электронный научно-технический журнал
ИНЖЕНЕРНЫЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51036. ISSN 2307-0595

Особенности обучения студентов основам математического моделирования технических систем на примере гидромеханических устройств

10, октябрь 2015

Андреев М.А.

УДК 62-82

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
andreev.m.a@bmstu.ru

Введение

Математическое моделирование технических систем благодаря стремительному развитию вычислительной техники нашло широчайшее применение не только в научной деятельности, но и в инженерной практике. Математическое моделирование позволяет не только улучшить качество разрабатываемых изделий, но и в ряде случаев уменьшить издержки при испытаниях изделий, путём применения методов полунатурного моделирования. В связи с этим, современное инженерное образование должно обеспечивать студентов достаточным уровнем знаний и практических навыков, которые могут быть ими использованы в инженерной практике.

Вопросам обучения студентов математического моделирования посвящено много статей отечественных авторов. Карташова С.А. в своей работе [1] свидетельствует о том, что основной проблемой преподавания математического моделирования является слабая математическая подготовка студентов. Для решения этой проблемы предлагается применять метод нарастания сложности и т.н. «сквозные» задачи. Проблемам обучения математического регулирования также посвящены работы [2, 3].

Опыт работы автора статьи в рамках курсовых проектов и научно-исследовательской работы студента на кафедре «Гидромеханика, гидромашины и гидропневмоавтоматика» МГТУ им. Н.Э. Баумана свидетельствует о том, что решение задач по математическому моделированию представляет существенные трудности. Основной проблемой, решению которой посвящена данная статья, является установление связи между теоретическим материалом лекций и конкретным исполнением математической модели в определённой программе.

1. Выбор учебной задачи и её постановка

Вопрос постановки учебной задачи, несомненно, играет ключевую роль в усвоении студентом теоретических знаний и овладении практическими навыками. Слишком простая задача не даст достаточного представления о процессе математического моделирования, а слишком сложная лишит студента желания самостоятельно вникнуть в решаемую проблему и приведёт к решению по заранее заготовленным преподавателем шаблоном. Также задача не должна содержать многочисленные однотипные элементы с тем, чтобы её математическое описание было минимальным и не превращалось в рутинное переписывание уравнений. Кроме того, необходимо использовать метод нарастания сложности, который позволит студенту начать выполнять задание на основе твёрдо усвоенного материала и продолжать его выполнение при помощи новых знаний.

В случае обучения математическому моделированию гидромеханических систем наиболее удачной учебной задачей является описание движения цилиндрического плунжера с позиционной нагрузкой под действием рабочей жидкости, подаваемой от источника постоянного давления через дроссель постоянной площади проходного сечения (**Рис. 1**).

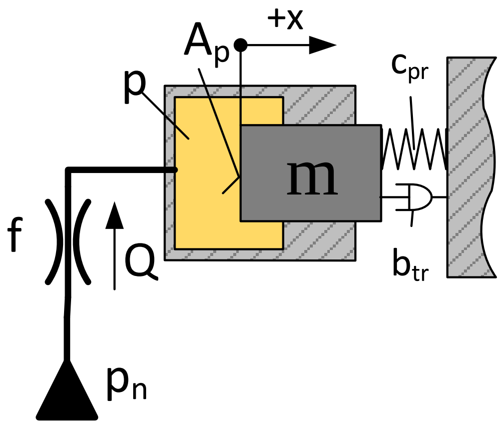

Рис. 1. Учебная задача для изучения моделирования гидромеханических систем

Требуется построить переходный процесс перемещения плунжера $x(t)$ при известных конструктивных параметрах системы и нулевых начальных условиях. В первом приближении студенту предлагается решить задачу с учётом сжимаемости рабочей жидкости и инерции плунжера. При известных допущениях, можно начать математическое описание данной задачи.

Т.к. требуется построить переходный процесс перемещения, удобнее всего начать описание с уравнения движения плунжера:

$$m \cdot \ddot{x} = p \cdot A_p - c_{pr} \cdot x - b_{tr} \cdot \dot{x} \tag{1}$$

где x – перемещение плунжера; p – давление в рабочей камере плунжера; m – масса плунжера; A_p – рабочая площадь плунжера; c_{pr} – жёсткость пружины плунжера; b_{tr} – коэффициент вязкого трения в демпфере.

Давление жидкости в рабочей камере с учётом сжимаемости вычисляется следующим образом:

$$\dot{p} = \frac{E}{V} \cdot \left(Q - A_p \cdot \dot{x}\right) \tag{2}$$

где Q – расход жидкости, поступающий в рабочую камеру; E – объёмный модуль упругости рабочей жидкости; V – объём рабочей камеры.

