электронный научно-технический журнал
ИНЖЕНЕРНЫЙ ВЕСТНИК
Издатель: Общероссийская общественная организация "Академия инженерных наук им. А.М. Прохорова". Эл No. ФС77-51036. ISSN 2307-0595

О разложении элементарных функций в степенные ряды

03, сентябрь 2018

Иванков П. Л.[1], Обухов В. П.[1]

УДК 517.26

[1]Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
v.obuhov@outlook.com

Введение

В данной статье мы рассматриваем некоторые проблемы, связанные с изложением в лекционном курсе вопросов, относящихся к разложению элементарных функций в ряды Тейлора. По традиции обычно рассматривают разложения экспоненты, косинуса, синуса, а также логарифма и степенной функции. При этом первые три из названных функций особых трудностей не вызывают, а вот подробное рассмотрение логарифма и степенной функции является непростой задачей. Причина этого связана не только с нехваткой времени (что создает проблемы при изложении любой темы); дело еще и в том, что в начальном курсе анализа не предусмотрено рассмотрение записи остаточного члена формулы Тейлора в форме Коши. В то же время именно такая форма записи остаточного члена используется при получении разложений функций $y = \ln(1+x)$ и $y = (1+x)^\alpha$ традиционным методом; см., например, [1, 2, 3]. Можно, конечно, привести упомянутые разложения без доказательства, но это вряд ли является удовлетворительным способом преодоления указанной трудности.

Далее мы предлагаем способ изложения рассматриваемой темы, который не потребует от лектора дополнительного времени и позволит без особых хлопот получить все указанные выше разложения без ссылок на теорему о формуле Тейлора с остаточным членом. Дело в том, что разложение элементарных функций в ряды Тейлора рассматривается на втором курсе, когда студенты уже знают свойства степенных рядов и знакомы с теоремой существования и единственности из теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Именно этим обстоятельством мы и воспользуемся.

1. Формула Тейлора с остаточным членом

Рассмотрим формулу Тейлора n-го порядка для функции $f(x)$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x). \qquad (1)$$

В этой формуле многочлен

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n \tag{2}$$

называется многочленом Тейлора порядка n функции $f(x)$ в точке $x = a$, а $R_n(x)$ — остаточным членом формулы Тейлора. Таким образом, формула Тейлора имеет вид:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x). \tag{3}$$

Многочлен Тейлора дает некоторое приближение к функции $f(x)$ в окрестности точки $x = a$, т.е. $f(x) \approx P_n(x)$. Остаточный член $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ дает погрешность последнего приближенного равенства; о величине этой погрешности априори ничего не известно.

Для получения информации об остаточном члене и его количественной оценке при конкретных значениях x и a рассмотрим формулу Тейлора с различными формами записи остаточного члена и различными их доказательствами.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ определена и n раз непрерывно дифференцируема на отрезке с граничными точками a и x, а во внутренних точках этого отрезка у нее существует производная порядка $n+1$, то для любой функции $\varphi(x)$, непрерывной на упомянутом отрезке и имеющей отличную от нуля производную внутри этого отрезка, найдется точка $x = c$, лежащая между a и x, такая, что для остаточного члена $R_n(x)$ формулы Тейлора функции $f(x)$ имеет место равенство

$$R_n(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(c)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n. \tag{4}$$

Доказательство. На отрезке I с концами в точках a и x рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t) = f(x) - \left(f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right). \tag{5}$$

Из определения $F(t)$ и условий теоремы видно, что $F(t)$ непрерывна на отрезке I как алгебраическая сумма непрерывных функций и дифференцируема внутри этого отрезка, причем

$$F'(t) = -\left(f'(t) - f'(t) + \frac{f''(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \right.$$
$$\left. + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - \ldots + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \right) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Функции $F(t)$ и $\varphi(t)$ на отрезке удовлетворяют всем условиям теоремы Коши [4, с. 117, теорема 5.4]. К этим функциям применим упомянутую теорему и найдем точку c, лежащую между a и x, для которой выполняется равенство

$$\frac{F(x)-F(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\frac{F'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Подставляя в последнюю формулу полученное выше выражение для производной функции $F(t)$ при $t=c$ и используя равенство $F(x)-F(a)=-R_n(x)$, вытекающее из (3) и (5), получим формулу (4). Теорема доказана.

