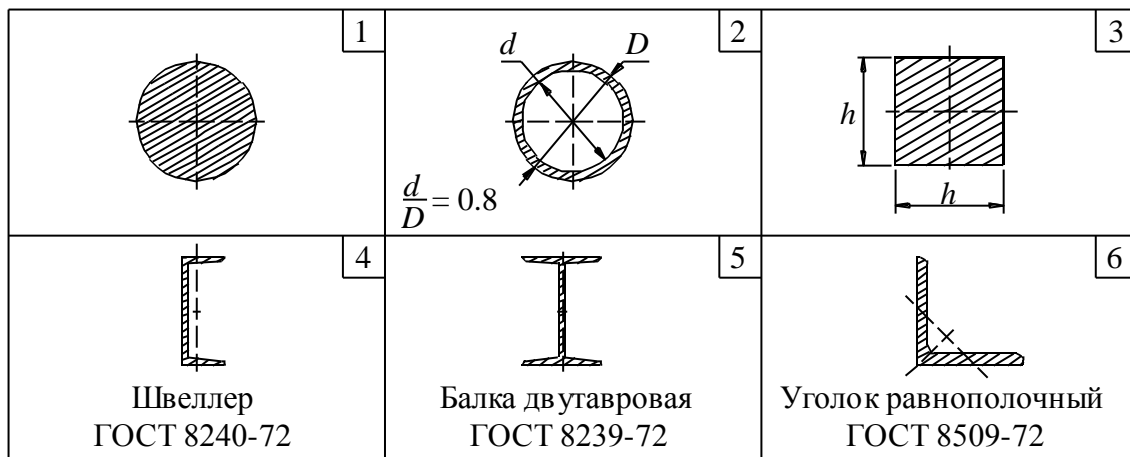


Рис. 4. Виды поперечных сечений сжатых стоек, нашедших отражение в программном комплексе

С помощью этой программы можно определить критическую силу $F_{кр}$, коэффициент приведения длины стойки μ и найти размеры шести типов сечения стойки, включая стандартные профили, изображенные на рис.4. Напомним, что коэффициент приведения длины стойки μ - число, показывающее во сколько раз необходимо увеличить длину шарнирно-опёртого стержня, чтобы критическая сила при потере устойчивости для него равнялась критической силе стержня длиной l в рассматриваемых условиях закрепления. Получаемая длина эквивалентного по критической силе шарнирно-опёртого стержня называется приведённой длиной.

Программу можно найти на сайте steandr.clan.su в каталоге файлов. Задача решается в диалоговом режиме: в соответствующие окошки формы (рис.5) заносится нужная информация, осуществляется расчет, и полученные на экране результаты расчета распечатываются. Рассмотрим пример.

1.3. Пример решения задачи с помощью компьютера

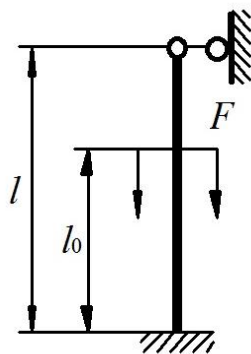


Рис. 5. Стойка № 5, выбранная для примера

Дано. Для изображенной на рис.5 стойки необходимо: определить критическую силу $F_{кр}$, коэффициент приведения длины стойки μ и номер швеллера из ГОСТ 8240-72. Числовые данные: $F = 200$ кН, $l = 3$ м, $l_0 / l = 0,75$, материал стойки сталь 3, допустимое напряжение на сжатие $[\sigma]_C = 160$ МПа.

Решение. Поскольку в критическом состоянии равновозможны как прямолинейная, так и бесконечно близкая к ней криволинейная форма устойчивого равновесия, рассмотрим стойку в деформированном состоянии (рис.6), бесконечно близком к прямолинейной форме равновесия. Проведем координатные оси, прогиб в начале координат следует дать положительным, в сторону положительной оси y , т. е. влево. Вместо отброшенных опор приложить их реакции в общем виде. Моменты в опорах следует направить в соответствии со сжатыми слоями изогнутой оси стойки. Постараться разумно направить реакции опор R - учесть кривизну изображенной на рисунке оси стойки, ее изменение; для реакций R должно удовлетворяться условие $\sum F_y = 0$. В нашем примере, поскольку кривизна на верхнем участке отрицательная, верхняя реакция R должна быть направлена направо, чтобы давать сжатые слои справа. Тогда из условия $\sum F_y = 0$ получается, что нижняя горизонтальная реакция R направлена налево.