Объём рабочей камеры рассчитывается по следующей зависимости:

$$V = V_0 + A_p \cdot x$$

где V_0 – начальный объём рабочей камеры.

Расход жидкости, поступающий в рабочую камеру, определяется следующим образом:

$$Q = \mu \cdot f \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{|p_n - p|}{\rho}} \cdot sign(p_n - p)$$

где p_n – давление питания; f – площадь проходного сечения дросселя; μ – коэффициент расхода дросселя; ρ – плотность рабочей жидкости.

Таким образом, задача с заданными допущениями позволяет изучить простую гидромеханическую систему с учётом основных физических свойств объектов, встречающихся при моделировании объектов любой сложности. Значения параметров приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Название	Обозн.	Значения	Разм.
Масса плунжера	m	100	кг
Рабочая площадь плунжера	A_p	$7{,}854 \cdot 10^{-5}$	м^2
Жёсткость пружины	c_{pr}	200	Н/мм
Коэффициент вязкого трения	b_{tr}	1000	(Н · с)/м
Объёмный модуль упругости рабочей жидкости	E	$1{,}3 \cdot 10^9$	Па
Начальный объём рабочей камеры	V_0	20	см^3
Коэффициент расхода дросселя	μ	0,62	-
Площадь проходного сечения дросселя	f	$3{,}142 \cdot 10^{-8}$	м^2
Плотность рабочей жидкости	ρ	850	кг/м^3
Давление питания	p_n	20	МПа

2. Решение задачи

В настоящее время существует множество программ, позволяющих осуществлять математическое моделирование без непосредственной записи уравнений, путём использования библиотеки готовых элементов (MATLAB Simulink (библиотека Simscape), Simulation X, Adams и др.). Несомненно, данный подход существенно ускоряет работу опытного инженера и исследователя, однако не может быть использован на ранних стадиях изучения математического моделирования. Готовые элементы из библиотек большинства программ содержат множество настроек, выбор которых должен осуществляться в соответствии не только в соответствии с физическим смыслом задачи, но и основываясь на возможности численного решения задачи в её математической постановке. Неправильный или неполный выбор компонентов приводит к возникновению критических ошибок, природа которых неясна студенту (например – алгебраические петли), либо к неправильным результатам (расходящийся переходный процесс устойчивой системы из-за неправильно выбранных параметров решателя ОДУ). В итоге, изучение математического моделирования сводится к механическому запоминанию настроек компонентов, что не позволяет студенту справляться с задачами, отличающимися от шаблонных.

Очевидно, что для твёрдого усвоения основ математического моделирования, необходимо, чтобы студент самостоятельно описал задачу математическими уравнениями и решил одним из численных методов полученную систему. Для решения описанной выше задачи, приведём уравнения к форме Коши. Получим следующую систему из трёх дифференциальных и двух алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{m} \cdot (p \cdot A_p - c_{pr} \cdot x - b_{tr} \cdot v) \\ \dfrac{dx}{dt} = v \\ \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{E}{V} \cdot (Q - A_p \cdot v) \\ Q = \mu \cdot f \cdot \sqrt{2 \cdot \dfrac{|p_n - p|}{\rho}} \cdot sign(p_n - p) \\ V = V_0 + A_p \cdot x \end{cases}$$

Начальные условия:

$$v_0 = 0\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$x_0 = 0\ \text{м}$$

$$p_0 = 0\ \text{Па}$$

Для наглядности проще всего использовать метод Эйлера. Проиллюстрируем замену дифференциального уравнения уравнением в конечных разностях на примере первого выражения:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1}{m} \cdot (p \cdot A_p - c_{pr} \cdot x - b_{tr} \cdot v)$$

$$\Delta v = v_{i+1} - v_i$$

$$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{m} \cdot \left(p_i \cdot A_p - c_{pr} \cdot x_i - b_{tr} \cdot v_i\right) \cdot \Delta t$$

Видно, что для получения значения на $(i+1)$-м шаге, необходимо только задаться шагом интегрирования по времени Δt. Решение всей системы производится в цикле для интервала времени $t = 0..t_k$ на любом доступном для студента языке программирования, либо софте.

На данном этапе необходимо обратить внимание на влияние шага интегрирования на результат моделирования (**Рис. 2**). На этом этапе студент должен усвоить критический подход при анализе результатов математического моделирования и привыкнуть в первую очередь убеждаться в правильности решения системы уравнений, а уже во вторую – анализировать решение с точки зрения физики.