Если теперь вместо $\varphi(t)$ подставлять в (4) любые удовлетворяющие условиям теоремы 1 функции, то мы будем получать различные формы записи остаточного члена $R_n(x)$ формулы Тейлора.

Пусть $\varphi(t)=(x-t)^p$, $p>0$. Данная функция непрерывна на отрезке I, причем производная $\varphi'(t)=-p(x-t)^{p-1}$ существует и отлична от нуля внутри этого отрезка. Из формулы (4) получаем

$$R_n(x)=\frac{-(x-a)^p}{-p(x-c)^{p-1}}\cdot\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n=\frac{f^{(n+1)}(c)}{p\,n!}(x-c)^{n+1-p}(x-a)^p. \tag{6}$$

Поскольку точка c находится между точками a и x, то $c=a+\vartheta(x-a)$ при некотором ϑ, $0<\vartheta<1$, а $x-c=x-a-\vartheta(x-a)=(1-\vartheta)(x-a)$. Отсюда и из формулы (6) получаем запись остаточного члена в общей форме

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta(x-a))}{p\,n!}(1-\vartheta)^{n+1-p}(x-a)^{n+1},\quad 0<\vartheta<1. \tag{7}$$

В частном случае при $p=n+1$ из (7) получаем остаточный член в форме Лагранжа:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\quad 0<\vartheta<1. \tag{8}$$

При $p=1$ получаем запись остаточного члена в форме Коши:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta(x-a))}{n!}(1-\vartheta)^{n}(x-a)^{n+1},\quad 0<\vartheta<1. \tag{9}$$

Следует отметить, что значения ϑ в формулах (7)–(9), вообще говоря, различны для одной и той же функции $f(x)$ даже при фиксированных точках a и x, так как эти значения могут зависеть от p. На устном экзамене иногда можно услышать от студентов, что выражение $\vartheta(x-a)$, фигурирующее в формулах (7)–(9), есть значение функции ϑ в точке $x-a$, т.е. $\vartheta(x-a)=\vartheta(t)\big|_{t=x-a}$. Поэтому, быть может, лектору будет нелишне разъяснить, что же на самом деле означает данное выражение.

Другой, более естественный путь получения информации об остаточном члене дает интегральное исчисление. Но при этом надо привлекать информацию, выходящую за рамки программы, что недопустимо из-за нехватки времени. Рассмотрим соответствующую теорему.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна вместе со своими производными $(n+1)$-го порядка включительно в некоторой окрестности точки a. Тогда остаточный член $R_n(x)$ ее формулы Тейлора (3) при любом x из упомянутой окрестности можно записать в следующих трех видах:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt, \tag{10}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad 0<\vartheta<1, \tag{11}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta(x-a))}{n!}(1-\vartheta)^n(x-a)^{n+1}, \quad 0<\vartheta<1. \tag{12}$$

Формула (10) называется остаточным членом формулы Тейлора в интегральной форме, формула (11) — в форме Лагранжа, а (12) — в форме Коши (последние две формы записи остаточного члена мы уже рассматривали выше).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Запишем сначала равенство, вытекающее из формулы Ньютона — Лейбница:

$$f(x) = f(a) + \int\limits_a^x f'(t)\,dt = f(a) - \int\limits_a^x f'(t)\,d(x-t).$$

Применив формулу интегрирования по частям, получим отсюда

$$f(x) = f(a) + (-f'(t)(x-t))\Big|_a^x + \int\limits_a^x f''(t)(x-t)\,dt = f(a) + f'(a)(x-a) + \int\limits_a^x f''(t)(x-t)\,dt.$$

