электронный научно-технический журнал
ИНЖЕНЕРНЫЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51036. ISSN 2307-0595

Методологические аспекты выделения главных частей бесконечно больших функций

04, апрель 2015

Ахметова Ф. Х.[1,*], Ласковая Т. А.[1],
Пелевина И. Н.[1]

УДК: 517

[1]Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
[*]dobrich@mail.ru

Введение

Классический курс математического анализа в техническом университете включает в себя достаточно сложный для студентов раздел, связанный с выделением главных частей бесконечно больших функций (или бесконечно малых функций). Поскольку эти навыки используются и в дальнейшем изучении курса, важно, чтобы студенты хорошо владели материалом и умели быстро проводить качественный анализ решения поставленных задач.

Для начала отметим, что бесконечно большие функции, как и бесконечно малые функции - это одни из ключевых понятий математического анализа, они вводятся на первых лекциях и затем постоянно используются в дальнейшем. Эти функции играют существенную роль в изучении темы «Предел функции», с их помощью доказываются важнейшие теоремы и поэтому студентам необходимо научиться работать с ними и уметь их сравнивать.

Бесконечно большие функции

При проведении семинарского занятия рекомендуется вначале сформулировать основное определение, которое будет использовано в дальнейшем при решении задач.

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой (**б.б.ф.**) при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

По определению предела функции это равенство означает, что для любого числа $M > 0$ существует число $\delta = \delta(M) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$.

В логической символике:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \iff ((\forall M > 0\ \exists \delta = \delta(M) > 0, \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow\Rightarrow \quad |f(x)| > M)$$

Например, функция $f(x) = \dfrac{1}{x-5}$ есть б. б. ф. при $x \to 5$.

Между бесконечно малыми (**б.м.ф.**) и бесконечно большими (**б.б.ф.**) функциями существует связь, которую отражает соответствующая теорема.

Теорема. Если функция $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to x_0$ ($\alpha(x) \neq 0$) , то функция $\frac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая при $x \to x_0$ и наоборот: если функция $\beta(x)$ - бесконечно большая при $x \to x_0$, то функция $\frac{1}{\beta(x)}$ есть бесконечно малая при $x \to x_0$.

Сравнение бесконечно больших функций

В этой части изложения материала необходимо указать студентам, что сравнение двух б.б.ф. между собой производится с помощью их отношения. Как известно, сумма и произведение двух б.б.ф. есть функция бесконечно большая. Этого нельзя сказать об их частном. Отношение двух б.б.ф. может вести себя по-разному. Рассмотрим все возможные случаи.

Пусть $A(x)$ и $B(x)$ есть две б.б.ф. при одном и том же стремлении аргумента $x \to x_0$, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} A(x) = \infty \; и \; \lim_{x \to x_0} B(x) = \infty$$

При сравнении будут использоваться символы $\boldsymbol{O}$ и $\boldsymbol{o}$. В математической литературе эти символы называются по имени немецкого математика Э.Г.Г. Ландау (1877-1938 г.), **символами Ландау**, используемые при сравнении не только б.б.ф., но и б.м.ф.

$$\textbf{1}.\ \text{Если} \lim_{x \to x_0} \frac{A(x)}{B(x)} = 0,$$

то $A(x)$ называется бесконечно большой **более низкого порядка роста**, чем $B(x)$ при $x \to x_0$, т.е. $A(x) = \boldsymbol{o}\big(B(x)\big)$, $x \to x_0$.

$$\textbf{2}.\ \text{Если} \lim_{x \to x_0} \frac{A(x)}{B(x)} = \infty,$$

то $A(x)$ называется бесконечно большой **более высокого порядка роста**, чем $B(x)$ при $x \to x_0$, т.е. $B(x) = \boldsymbol{o}\big(A(x)\big)$, $x \to x_0$.

$$\textbf{3}.\ \text{Если} \lim_{x \to x_0} \frac{A(x)}{B(x)} = \boldsymbol{C}, \text{где } \boldsymbol{C} \neq 0\ (\boldsymbol{C} \in \mathbf{R}),$$

то $A(x)$ и $B(x)$ называются бесконечно большими **одного порядка роста** при $x \to x_0$, т. е. $A(x) = \boldsymbol{O}\big(B(x)\big)$ или $B(x) = \boldsymbol{O}\big(A(x)\big), x \to x_0$.

$$\textbf{4}.\ \text{Если} \lim_{x \to x_0} \frac{A(x)}{B(x)} = 1,$$

то бесконечно большие $A(x)$ и $B(x)$ называются **эквивалентными** при $x \to x_0$, т. е. $A(x) \sim B(x)$, $x \to x_0$.

$$\mathbf{5}.\text{ Если } \lim_{x\to x_0}\frac{A(x)}{B(x)} \text{ не существует,}$$

то $A(x)$ и $B(x)$ называются **несравнимыми** бесконечно большими.