Для изображенных на рис. 3 стоек при положительном прогибе стойки на нижнем участке получается: у стоек 1,3,4 нижняя реакция R направлена направо, у стойки 7 она равна нулю, у остальных стоек нижняя реакция R направлена налево, как и в программе.

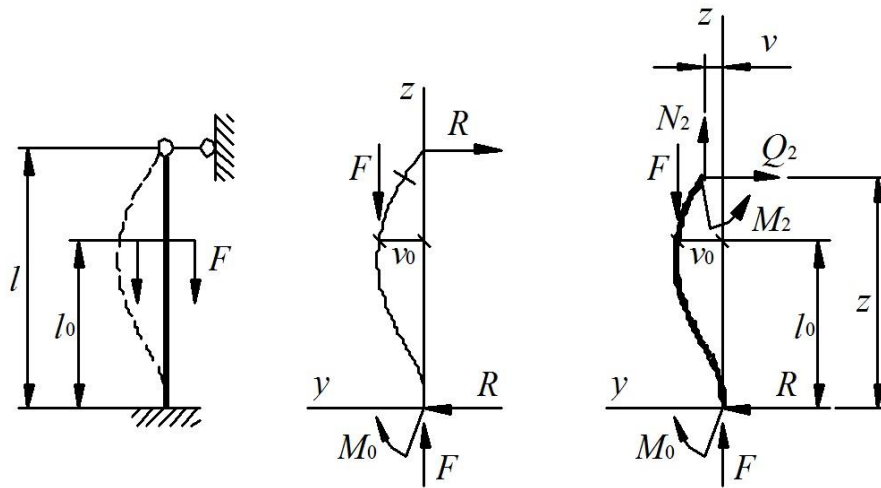


Рис. 6. Деформированное состояние стойки № 5 для примера

Применим метод сечений для *верхнего* участка (z следует отсчитывать от начала координат). Все внутренние суммарные силовые факторы в сечении положительные. Запишем сумму моментов относительно оси, проходящей через сечение:

$$M_2 + F(v_0 - v) - M_0 - Rz + Fv = 0, \text{ при } M_2 = EI_x v'' \text{ имеем}$$

$EI_x v'' = M_0 + Rz - Fv - F(v_0 - v)$, (последние два члена уравнения здесь объединять не надо).

Разделив обе части уравнения на EI_x и введя новые обозначения констант, получим универсальное уравнение

$$v'' = C_1 M_0 + C_2 Rz - C_3 Fv - C_5 F(v_0 - v) \quad (10)$$

Это уравнение кривизны для второго участка является универсальным по той причине, что оно содержит в себе как составную часть уравнение кривизны для первого участка (первые три члена уравнения).

В программе универсальное уравнение имеет вид

$$v'' = C_1 M_0 + C_2 Rz + C_3 Fv + C_4 R(z - l_0) + C_5 F(v_0 - v). \quad (11)$$

Сравнивая выражения (10) и (11), запишем коэффициенты, на которые надо умножить константы C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 уравнения (11) для того, чтобы это уравнение соответствовало нашему универсальному уравнению (10). Эти коэффициенты могут принимать значения $+1, -1, 0$.

В нашем случае коэффициенты, на которые надо умножить константы нашего универсального уравнения, равны:

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
+1	+1	-1	0	-1

1.4. Последовательность действий при работе на компьютере

В самом начале работы необходимо запустить программу **And2001.exe** из сайта **steandr.clan.su** и заполнить появившуюся на экране форму (рис.7) с исходными данными (программа рассчитана для учебного процесса, поэтому есть место для введения информации по номеру группы и фамилии учащегося).

