электронный научно-технический журнал
ИНЖЕНЕРНЫЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51036. ISSN 2307-0595

Методика изложение темы «Случайные величины» в курсе «Теория вероятностей»

06, июнь 2015

Косова А. В.[1,*], Пелевина И. Н.[1], Попова Е. М.[1]

УДК: 519.21

[1]Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
[*]anna.v.kosova@mail.ru

Введение

Первый раздел изложения курса «Теория вероятностей» был освещен в работе [7], где были рассмотрены теория и задачи на классическую вероятность с помощью формул комбинаторики. Продолжением изучения курса является понятие случайной величины, значение которого трудно недооценить. Результаты любых измерений и наблюдений, контролируемые параметры выпускаемых изделий являются случайными величинами. Поэтому те понятия и факты, которые изучают студенты в данной теме, широко используются в различных теоретических и прикладных специальных дисциплинах: теория надёжности, теоретическая физика, теория стрельбы, теория автоматического управления и т.д. Оказывается, что достаточно большое количество случайных величин подчиняется определённым закономерностям, а именно – вероятностным закономерностям. Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Но зачастую этот закон не известен, и приходится ограничиваться меньшей информацией. Иногда при решении тех или иных теоретических и прикладных задач даже выгоднее пользоваться числами и параметрами, которые описывают случайную величину суммарно. Такие числа называют числовыми характеристиками случайной величины. Конспективный стиль изложения позволил изложить все вопросы, связанные с указанной темой, в сравнительно небольшом объёме текста. При этом рассмотрен широкий спектр примеров, позволяющих студентам усвоить изучаемый материал в необходимом объёме.

Случайные величины и их законы распределения

Случайной величиной называют числовую величину, значение которой зависит от исхода опыта. Давайте сразу предложим студенту наглядный пример.

Пример 1. Монету подбрасывают до первого появления цифры. В этом опыте рассмотрим случайную величину X - число бросаний до первого выпадения цифры. Пространство элементарных исходов в данном опыте имеет вид $\Omega = \{Ц, \quad ГЦ \quad ,ГГЦ,...\}$. Множество значений случайной величины X : $\{0, \quad 1, \quad 2,..., \quad n,...\}$. Очевидно, каждому исходу опыта можно поставить в соответствие числовое значение:

$$Ц \to 0, \quad ГЦ \to 1, \quad ГГЦ \to 2,..., \quad \underbrace{ГГ...Г}_{n \quad раз}Ц \to n$$

.

Таким образом, случайную величину можно определить, как числовую функцию исхода опыта.

Определение 1. Случайной величиной называется действительная функция $X = X(\omega)$, определенная на множестве элементарных исходов Ω и такая, что при любом действительном x множество тех ω, для которых $X(\omega) < x$ принадлежит алгебре событий для данного эксперимента.

Случайные величины принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита: $X = X(\omega), \quad Y = Y(\omega), \quad Z = Z(\omega)$, а их возможные значения – малыми буквами латинского алфавита: $x, \quad y, \quad z,...$.

Различают дискретные и непрерывные случайные величины. Множество значений дискретной случайной величины конечно или счетно. Возможные значения дискретной случайной величины могут быть заранее перечислены. Возможные значения непрерывной случайной величины не могут быть заранее перечислены и непрерывно заполняют некоторый промежуток числовой оси. Можно предложить студентам самим подумать над примерами дискретных и непрерывных случайных величин. Обычно студенты предлагают следующие примеры случайных величин:

1) дискретные:

- число очков на выпавшей грани кубика;
- оценки студентов на экзамене;

2) непрерывные:

- время «жизни» телевизора;
- время опоздания студентов на лекцию.

Законы распределения случайных величин

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Распределение дискретной случайной величины удобно описывать рядом распределения.

Определение 2. Рядом распределения дискретной случайной величины X называют таблицу, в первой строке которой указаны возможные значения случайной величины (в порядке возрастания), а во второй – соответствующие им вероятности $p_i = P(X = x_i)$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Пример 2. Трижды подбрасывается монета. Случайная величина X - число выпавших гербов. Описать закон распределения данной случайной величины.

Очевидно, X - дискретная случайная величина, которая может принимать значения $0, \; 1, \; 2, \; 3.$ В силу независимости исходов отдельных подбрасываний имеем:

$$P(X=0) = P(ЦЦЦ) = P(Ц)\cdot P(Ц)\cdot P(Ц) = \frac{1}{8}.$$

В силу аксиомы сложения вероятностей и теоремы умножения для независимых событий, получаем:

$$P(X=1) = P(ГЦЦ) + P(ЦГЦ) + P(ЦЦГ) = 3\cdot\frac{1}{8},$$

$$P(X=2) = P(ГГЦ) + P(ЦГГ) + P(ГЦГ) = 3\cdot\frac{1}{8},$$

$$P(X=3) = P(ГГГ) = \frac{1}{8}.$$

Итак, закон распределения X имеет вид

x_1	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Функция распределения

Общим законом распределения для всех случайных величин является функция распределения.