Например, функции $A(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ и $B(x) = x$ при $x \to \infty$ являются эквивалентными б.б.ф., т.к.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\cdot\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x} = 1;$$

а функции $A(x) = x(2+\cos x)$ и $B(x) = x$ - несравнимые б.б.ф. при $x \to \infty$, т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(2+\cos x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}(2+\cos x) -$ не существует.

Введем понятие порядка роста и проиллюстрируем на примере его нахождение.

Определение 2. Бесконечно большая функция $A(x)$ называется бесконечно большой $\boldsymbol{k}$ – го порядка роста относительно бесконечно большой $B(x)$ при $x \to x_0$, если существует число $\boldsymbol{k} > 0$ $(\boldsymbol{k} \in \mathbf{R})$ такое, что:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{A(x)}{(B(x))^k} = \boldsymbol{C}, \text{где } \boldsymbol{C} \neq 0 \ (\boldsymbol{C} \in \mathbf{R}).$$

При этом используется следующая запись: $A(x) = \boldsymbol{O}\left(\left(B(x)\right)^k\right),\ x \to x_0$.

Пример 1. Найти порядок роста б.б.ф. $A(x)$ относительно $B(x)$ при $x \to \infty$, если

$$A(x) = \frac{5x^6}{3x^4 + x^3 + 2}, \qquad B(x) = x$$

Рассмотрим предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{A(x)}{\left(B(x)\right)^k} = \lim_{x\to\infty}\frac{5x^6}{x^k(3x^4+x^3+2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{5x^6}{3x^{4+k}+x^{3+k}+2x^k} = (\text{при } k=2) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{5x^6}{3x^6+x^5+2x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{5}{3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^4}} = \frac{5}{3} \neq 0$$

$$\Rightarrow A(x) - \text{б.б.ф. } 2 - \text{го порядка роста относительно } B(x) \text{ при } x \to \infty,$$

$$\Rightarrow A(x) = \boldsymbol{O}\left(\left(B(x)\right)^k\right), x \to \infty$$

Выделение главной части бесконечно большой функции

Перейдем к основной задаче данной статьи, а именно, к алгоритму выделения главной части б.б.ф., сравнения их друг с другом и проведения качественного анализа полученных результатов. Прежде всего введем понятие главной части б.б.ф.

Утверждение. Главной частью алгебраической суммы конечного числа бесконечно больших функций является слагаемое более высокого порядка роста по сравнению с каждым из остальных слагаемых.

Пример 2. Главной частью суммы б.б.ф. $8x^3+7x^2+3x$ при $x\to\infty$, является функция $8x^3$, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+7x^2+3x}{8x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{8x}+\dfrac{3}{8x^2}\right)=1.$

Итак, предел отношения исходной функции и ее главной части равен 1, т.е. они эквивалентные, что определяет правильность нахождения главной части.

В общем случае можно говорить о выделении главной части не только у алгебраической суммы конечного числа б.б.ф., но и у произвольной б.б.ф. при $x\to x_0$. Любая функция $A(x)$, эквивалентная данной $B(x)$, является ее главной частью. Однако, если задаваться **определенным видом** этой главной части, то главную часть можно определить однозначно. Обычно главную часть б.б.ф. (при $x\to x_0$) ищут в виде $\boldsymbol{C\cdot(x-x_0)^k}$.

Таким образом, главную часть б.б.ф. будем искать в виде степенной функции. Более того, для того, чтобы студенты успешно усвоили материал и могли легко его структурировать, предлагается алгоритм для быстрого нахождения вида главной части. А именно, представим в виде таблицы возможные варианты выделения главной части б.б.ф. при различном стремлении аргумента.

$\boldsymbol{x_0}$	**Вид главной части**	**Выделение главной части б.б.ф.** $\boldsymbol{f(x)}$
$x\to 0$ $x_0=0$	$C\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)^k$	Если $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^k}=C$, где $C\neq 0$ $\Rightarrow f(x)=C\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)^k+o(\left(\dfrac{1}{x}\right)^k)$ $\Rightarrow \boldsymbol{f(x)\sim C\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)^k}$
$x\to x_0$ $x_0=const\neq 0$	$C\cdot\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)^k$	Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\left(\frac{1}{x-x_0}\right)^k}=C$, где $C\neq 0$ $\Rightarrow f(x)=C\cdot\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)^k+o(\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)^k)$ $\Rightarrow \boldsymbol{f(x)\sim C\cdot\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)^k}$
$x\to\infty$	$C\cdot x^k$	Если $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^k}=C$, где $C\neq 0$ $\Rightarrow f(x)=C\cdot x^k+o(x^k)$ $\Rightarrow \boldsymbol{f(x)\sim C\cdot x^k}$

Для закрепления результатов, изложенных в таблице, рассмотрим три примера для каждого случая.