Определение критической силы для сжатого стержня (в. 2002)

Фамилия И.О. Иванов А. Б. Группа МТ6-42 Вариант 540

Длина l , м 3 Отношение l_0/l 0.75 Сила F , кН 200

Граничные условия для стержня

Номер схемы 5

Уравнение изгиба: $v'' = C_1 M_0 + C_2 R_z + C_3 F v + C_4 R(z - l_0) + C_5 F(v_0 - v)$

Коэффициенты

C1	C2	C3	C4	C5
<input type="radio"/> -1	<input type="radio"/> -1	<input type="radio"/> -1	<input type="radio"/> -1	<input type="radio"/> -1
<input checked="" type="radio"/> 0	<input checked="" type="radio"/> 0	<input checked="" type="radio"/> 0	<input checked="" type="radio"/> 0	<input checked="" type="radio"/> 0
<input type="radio"/> +1	<input type="radio"/> +1	<input type="radio"/> +1	<input type="radio"/> +1	<input type="radio"/> +1

Поперечное сечение

- Швеллер
- Двутавр
- Уголок
- Крут
- Кольцо
- Квадрат

© Андриевская 2002 РАСЧЕТ ВЫХОД

Рис. 7. Форма для заполнения исходных данных при расчёте стойки

При внесении исходных данных необходимо:

1. Выделить место приложения нагрузки. Это либо конец первого участка (стойки №1-4), либо верхний конец стойки (стойки №5-8). Здесь и далее «выделить» означает щелчок левой кнопкой по нужной информации, поле которой при этом посинеет.
2. Выделить номер схемы (использовать прокрутку). На экране появится соответствующая стойка.
3. Описать форму изогнутой оси стойки. Для этого надо отметить равны ли нулю перемещение, угол поворота оси стойки или изгибающий момент на концах стойки и прогиб на промежуточной опоре, если она есть (это стойки №1-4). Выделение осуществляется щелчком по левой кнопке. В соответствующем окошке появится галочка. Всего должно быть четыре граничных условия. Условия стыковки участков (равенство перемещений и углов поворота на границе участков) осуществляются в программе автоматически.
4. Выделить форму сечения.
5. Занести в таблицу коэффициенты перед константами C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 .

Закончив набор необходимых данных, щелкнуть по кнопке «Расчет». Если подготовку задачи осуществили верно, то появятся результаты расчета – критическая сила, коэффициент приведения длины стойки μ и размеры сечения стойки или номер профиля из стандарта (рис.8). Нажав «ОК», получим распечатку результатов расчета. Если же в наборе были ошибки, то компьютер укажет на эти ошибки и, исправив их, снова посылаем задачу на счет.

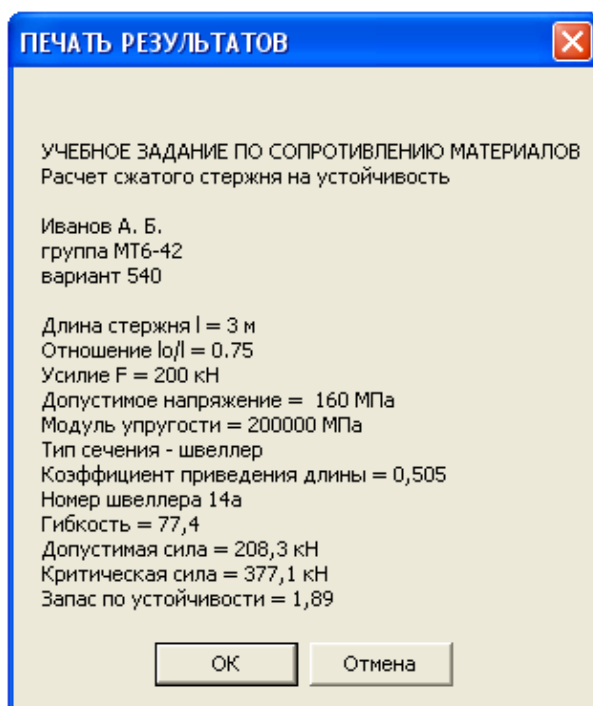


Рис. 8. Полученные в результате расчётов результаты

Полученное значение μ всегда можно проанализировать, оценив возможный диапазон значений μ для данной задачи. Например, перемещая промежуточную опору то вверх, то вниз, получим граничные значения μ для стандартной стойки Эйлера (рис.9):