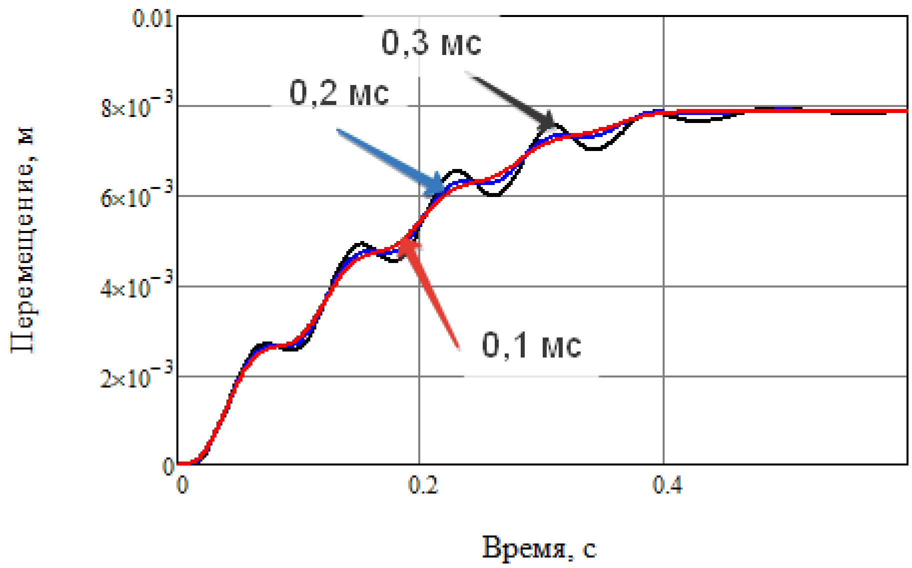

Рис. 2. Результат моделирования при различных шагах по времени

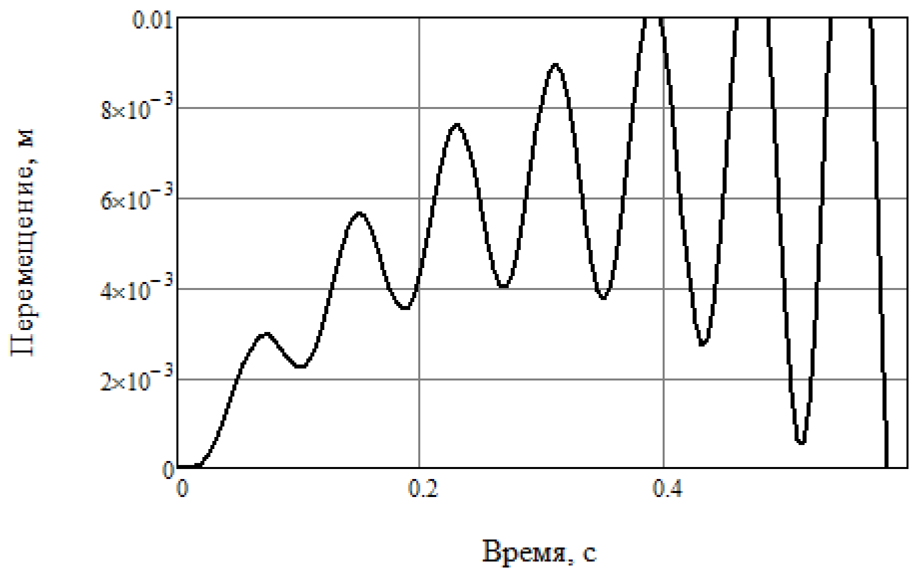

Рис. 3. Результат моделирования при шаге интегрирования 5 мс.

На следующем этапе целесообразно перейти к достаточно широко распространённой в настоящее время форме представления уравнений в виде блок-диаграмм. Переход необходимо выполнять так же поэтапно, отказавшись от предварительных преобразований уравнений с целью перехода к стандартным передаточным функциям. Таким образом, уравнение движения (1) может быть представлено в виде блок-диаграммы в соответствии с рис. 4.

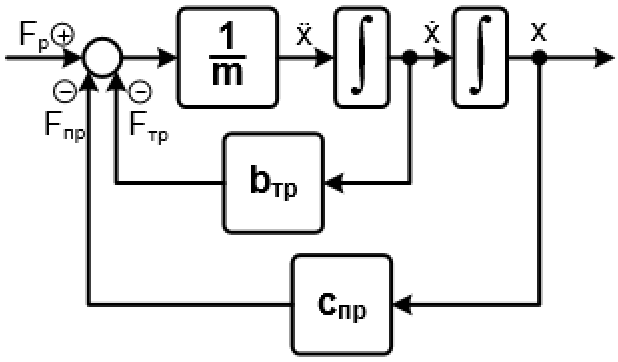

Рис. 4. Уравнение движения в виде блок-диаграммы

Уравнение для определения давления рабочей жидкости (2) представлено в виде блок-диаграммы на рис.5.