Пусть для некоторого $m \leqslant n$ уже доказано, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{(m-1)!}\int\limits_a^x f^{(m)}(t)(x-t)^{m-1}\,dt. \tag{13}$$

Проинтегрируем по частям последний член еще раз:

$$\frac{1}{(m-1)!}\int\limits_a^x f^{(m)}(t)(x-t)^{m-1}\,dt = -\frac{1}{m!}\int\limits_a^x f^{(m)}(t)\,d(x-t)^m =$$

$$= -\frac{f^{(m)}(t)(x-t)^m}{m!}\Bigg|_a^x + \frac{1}{m!}\int\limits_a^x f^{(m+1)}(t)(x-t)^m\,dt =$$

$$= \frac{f^{(m)}(a)(x-a)^m}{m!} + \frac{1}{m!}\int\limits_a^x f^{(m+1)}(t)(x-t)^m\,dt,$$

подставим это выражение в (13):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{m!}\int\limits_a^x f^{(m+1)}(t)(x-t)^m\,dt.$$

В результате получилась формула (13), в которой m заменено на $m+1$. Таким образом, формула (13) доказана методом индукции для всех $m \leqslant n+1$. При $m = n+1$ ее остаточный член имеет вид (10).

Применим теперь обобщенную теорему о среднем значении к интегралу (10), вынося за знак интеграла среднее значение $(n+1)$-й производной функции $f(x)$:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n\,dt =$$
$$= \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\Bigl(-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\Bigr)\Bigr|_a^x = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta(x-a))}{(n+1)!},$$

где $0 < \vartheta < 1$. Формула (11) доказана.

Применив интегральную теорему о среднем к интегралу (10), вынося за знак интеграла среднее значение всей подынтегральной функции, получим

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-a), \tag{14}$$

где c лежит на интервале с концами a и x, т.е.

$$c = a + \vartheta(x-a) \quad \text{и} \quad x - c = x - a - \vartheta(x-a) = (x-a)(1-\vartheta), \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Подставляя эти выражения в (14), получаем формулу (12). Теорема 2 доказана.

Запишем остаточный член формулы Тейлора $R_n(x)$ в виде

$$\frac{1}{n!}\int\limits_a^x \bigl(f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1-p}\bigr)(x-t)^{p-1}\,dt, \quad p \geqslant 0. \tag{15}$$

Применим обобщенную интегральную теорему о среднем значении к интегралу (15), вынося за знак интеграла среднее значение функции $f^{(n+1)}(c)(x-c)^{n+1-p}$:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{p\,n!}(x-c)^{n+1-p}\int\limits_a^x (x-t)^{p-1}\,dt = \frac{f^{(n+1)}(c)}{p\,n!}(x-c)^{n+1-p}(x-a)^p.$$

После подстановки $c = a + \vartheta(x-a)$, $0 < \vartheta < 1$, получим остаточный член в общей форме, т.е. (7).

Рассмотрим еще одну форму записи остаточного члена. При этом можно ослабить ограничения, наложенные на функцию $f(x)$. Именно, потребуем, чтобы эта функция имела производные до $(n-1)$-го порядка включительно в окрестности точки a и производную порядка n в самой этой точке. Тогда, применив $n-1$ раз правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^n}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1}}{n(x-a)^{n-1}}=\ldots=\frac{1}{n!}\lim_{x\to a}\left(\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}-f^{(n)}(a)\right)=0.$$

Поэтому $R_n(x)=o((x-a)^n)$ при $x\to a$, и мы получаем формулу

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o((x-a)^n),\quad x\to a,$$

в которой остаточный член записан в форме Пеано.

Фактически при изложении данной темы на лекциях приходится ограничиваться рассмотрением лишь форм Лагранжа и Пеано записи остаточного члена формулы Тейлора. Это приводит, как отмечалось выше, к определенным трудностям с обоснованием формул разложения в ряды по степеням x логарифмической и степенной функции.