Определение 3. Функция $F(x)$ действительной переменной x, $-\infty < x < +\infty$, определяемая формулой $F(x) = P(X < x)$ называется функцией распределения случайной величины X.

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1. $0 \le F(x) \le 1, \quad -\infty < x < +\infty;$

2. $F(x)$ - неубывающая функция на всей оси, т.е. для любых x_1 и x_2, таких что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $F(x_1) \le F(x_2)$;
3. $F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$;
4. $F(x)$ непрерывна слева, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0-0} F(x) = F(x_0)$;
5. Вероятность попадания случайной величины X на произвольный полуинтервал действительной оси $[a,b)$ определяется формулой $P(a \le x < b) = F(b) - F(a)$.

Пример 3. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ 0,5x - 1, & 2 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}.$$

1. Найти вероятность следующих событий
$P(X < 1), \quad P(X < 2,4), \quad P(X \ge 2,4), \quad P(3 \le X < 5)$;
2. Какие значения может принимать данная случайная величина X ?

Решение:

1. $P(X < 1) = F(1) = 0, \quad P(X < 2,4) = \mathrm{F}(2,4) = 0,5 \cdot 2,4 - 1 = 0,2,$

$P(X \ge 2,4) = 1 - \mathrm{P}(X < 2,4) = 0,8, \quad P(3 \le X < 5) = F(5) - F(3) = 1 - (0,5 \cdot 3 - 1) = 0,5$.

2. $F(2) = 0$, т.к. $P(X < 2) = 0$, следовательно, значения меньшие 2 не наблюдаются. $F(4) = 1$, т.е. $F(X < 4) = 1$. Следовательно, все, что может наблюдаться меньше 4. Таким образом, возможные значения случайной величины X - это интервал $(2,4)$.

Зная ряд распределения дискретной случайной величины

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

можно найти ее функцию распределения.

Если $x \le x_1$, то $F(x) = 0$, так как значений меньше x_1 случайная величина X не принимает. Если $x_1 < x \le x_2$, то меньше таких x только x_1, и

$$F(x) = P(X < x) = P(X = x_1) = p_1.$$

Если $x_2 < x \le x_3$, то меньше таких x может наблюдаться либо x_1, либо x_2. Воспользовавшись аксиомой сложения вероятностей, получаем

$$F(x)=P(X<x)=P\left((X=x_1)+(X=x_2)\right)=p(X=x_1)+p(X=x_2)=p_1+p_2$$ и т.д.

Если $x > x_n$, то по аксиоме сложения вероятностей

$$F(x)=P(X<x)=P\left(\sum_{i=1}^{n} X=x_i\right)=\sum_{i=1}^{n} p(X=x_i)=\sum_{i=1}^{n} p_i=1.$$

Итак, функция распределения случайной величины имеет вид:

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n} P(X=x_k)=\begin{cases}0, & x\le x_1\\ p_1, & x_1<x\le x_2\\ p_1+p_2, & x_2<x\le x_3\\ p_1+p_2+p_3, & x_3<x\le x_4\\ \ldots & \\ 1, & x>x_n\end{cases}.$$

График функции распределения дискретной случайной величины X представляет собой ступенчатую функцию, имеющую разрывы типа «скачок» в возможных значениях x_i случайной величины. Величина скачка равна вероятности p_i, с которым это значение принимается.

Функция распределения непрерывной случайной величины является непрерывной функцией.

Замечание. Если X - непрерывная случайная величина, то $P(X=a)=0$.

В самом деле, в силу свойства 5 функции распределения и непрерывности функции распределения, получаем: $P(X=a)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0} P(a\le X<a+\varepsilon)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(F(a+\varepsilon)-F(a)\right)=0$.

Таким образом, для непрерывной случайной величины

$$p(a<x\le b)=p(a\le x<b)=p(a<x<b)=p(a\le x\le b).$$

Плотность распределения вероятностей

Определение 4. Плотностью распределения вероятностей случайной величины X называется производная от функции распределения $f(x)=F'(x)$.

Если X - непрерывная случайная величина, то ее функция распределения непрерывна и производная берется в классическом смысле. Итак, если X - непрерывная случайная величина, то $f(x)=F'_{кл}(x)$.