Пример 3. Выделить главную часть б.б.ф. $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x^3}$ при $x\to 0$.

При данном стремлении аргумента будем искать главную часть б.б.ф. в виде $\boldsymbol{C}\left(\frac{1}{x}\right)^{\boldsymbol{k}}$. Для нахождения чисел $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{k}$ найдем предел отношения

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^k}=\lim_{x\to 0}\frac{x^k\ln(1+x)}{x^3}=\left\{\begin{matrix}\ln(1+x)\sim x\\ \text{при } x\to 0\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{k+1}}{x^3}=\{k+1=3\Rightarrow k=2\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3}=1\Rightarrow k=2, C=1, f(x)\sim\left(\frac{1}{x}\right)^2.$$

Следовательно, главной частью функции $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x^3}$ при $x\to 0$ является функция $F(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

Пример 4. Выделить главную часть б.б.ф. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x-5}$ при $x\to 1$.

При данном стремлении аргумента будем искать главную часть б.б.ф. в виде $\boldsymbol{C}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{\boldsymbol{k}}$. Для нахождения чисел $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{k}$ найдем предел отношения

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x-1}\right)^k}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^k}{x^2+4x-5}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^k}{(x-1)(x-5)}=\{\text{при } k=1\}==\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+5}=\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow k=1, C=\frac{1}{6}, f(x)\sim\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

Следовательно, главной частью функции $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x-5}$ при $x\to 1$ является функция $F(x)=\dfrac{1}{6(x-1)}$.

Пример 5. Выделить главную часть б.б.ф. $f(x)=\dfrac{2x^5}{1-x^3}$ при $x\to\infty$.

При данном стремлении аргумента будем искать главную часть б.б.ф. в виде $\boldsymbol{Cx^k}$. Для нахождения чисел $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{k}$ найдем предел отношения

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^k}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5}{(1-x^3)x^k}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5}{x^k-x^{k+3}}=\{k+3=5\Rightarrow k=2\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5}{x^2-x^5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\frac{1}{x^3}-1}=-2\Rightarrow k=2, C=-2, f(x)\sim -2x.$$

Следовательно, главной частью функции $f(x)=\dfrac{2x^5}{1-x^3}$ при $x\to\infty$ является функция $F(x)=-2x^2$.

Необходимо обратить внимание студентов на то, что определение главных частей облегчает в ряде случаев возможность их сравнения. Действительно, если две функции имеют главные части одного и того же вида (при одинаковом стремлении аргумента), то вместо того, чтобы сравнивать сами функции, находя их предел отношения, можно сравнить только их главные части. При этом упрощается и задача нахождения порядка роста одной функции относительно другой.

В индивидуальном домашнем задании (ДЗ) по этой теме в одной из задач студенты должны провести сравнительный анализ двух функций. А именно:

а) доказать, что обе функции являются б.б.ф. или б.м.ф. при $x\to x_0$;

б) для каждой функции $f(x)$ и $g(x)$ записать главную часть вида

$\boldsymbol{C\cdot(x-x_0)^k}$, указать порядок этих функций;

в) сравнить функции $f(x)$ и $g(x)$, если это возможно.

Поэтому, в заключительной части семинарского занятия настоятельно рекомендуется рассмотреть две б.б.ф. и провести поэтапный их анализ, как требуется в ДЗ. Это послужит закреплению материала, а сам пример в значительной мере поможет студентам в выполнении и оформлении ДЗ.

Пример 6. Рассмотрим две функции:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x^3+x\sin x}{x+\sqrt[3]{x}};\ \ g(x)=\frac{x^2+x+1}{x+2}\qquad x\to\infty}$$

а) докажем, что обе функции при $\boldsymbol{x}\to\infty$ являются б.б.ф.