2. Разложения основных элементарных функций

Если у функции $f(x)$ в точке $x=a$ существуют производные всех порядков, то степенной ряд

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+\ldots \tag{16}$$

называется рядом Тейлора функции $f(x)$ в точке a. Представление функции $f(x)$ в окрестности точки $x=a$ некоторым сходящимся степенным рядом

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n,\quad x\in(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon),\quad \varepsilon>0,$$

называется её разложением в степенной ряд в окрестности точки a или разложением в ряд по степеням разности $x-a$.

Известно, что если функция в окрестности данной точки a представима рядом Тейлора, то он единственный. Но ряд Тейлора произвольной бесконечно дифференцируемой функции может быть расходящимся в окрестности точки a, или, если он сходится, то не обязательно к породившей его функции. Возникает вопрос: каким условиям должен удовлетворять ряд Тейлора функции $f(x)$, чтобы он сходился к $f(x)$ в окрестности точки a?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим формулу Тейлора для функции $f(x)$ с остаточным членом. Обозначим через $s_n(x)$ частичную сумму ряда Тейлора для функции $f(x)$:

$$s_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Тогда формулу (1) можно записать в виде

$$f(x) = s_n(x) + R_n(x). \tag{17}$$

Из этой формулы получаем необходимое и достаточное условие сходимости ряда Тейлора к функции $f(x)$. Сформулируем это условие в виде теоремы.

Теорема 3. Пусть функция $f(x)$ имеет в окрестности $U(a)$ точки a производные всех порядков. Для того, чтобы в указанной окрестности эта функция разлагалась в ряд Тейлора по степеням разности $x - a$ необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $x \in U(a)$ выполнялось равенство $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Доказательство теоремы очевидно.

Сформулируем еще одну теорему, в которой дается достаточное условие разложимости функции $f(x)$ в ряд Тейлора.

Теорема 4. Пусть функция $f(x)$ имеет в окрестности $U(a)$ точки a производные всех порядков. Для того, чтобы в окрестности $U(a)$ эта функция разлагалась в ряд Тейлора по степеням разности $x - a$ достаточно, чтобы как сама функция $f(x)$, так и все ее производные были ограничены в совокупности в указанной окрестности.

Ограниченность в совокупности в данном случае означает следующее: существует такое число M, что неравенство $|f^{(n)}(x)| \leqslant M$ выполняется для любой точки $x \in U(a)$ и для всех $n = 0,\, 1,\, \ldots$

Теперь найдем разложения в ряд Тейлора основных элементарных функций. Пусть $f(x) = e^x$. Поскольку $f^{(n)}(x) = e^x$, то при всех x из любой фиксированной δ-окрестности точки $a = 0$ и при всех $n = 0,\, 1,\, \ldots$ выполняется неравенство $0 < f^{(n)}(x) < e^{\delta}$. Мы видим, что условия теоремы 4 выполнены. Поэтому, если $a - \delta < x < a + \delta$, то

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{18}$$

Поскольку в качестве δ здесь можно взять любое положительное число, то на деле равенство (18) выполняется для любого $x \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим тригонометрические функции. Пусть $f(x) = \sin x$; известно, что

$$(\sin x)^{(k)} = \sin\Bigl(x + \frac{k\pi}{2}\Bigr).$$

Следовательно, $|f^{(k)}(x)| \leqslant 1$ для всех действительных x и для $k = 0,\, 1,\, \ldots$, т.е. сама функция и все ее производные ограничены в совокупности на действительной оси. Так как

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0, & k = 2n; \\ (-1)^n, & k = 2n + 1, \end{cases}$$

мы получаем разложение функции синус в ряд Тейлора, справедливое при всех действительных x:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

В случае функции $f(x) = \cos x$ рассуждаем аналогично. Как известно,

$$(\cos x)^{(k)} = \cos\Bigl(x + \frac{k\pi}{2}\Bigr),$$

поэтому

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^n, & k = 2n; \\ \quad 0, & k = 2n+1. \end{cases}$$