Если X - дискретная случайная величина, то ее функция распределения имеет разрывы типа «скачок» в возможных значениях x_i случайной величины. В этом случае говорят об обобщенной плотности распределения, которая равна обобщенной производной функции распределения, где $\delta(x)$ - δ-функция Дирака.

Комментарий авторов: курс «Теория вероятностей» на факультете РЛ проходят после курса «Уравнения математической физики». К этому моменту студенты уже умеют вычислять такие обобщенные производные.

Вероятностный смысл плотности распределения: используя определение производной и свойство 5 функции распределения, получаем

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{p(x \le X < x+\Delta x)}{\Delta x}.$$

Итак, плотность распределения вероятностей есть предел отношения вероятности попадания в элементарный полуинтервал $[x, x+\Delta x)$ к длине этого интервала при условии, что интервал стягивается к точке x. Этим фактом и определяется термин «плотность распределения вероятностей».

Свойства плотности распределения:

1. $f(x) \ge 0$, как производная неубывающей функции.
2. $P(a \le X < b) = \int_a^b f(x)dx$.
3. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
4. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Из свойства 4 плотности распределения следует, что $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

Числовые характеристики случайных величин

При решении многих задач нет необходимости указывать закон распределения случайной величины, а достаточно охарактеризовать ее лишь некоторыми числами. Такие числа называют числовыми характеристиками случайных величин. Основная задача – научить студентов вычислять эти числовые характеристики для любой случайной величины.

Основную роль в приложениях играют математическое ожидание, задающее центральное значение случайной величины и дисперсия, характеризующая рассеивание значений случайной величины вокруг математического ожидания.

Математическое ожидание

Математическое ожидание случайной величины X называется ее среднее значение, которое теоретически должно ожидаться у данной случайной величины. Например:

1. Пусть X - результат измерения некоторого параметра. $X = a + \varepsilon$, где a - истинное значение, ε - погрешность. Если прибор не дает систематической ошибки, то $M(\varepsilon) = 0;\quad M(X) = a$.
2. Пусть X - контролируемый параметр выпускаемых изделий. Тогда $M(X) = ГОСТ$.

Определение 5. Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины X, принимающей значение $x_1,\ x_2, ..., x_n$ с вероятностями $p_1,\ p_2, ...,\ p_n$ соответственно, называют число $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$. При этом, если множество значений случайной величины счетно, то предполагается, что ряд $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ сходится абсолютно; в противном случае говорят, что математическое ожидание X не существует.

Рассмотрим в виде примера очень понятную в обучении студентов ситуацию.

Пример 4. В группе 30 человек. Из них: 5 – отличники, 10 – хорошисты, 15 – троечники. Рассматривается случайная величина K - балл на экзамене. Найти $M(K)$.

Ряд распределения случайной величины K имеет вид

K	2	3	4	5
p_i	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$$M(K) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{6} \approx 3,66.$$

Механическим аналогом математического ожидания является координата центра масс системы точек с массами p_i $\left(\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right)$, расположенных на числовой прямой в точках с координатами $x_1,\ x_2, ...,\ x_n$. В самом деле, $\overline{x}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = M(X)$.

Определение 6. Математическим ожиданием (средним значением) непрерывной случайной величины X называется число $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$, где $f(x)$ - плотность распределения. При этом предполагается, что несобственный интеграл сходится абсолютно.

В механической интерпретации математическое ожидание непрерывной случайной величины сохраняет тот же смысл: абсциссы центра тяжести в случае, когда масса распределена по оси OX непрерывно, с плотностью $f(x)$. Эта интерпретация часто позволяет студентам находить математическое ожидание без вычисления интеграла из механических соображений.

Свойства математического ожидания

Далее X, Y - случайные величины, C - постоянная.

1. $M(C)=C$;
2. $M(CX)=C\cdot M(X)$;
3. $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$;
4. Если случайные величины X и Y независимы, то $M(XY)=M(X)\cdot M(Y)$.

Доказательства свойств 1-3 можно найти в [1], а свойство 4 будет доказано ниже.

Дисперсия

Случайные величины могут иметь одинаковые математические ожидания, но при этом могут быть по-разному рассеяны относительно среднего значения. Поэтому, помимо среднего значения хотелось бы иметь число, которое характеризует рассеивание относительно среднего. Очевидно, степень рассеивания связана с величиной уклонения от среднего $X-M(X)$. Но $X-M(X)$ - случайная величина. Чтобы охарактеризовать рассеивание одним числом естественно взять среднее уклонений. Однако

$$M\big(X-M(X)\big)=M(X)-M\big(M(X)\big)=M(X)-M(X)=0.$$

Это связано с тем, что $X-M(X)$ может быть и положительно, и отрицательно.