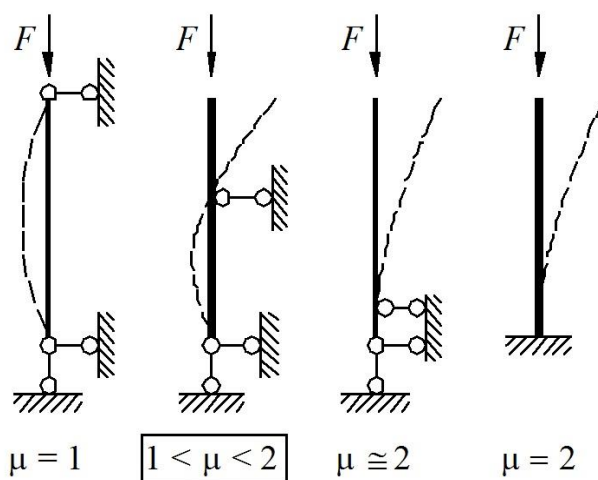


Рис. 9. Пределы изменения μ при изменении положения опоры стойки Эйлера

Если сила приложена не сверху, то стойка будет более устойчивой и значение $F_{кр}$ для нее должно быть больше, чем в случае силы, приложенной сверху. Значит, коэффициент μ , стоящий в знаменателе формулы Эйлера, должен быть меньше известного значения μ для однопролетной стойки с силой, приложенной сверху (рис. 10). В нашем примере должно быть $\mu < 0,7$, что и получилось (смотри рис.8).

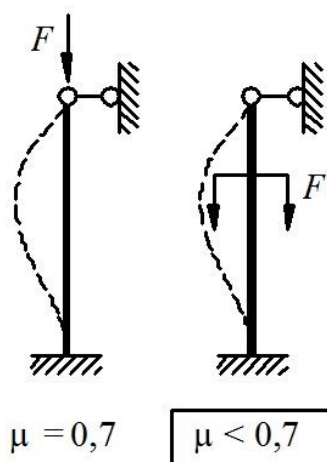


Рис. 10. Изменение μ при изменении положения силы в стойке №5

Заключение

Определение критической силы с помощью дифференциального уравнения изогнутой оси стойки (т.н. «точный способ» определения критических сил) процесс относительно сложный, громоздкий и требует определённых навыков и знания математических приёмов, особенно при решении трансцендентных уравнений.

В данной работе предпринята попытка существенно облегчить решение задачи о нахождении критической силы для сжатых стоек точным способом:

- изложен подробный алгоритм подготовки задачи к решению в программном комплексе,
- на примерах подробно показан вывод дифференциальных уравнений, описывающих поведение стойки при потере устойчивости, и нахождения решений этих уравнений,
- продемонстрирована постановка граничных условий для определения постоянных интегрирования в решении дифференциальных уравнений,
- изложена последовательность действий непосредственно с программным комплексом по введению исходной информации, получению и визуализации требуемых результатов.

Данная работа, по мнению авторов, может использоваться в учебном процессе при изучении курсов «Сопротивление материалов» и «Строительная механика», а также может быть полезной в инженерной практике для специалистов, занимающихся проблемами устойчивости упругих систем.

Список литературы

- [1]. Феодосьев В.И. Соппротивление материалов. 16-е изд., испр. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2016. 543 с.
- [2]. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука. 1967. 984 с.
- [3]. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение. 1978. 312 с.
- [4]. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Наука. 1974. 808 с.
- [5]. Мещеряков В.Б. Статика, динамика и устойчивость тонкостенных стержней с учетом деформаций сдвига. М.: АСВ. 2014. 246 с.
- [6]. Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций. М.: АСВ. 2004. 248 с.
- [7]. Масленников А.М. Основы динамики и устойчивости стержневых систем. М.: АСВ. 2000. 204 с.