В результате получаем разложение для функции косинус, также справедливое при всех x:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Рассмотрим логарифмическую функцию $f(x) = \ln(1+x)$, $x > -1$. В этом случае

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n},$$

и в точке $x = 0$ имеем $f(0) = 0$, $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ Отсюда

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x).$$

При $x \in [0,\ 1]$, записав остаточный член в форме Лагранжа (11), получим такую оценку:

$$|R_n(x)| = \left|(-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\vartheta x)^{n+1}}\right| \leqslant \left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}. \tag{19}$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, и по теореме 3 функция $f(x) = \ln(1+x)$ разлагается в ряд Тейлора по степеням x на отрезке $[0,\ 1]$. В случае $x \in (-1, 0)$ применим запись остаточного члена в форме Коши:

$$|R_n(x)| = \left|\frac{(-1)^n(1-\vartheta)^n}{(1+\vartheta x)^{n+1}}|x|^{n+1}\right| \leqslant \left|\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right| \cdot \frac{1}{|1+\vartheta x|} x^{n+1} < \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}, \tag{20}$$

так как при $0 < \vartheta < 1$ и $x \in (-1, 0)$ выполняются неравенства

$$0 < \frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x} = \frac{1-\vartheta}{1-\vartheta|x|} < 1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{1+\vartheta x} = \frac{1}{1-\vartheta|x|} < \frac{1}{1-|x|}.$$

Поскольку $|x| < 1$, то из оценки (20) остаточного члена получаем

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \quad x \in (-1,\ 0).$$

С учетом всего вышесказанного имеем такое разложение:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},$$

справедливое при $-1 < x \leqslant 1$. Рассмотрим более простой способ получения последнего разложения. Рассмотрим известную из школьного курса формулу для суммы «бесконечно убывающей геометрической прогрессии»:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$$

Последний ряд сходится при $|x| < 1$ и допускает почленное интегрирование по любому отрезку, целиком лежащему внутри интервала $(-1,\ 1)$. Выполняя такое интегрирование, получаем

$$\ln(1+x) = \int\limits_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots \tag{21}$$

Из способа получения последнего равенства вытекает, что неравенство имеет место при $|x| < 1$. На деле, однако, оно справедливо и при $x = 1$. Проще всего в этом убедиться с помощью второй теоремы Абеля (см., например, [1, с. 92], [5, с. 468]). Применительно к рассматриваемому случаю эта теорема дает равенство $\lim\limits_{x\to 1-0} S(x) = S(1)$, где через $S(x)$ обозначена сумма ряда (21). Вторую теорему Абеля можно применять, если степенной ряд сходится в граничной точке интервала сходимости (что как раз и имеет место в рассматриваемом случае: это уже было доказано выше с помощью исследования остаточного члена, но можно проверить и непосредственно с помощью признака Лейбница). Мы видим, что применение теоремы Абеля позволяет утверждать, что (21) имеет место при $-1 < x \leqslant 1$.

Рассмотрим функцию $f(x) = (1+x)^\alpha$; производная такой функции n-го порядка вычисляется по формуле

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \quad n = 1,\, 2,\, \ldots$$

Мы будем использовать эту формулу при $|x| < 1$. При $x = 0$ имеем $f(0) = 1$, $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$. Поэтому ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$ имеет вид:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

С помощью признака Даламбера нетрудно убедиться, что этот ряд абсолютно сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$. Исследование поведения остаточного члена формулы Тейлора (который следует записать в форме Коши) позволяет доказать равенство

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad |x| < 1.$$

При этом исследование оказывается достаточно сложным и можно оспаривать обязательность его включения в учебный курс. Рассмотрение вопроса о выполнении последнего равенства при $x = \pm 1$ вообще не предусмотрено программой. Отметим также, что справедливость последнего равенства можно установить также, используя запись остаточного члена в интегральной форме (см. [6, с. 186]).