Определение 7. Дисперсией случайной величины X называется число $D(X)$, равное $D(X)=M\left(\left(X-M(X)\right)^2\right)$.

Для непосредственного вычисления дисперсии служат формулы:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-M(X)\right)^2 p_i$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-M(X)\right)^2 f(x)dx$$

соответственно для дискретной и непрерывной случайных величин.

Механическим аналогом дисперсии является момент инерции заданного распределения масс относительно центра тяжести.

Свойства дисперсии

Пусть, как и ранее, X, Y - случайные величины, C - постоянная.

1. $D(C)=0$.
2. $D(X)\geq 0$.
3. $D(X+C)=D(X)$.
4. $D(CX)=C^2D(X)$.
5. $D(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X)$.
6. $D(X\pm Y)=D(X)\pm D(Y)$ для независимых случайных величин.

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины. Для характеристики рассеивания удобнее пользоваться величиной, размерность которой совпадает с размерностью случайной величины. Поэтому из дисперсии извлекают квадратный корень.

Определение 8. Средним квадратичным отклонением называется число $\sigma=\sqrt{D(X)}$
.

Некоторые распределения случайных величин

Приведем распределения, наиболее часто используемые в приложениях.

Дискретные случайные величины

Биномиальное распределение. Пусть проводится n испытаний по схеме Бернулли, p - вероятность «успеха» в одном опыте, q - вероятность «неуспеха» в одном опыте, $p+q=1$. Рассмотрим случайную величину X - число успехов в n опытах. Ее ряд распределения имеет вид

X	0	1	2	…	k	…	n
P	q^n	$C_n^1p^1q^{n-1}$	$C_n^2p^2q^{n-2}$		$C_n^kp^kq^{n-k}$		p^n

Случайную величину X, имеющую указанный ряд распределения, называют биномиально распределенной. $M(X)=np,\quad D(X)=npq,\quad \sigma_x=\sqrt{npq}$.

Распределение Пуассона (закон редких событий). Пусть опять проводится n испытаний по схеме Бернулли, однако, $n\to\infty,\quad p\to 0$, причем $np=\lambda=const$.

Нетрудно проверить, что $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ p\to 0\\ np=\lambda}}P_n(k)=\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ p\to 0\\ np=\lambda}}C_n^kp^kq^{n-k}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

Говорят, что случайная величина X распределена по закону Пуассона, если вероятность того, что она примет определенное значение k, выражается формулой

$$P_n(k)=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda},\quad \lambda=np.$$

Ряд распределения случайной величины X, распределенной по Пуассону, имеет вид

X	0	1	2	…	n	…
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$		$\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$	

Нетрудно видеть, что $\sum_{k=1}^{\infty} P_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$.

$$M(X) = \lambda, \quad D(X) = \lambda, \quad \sigma = \sqrt{\lambda}.$$

Распределение Пуассона называется также законом редких событий, так как оно появляется там, где производится большое число опытов ($n \to \infty$) в которых «успехи» появляются редко ($p \to 0$). По закону Пуассона распределены, например, число вызовов, поступивших в течение суток на телефонную станцию, число распавшихся частиц за время T при радиоактивном распаде вещества.

Непрерывные случайные величины

Равномерное распределение. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[a,b]$, если ее плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & x < a \quad или \quad x > b \end{cases}.$$

Функция равномерного распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}.$$

Если интервал $(x_1, x_2) \subset [a,b]$, то $P(x_1 \le X < x_2) = \frac{x_2 - x_1}{b-a}$.

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad \sigma_x = \frac{b-a}{\sqrt{12}}.$$

Равномерное распределение имеют, например, ошибки округления, время ожидания автобуса в интервале, указанном в расписании.

Нормальное распределение. Случайная величина X имеет нормальное распределение (распределение Гаусса) $X \sim N(m,\sigma)$, если ее плотность имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Плотность нормального распределения зависит от двух параметров: m и σ. Нетрудно показать, что $m = M(X)$, а $\sigma = \sqrt{D(X)}$. Функция нормального распределения имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Если $m = 0$ и $\sigma = 1$, то нормальный закон распределения называют стандартным, его функцию распределения обозначают $\Phi(x)$, а плотность распределения $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Заметим, что

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} + \Phi_0(x),$$

где $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ называется функцией Лапласа. Имеются таблицы функций $\varphi(x)$, $\Phi(x)$ и $\Phi_0(x)$. В таблицах указаны только значения функций для $x \in [0;5)$. Для отрицательных x надо пользоваться формулами $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. Если $x \geq 5$, то $\Phi_0(x) = \frac{1}{2}$, $\Phi(x) = 1$.