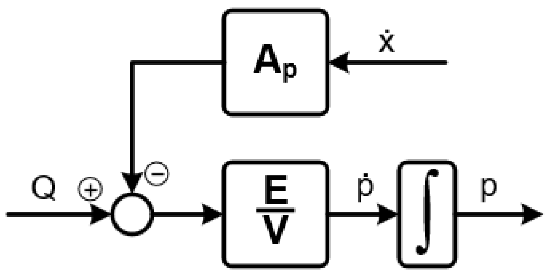

Рис.5. Уравнение для определения давления в полости в виде блок-диаграммы

После дополнения уравнения расхода и соединения между собой элементов блок-диаграмм, итоговая блок-диаграмма приобретает следующий вид (Рис. 6).

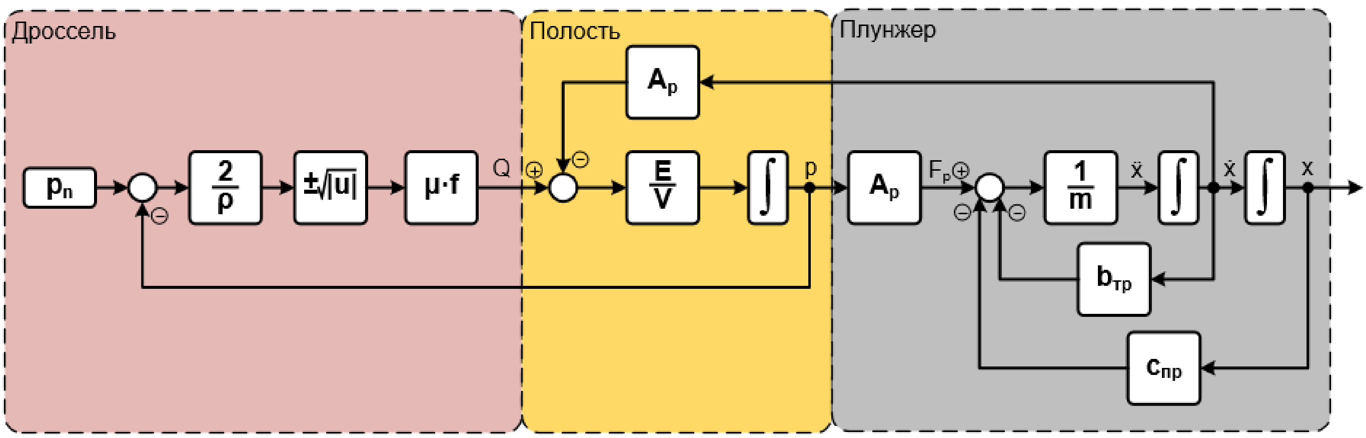

Рис.6. Итоговая блок-диаграмма математической модели

Данная блок-диаграмма может быть реализована в любом современном программном комплексе с использованием различных методов решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Результат необходимо сравнить с решением методом Эйлера и убедиться в его идентичности.

Выводы

1. Для начала обучения студентов математическому моделированию гидромеханических систем необходим пример, с одной стороны, содержащий в себе достаточно элементов для наглядной демонстрации всех наиболее часто встречаемых уравнений, с другой стороны – не содержащий в себе большого числа однотипных элементов.
2. Написание математической модели необходимо начинать с составления уравнений и решения его наиболее простым и известным студенту математическим методом (например, методом Эйлера). Результат решения необходимо подвергнуть критическому анализу.
3. Переход к составлению математической модели посредством составления блок-диаграмм необходимо осуществлять поэтапно, отдельно описывая каждый элемент системы.
4. Данная методика обучения студентов была опробована в результате руководства курсовыми проектами по курсу «Динамика и регулирование гидро- и пневмосистем», а также курсовой научно-исследовательской работы студента в МГТУ им. Баумана и показала свою эффективность.

Список литературы

[1]. Пронин В.П., Хинич И.И. , Чистотин И.А. Математическое моделирование в исследовтельско-ориентированном обучении студентов физике поверхности конденсированных веществ // Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. СПб.: ГОУ ВПО РГПУ им. А.И. Герцена. 2009. № 95. С. 155-168

[2]. Карташова С.А. Математическое моделирование: проблемы обучения в сельскохозяйственнх ВУЗах // Известия ВГПУ. Волгоград: ГОУ ВПО «Волгоградский государственный педагогический университет». 2007. № 6. С. 45-48

[3]. Кузьмин О.В., Палеева М.Л. Обучение математическому моделированию бакалавров технических направлений: из опыта работы // Вестник Томского государственного педагогического университета. Томск: ФГБОУ ВПО "ТГПУ". 2013. № 1 (129). С. 14-17