3. Использование теоремы единственности

Запишем ряд Тейлора функции $y = e^x$, т.е. ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \tag{22}$$

и воспользуемся тем, что радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можно вычислить по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \tag{23}$$

(см., например, [6, с. 164], [7, с. 61]). В нашем случае имеем

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Мы видим, что $R = \infty$. Отсюда ясно, что сумма $S(x)$ ряда (22) определена на всей прямой, и для нахождения её производной следует почленно продифференцировать этот ряд; в результате такого дифференцирования получим равенство $S'(x) = S(x)$. Очевидно также, что $S(0) = 1$. Таким образом, сумма $S(x)$ ряда (22) и функция $y = e^x$ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению $y' = y$ и одному и тому же начальному условию $y(0) = 1$. Поэтому по теореме существования и единственности, см., например, [8], данные функции совпадают всюду, где они обе определены, т.е. при всех без исключения x, и мы получаем равенство

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty,\ \infty).$$

Рассмотрим теперь функции $y = \cos x$ и $y = \sin x$; соответствующие ряды Тейлора имеют, как известно, вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Указанным выше способом убеждаемся, что радиусы сходимости обоих этих рядов равны бесконечности. Поэтому, если мы обозначим суммы этих рядов соответственно через $C(x)$ и $S(x)$, то мы получим функции, определенные для всех x, и производные этих функций можно найти почленным дифференцированием соответствующих степенных рядов. Выполнив указанное дифференцирование, получим равенства: $C'(x) = -S(x)$, $S'(x) = C(x)$. Кроме того, очевидно, $C(0) = 1$, $S(0) = 0$. Мы видим, что вектор-функции $(C(x),\ S(x))^{\text{т}}$ и $(\cos x,\ \sin x)^{\text{т}}$ являются решениями одной и той же системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = -y_2, \\ y_2' = y_1 \end{cases}$$

и удовлетворяют одним и тем же начальным условиям $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$. На основании теоремы существования и единственности для систем линейных дифференциальных уравнений мы можем утверждать, что вектор-функции $(C(x),\ S(x))^{\text{т}}$ и $(\cos x,\ \sin x)^{\text{т}}$ совпадают всюду, где они обе определены (а определены они при всех без исключения x). Таким образом, справедливы равенства

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{и} \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

причем в обоих случаях $x \in (-\infty,\ \infty)$.

Рассмотрим ряд Тейлора функции $y = \ln(1+x)$, т.е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Радиус сходимости находим по формуле (23):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Далее, дифференцируя рассматриваемый ряд почленно при $|x| < 1$, получаем равенство

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \frac{1}{1+x}. \tag{24}$$

Поскольку

$$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}, \quad \text{и} \quad S(0) = \ln(1+x)\big|_{x=0} = 0,$$

в силу теоремы существования и единственности можно утверждать, что при $-1 < x < 1$ справедливо равенство

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

На деле, как мы видели, последнее равенство справедливо также и при $x = 1$, но используемый метод не позволяет установить это непосредственно. По-видимому, целесообразно сообщить это без доказательства, сославшись на вторую теорему Абеля. Ясно также, что вместо ссылки на теорему единственности из теории дифференциальных уравнений можно было применить интегрирование полученного выше равенства (24), как это сделано в предыдущем разделе.

Рассмотрим теперь степенную функцию $y = (1+x)^\alpha$. Ряд Тейлора был получен в предыдущих разделах; выпишем его и найдем радиус сходимости:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n, \quad R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{\alpha-n} \right| = 1.$$

Таким образом, производную суммы этого ряда, которую обозначим через $S(x)$, при $|x| < 1$ можно найти с помощью почленного дифференцирования:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}\, x^{n-1}.$$

Отсюда заключаем, что при указанных значениях x справедливо равенство

$$\frac{1+x}{\alpha}S'(x)=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n}=$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}=S(x),$$

т.е. $\frac{1+x}{\alpha}S'(x)=S(x)$. Такому же дифференциальному уравнению удовлетворяет и функция $y=(1+x)^{\alpha}$, кроме того, при $x=0$ обе функции $S(x)$ и $(1+x)^{\alpha}$ равны единице. На основании теоремы единственности делаем вывод о том, что

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n},\quad |x|<1.$$

Заметим, что последнее равенство аналогичным способом доказано в [9, гл. 16, §19].