Пусть $m \neq 0$, $\sigma \neq 1$. Тогда плотность нормального распределения выражается через функцию Гаусса $\varphi(x)$ следующим образом

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

Функция нормального распределения $F(x)$ представляется с помощью функций $\Phi(x)$ и $\Phi_0(x)$. Делая замену переменных $\frac{t-m}{\sigma} = z$, получаем

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right),$$

или

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

Вычисление вероятности попадания в интервал для нормального распределения

По свойству 5 функции распределения

$$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right)$$

или

$$P(\alpha \le X < \beta) = \Phi_0\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right).$$

Рассмотрим типовые примеры на данные формулы.

Пример 5. Пусть X - вес людей, имеющих рост 170 см. $X \sim N(70,5)$. Какой процент людей из этой группы имеют вес, заключенный в пределах от 68 кг до 75 кг?

Найдем $P(68 \le X \le 75) = \Phi_0\left(\frac{75-70}{5}\right) - \Phi_0\left(\frac{68-70}{5}\right) = \Phi_0(1) + \Phi_0(0,4)$.

По таблице функции Лапласа находим

$$P(68 \le X \le 75) = 0,3413 + 0,15554 = 0,4967.$$

Итак, $49,67\%$ людей с ростом 170 см имеют вес в пределах от 68кг до 75 кг.

Вычисление вероятности заданного отклонения от среднего для нормального распределения

Нетрудно видеть, что $P(|X - m| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - 1$ или $P(|X - m| < \delta) = 2\Phi_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

Пример 6. Автомат изготавливает шарики. Шарик считается годным, если отклонение X диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,8 мм. Считая, что $X \sim N(0;0,5)$, найти сколько в среднем годных шариков из 100 изготовленных выпускает автомат.

Воспользуемся формулой: $P(|X| < 0,8) = 2\Phi_0\left(\frac{0,8}{0,5}\right) = 2\Phi_0(1,6) = 2 \cdot 0,4452 = 0,8902$.

Итак, вероятность отклонения, меньшего 0,8 мм, равна 0,8902. Следовательно, примерно 89 годных шариков выпускает автомат.

Правило 3-х $\sigma(6-\sigma)$

Из приведенных ранее формул и таблицы функции Лапласа следует, что

$$P(|X - m| < 3\sigma) = 2\Phi_0(3) = 0,9973.$$

Пример 7. Пусть X - доход предприятия. Известно, что X - нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием 10 млн. и средним квадратичным отклонением 200 тыс. В каких границах с вероятностью 0,9973 будет находится доход предприятия?

Используя правило 3-х сигма, получаем $P(9,4 \le X \le 10,6) = 0,9973$.

Заключение

Методика, которая положена в основу данной работы, позволит достаточно быстро сформировать правильное представление о способах решения широкого спектра задач по теме «Случайные величины». Теоретический материал носит справочный характер и поможет преподавателям и студентам при подготовке к практическим занятиям.

Список литературы

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. Изд. 4-е стереотип. М.: Наука. 1969. 564 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.: Учебное пособие для бакалавров.: для студентов вузов. 12-е изд. М.: Юрайт. 2014. 480 с.
3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей: Учеб. Изд. 6-е, перераб. и доп. М: Наука, 1988. 447с.
4. Печинкин А.В., Тескин О.И., Цветкова Г.М. и др. Теория вероятностей: Учеб. для вузов / Под ред. B.C. Зарубина, А.П. Крищенко. 3-е изд., испр. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XVI). М.: Изд-во МГТУ им Н.Э. Баумана. 2004. 456 с.
5. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. 5-е изд., перераб. и доп. Ч. 3. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособ. / Ефимов А. В., Каракулин А. Ф., Лесин В. В. и др.; ред. А.В. Ефимова; А.С. Поспелов. М.: Физматлит. 2009. 544 с.
6. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. Учебное пособие для бакалавров: для студентов вузов. 11-е изд., перераб. и доп. М.: Юрайт. 2014. 404 с.
7. Ахметова Ф.Х., Ласковая, Попова Е.М. «Методика изложения темы «Решение задач на классическую вероятность с помощью формул комбинаторики» в курсе «Теория вероятностей» // Инженерный Вестник: электронное научно-техническое издание. 2015. № 6. С. 1001-1012. Режим доступа: http://engbul.bmstu.ru/doc/777339.html (Дата обращения: 2.06.2015)