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x\sin x}{x+\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}\sin x}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^8}}}=\infty$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{f(x)}-\text{б. б. ф. при } x\to\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=\infty$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{g(x)}-\text{б. б. ф. при } x\to\infty$$

б) $f(x)$ и $g(x)$ являются **б.б.ф.** при $x\to\infty$. Следовательно главную часть этих функций будем искать в виде $\boldsymbol{C\cdot x^k}$ $(\boldsymbol{k}>0)$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^k}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x\sin x}{(x+\sqrt[3]{x})x^k}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x\sin x}{x^{k+1}+x^{k+\frac{1}{3}}}=\{\text{при } k+1=3\Rightarrow k=2\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x\sin x}{x^3+x^{\frac{7}{3}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}\sin x}{1+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}=1$$

$$\Rightarrow k=2, C=1;\ f(x)\sim C\cdot x^k$$

Таким образом:

$$\boldsymbol{f(x)}\sim\boldsymbol{x^2} \text{ при } x\to\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^k}= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{(x+2)x^k}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^{k+1}+2x^k}=\{\text{при } k+1=2\Rightarrow k=1\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2+2x}= \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}=1$$

$$\Rightarrow k=1, C=1;\ \ g(x)\sim C\cdot x^k$$

Следовательно:

$$\boldsymbol{g(x)}\sim\boldsymbol{x} \text{ при } x\to\infty$$

в) выделив главные части обеих функций, мы видим, что при $x\to\infty$ функция $f(x)$ имеет второй порядок, а функция $g(x)$ - первый порядок роста относительно б.б.ф. x. Следовательно $f(x)$ имеет более высокий порядок роста (а именно второй) по сравнению с $g(x)$ при $x\to\infty$. Убедимся в этом непосредственно:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}x=\infty \ \Rightarrow\ \boldsymbol{g(x)=o\big(f(x)\big)} \text{ при } \boldsymbol{x}\to\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\big(g(x)\big)^k}=\begin{Bmatrix} f(x)\sim x^2 \text{ при } x\to\infty\\ g(x)\sim x \text{ при } x\to\infty\end{Bmatrix}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^k}=\{\text{при } k=2\}=1\neq 0$$

Следовательно:

$$\boldsymbol{g(x)=o\big(f(x)\big)} \quad \text{при } x\to\infty$$

$$\text{или } \boldsymbol{f(x)}\sim\big(\boldsymbol{g(x)}\big)^{\boldsymbol{2}} \quad \text{при } x\to\infty$$

Заключение

Отметим, что в данной статье показан алгоритм для быстрого нахождения главной части функции определенного вида, а именно, $\boldsymbol{C\cdot(x-x_0)^k}$. В процессе проведения занятий необходимо подчеркнуть, что не у каждой функции можно выделить главную часть такого вида и привести соответствующие примеры. Для более подробного освещения этой проблемы, потребуется дальнейшее изучение аппарата математического анализа с привлечением понятия производной функции.

Список литературы

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. В 2 ч. (Сер.: Курс высшей математики и математической физики). Ч.1. 7-е изд., стереотип. М.: Физматлит. 2014. 648 с.
2. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. Учебник для бакалавров. В 2 ч. Ч.1. 4-е изд. М.: Юрайт. 2013. 660 с.

3. Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Функции одной переменной. 3-е изд., стереотип. СПб.: Лань. 2008. 399 с.
4. Морозова В.Д. Введение в анализ: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. I). М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2014. 408с.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Учебник для втузов. В 2-х т. Т. 1. М.: Интеграл-Пресс. 2010. 416 с.
6. Ефимов А.В., Демидович Б.П. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. / Под общ. ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. 6-е изд., стер. (Перепеч. с 3-его изд. 1995 г.). Часть 1. Линейная алгебра и основы математического анализа / В.А. Болгов, [и др.] ; Общ. ред. А.В. Ефимов, Б.П. Демидович. М.: Альянс. 2010. 480 с.
7. Демидович Б.П. (ред.). Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов: учеб. пособие для студентов высш. техн. учеб. заведений / Г.С. Бараненков, Б.П. Демидович, В.А. Ефименко и др.; под ред. Б.П. Демидовича. М.: ООО «Изд-во Астрель». 2004. 495 с.
8. Ахметова Ф.Х. и др. Введение в анализ. Теория пределов: метод. указания к выполнению домашнего задания. В 3-х частях. Ч. 2. / Ф.Х. Ахметова, С.Н. Ефремова, Т.А. Ласковая. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2014. 32 с.
9. Ахметова Ф.Х., Ласковая Т.А., Пелевина И.Н. Научно-методические проблемы преподавания теории бесконечно малых функций. // Тезисы Международной научной конференции «Физико-математические проблемы создания новой техники» (PhysMathTech - 2014). (17-19 ноября 2014, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия). М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2014. 125 с. С. 104-105.