Заключение

Хотя описанный метод изложения темы разложения функций в ряд Тейлора позволяет получить все требуемые разложения одним и тем же приемом, он опирается на не доказываемые в курсе утверждения: по традиции теорема существования и единственности сообщается студентам без доказательства (это же относится и к некоторым свойствам степенных рядов). Вряд ли можно считать это серьезным недостатком, если принять во внимание количество недоказываемых теорем в обязательном теоретическом курсе.

Также заметим, что описанный подход позволяет исключить теорему о достаточном условии представимости функции её рядом Тейлора, что приводит к экономии времени и возможности более подробно рассмотреть другие вопросы. Однако достаточное условие интересно и само по себе, и лектору, по-видимому, следует проявить осторожность при принятии соответствующего решения.

Время экономится также и на том, что нет необходимости напоминать студентам формулу Тейлора с остаточным членом, так как эта формула не используется. Можно возразить, что напоминание теоремы существования и единственности потребует не меньше времени, но эту последнюю теорему нет надобности формулировать во всех подробностях; вполне достаточно сослаться на нее так, как это сделано выше.

Теорема существования и единственности (в части, касающейся единственности) в большинстве учебных руководств по теории обыкновенных дифференциальных уравнений формулируется в «неудобной» для наших целей форме: указывается промежуток, на котором обязаны совпадать решения, удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям, но ничего не говорится о том, что будет происходить за пределами этого промежутка. Такая «неудобная» формулировка дана во многих учебниках по дифференциальным уравнениям [10, 11, 12], в руководстве по теории функций и функциональному анализу [13], а также в многочисленных методических пособиях (см., например, [14, 15, 16, 17, 18, 19]), изданных в МГТУ. «Удобная» для наших целей формулировка помимо [8] имеется также в [20]. Разъяснять эту тонкость на лекциях вряд ли целесообразно, но если среди слушателей имеются эрудированные студенты, и кто-то из них задаст соответствующий вопрос, то можно сослаться на теорему существования и единственности для линейных уравнений (и систем таких уравнений), в которой явно указывается максимальный промежуток, на котором определено решение.

Список литературы

1. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 2. Спб.: Лань, 2008. 464 с.
2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1. М.: Наука, 1988. 816 с.
3. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т. 1. М.: Наука, 1983. 464 с.
4. Иванова Е.Е. Дифференциальное исчисление функций одного переменного: учеб. для втузов / под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. 407 с.
5. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. М.: Наука, 1989. 735 с.
6. Власова Е.А. Ряды: учеб. для втузов / под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 616 с.
7. Морозова В.Д. Теория функций комплексного переменного: учеб. для втузов / под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. 520 с.
8. Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. М.: Наука, 1986. 272 с.
9. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 2. М.: Наука, 2009. 544 с.
10. Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения: учеб. для вузов / под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 352 с.
11. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Физматлит, 2005. 254 с.
12. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Либриком, 2017. 448 с.
13. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2006. 572 с.
14. Агафонов С.А., Зарубин В.С., Яковенко М.Г. Прикладные методы и задачи в разделе «Дифференциальные уравнения». М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1989.

15. Белова Т.И., Грешилов А.А., Пелевина А.Ф. Дифференциальные уравнения первого порядка. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1989.
16. Пелевина И.Н., Раров Н.Н., Филиновский А.В. Дифференциальные уравнения высших порядков. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001.
17. Крищенко А.П. Устойчивость движения автономных систем. М: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007.
18. Кандаурова И.Е., Миткин В.В., Шишкина С.И. Дифференциальные уравнения первого порядка. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2008.
19. Миткин В.В., Михайлова Т.Ю., Пелевина И.Н. Дифференциальные уравнения высших порядков. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2008.
20. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974. 331 с.