электронный научно-технический журнал
ИНЖЕНЕРНЫЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51036. ISSN 2307-0595

Особенности методического обеспечения дисциплины «Функциональный анализ и интегральные уравнения» в техническом университете

05, май 2015

Власова Е. А.[1,*]

УДК: 378

[1]Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
[*]elena.a.vlasova@yandex.ru

Введение

Как самостоятельная математическая дисциплина функциональный анализ оформился в начале XX века в результате переосмысления и обобщения ряда понятий математического анализа, алгебры и геометрии. Датой рождения функционального анализа считается 1932 год, когда вышла в свет основополагающая монография Стефана Банаха «Теория линейных операций». За последующие десятилетия функциональный анализ глубоко проник почти во все области математики. Основой для широких приложений функционального анализа является то, что большинство задач, возникающих в математике и математической физике, касается не отдельных объектов, например, функций, мер или уравнений, а целых классов таких объектов. Методы функционального анализа с успехом используются во многих разделах современной теоретической и прикладной математики. Более того, развитие таких дисциплин, как дифференциальные уравнения (обыкновенные и в частных производных), теория управления, методы вычислений, квантовая механика, математическая экономика и многих других, вряд ли было бы в последние годы столь успешным, если бы при этом не использовались идеи и методы функционального анализа. Поэтому функциональный анализ стал необходимым элементом серьезного математического образования и преподавание его основ включено в учебные планы математических специальностей университетов.

Дисциплина «Функциональный анализ и интегральные уравнения» преподается студентам факультета «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э. Баумана на протяжении многих лет. За это время значительно расширилось ее методическое обеспечение, появились учебники, учебные пособия, методические указания [1-5], сформировался банк оценочных средств. Остановимся на особенностях преподавания этой дисциплины в настоящее время компетентностного подхода в образовании.

Цели и задачи дисциплины

Дисциплина «Функциональный анализ и интегральные уравнения» входит в вариативную часть математического и естественнонаучного цикла учебного плана студентов, обучающихся по специальности «Прикладная математика» с присвоением квалификации бакалавра. Продолжительность изучения составляет два семестра. Общая трудоемкость дисциплины – 7 зачётных единиц. На аудиторную работу отводится около 50 процентов времени, остальное - для самостоятельной работы. Основными целями изучения дисциплины являются приобретение теоретических знаний основ функционального анализа, теории интегральных уравнений и практических навыков по использованию разнообразных современных функционально-аналитических методов. Главными задачами освоения дисциплины являются изучение основных абстрактных структур функционального анализа: метрических, нормированных, банаховых, гильбертовых пространств, теории операторов, теории интегральных уравнений, современных функционально-аналитических методов исследования прикладных задач, приобретение умения выполнять в абстрактных пространствах все основные операции и проводить вычислительные процедуры.

Для успешного освоения дисциплины «Функциональный анализ и интегральные уравнения» требуется интеграция знаний, полученных при изучении различных дисциплин математического цикла: математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, дифференциальных уравнений, кратных интегралов и рядов. В учебном плане для бакалавров дисциплина занимает 3 и 4 семестры. Если математический анализ, аналитическая геометрия и линейная алгебра изучаются на 1 курсе, то дифференциальные уравнения, кратные интегралы и ряды − в 3 семестре, т.е. параллельно с дисциплиной «Функциональный анализ и интегральные уравнения». Конечно, желательно, чтобы освоение функционального анализа проходило после ознакомления с указанными дисциплинами, когда в достаточной мере будет накоплен фактический материал для проведения аналогий и обобщений, больше будет возможностей для различного рода примеров и иллюстраций приложений абстрактной теории. Однако передвинуть знакомство с функциональным анализом на более поздние сроки в рамках четырехгодичного плана бакалавров затруднительно. В 5 и 6 семестрах студенты изучают такие дисциплины, как теория вероятностей, математическая статистика, теория случайных процессов, методы оптимизации и вариационное исчисление, уравнения математической физики, методы вычислений, теория управления, физика, где активно используются методы функционального анализа. В предшествующем плане для специалистов дисциплина «Функциональный анализ и интегральные уравнения» читалась в 4 семестре при тех же часах, отводимых на лекции, и вдвое меньших – на семинары. Однако опыт показал, что насыщенность теоретического материала, мало подкрепленного практическими занятиями, не позволяла его усваивать в должной степени в отведенный промежуток времени. Чтение дисциплины в течение двух семестров с добавлением семинаров и появлением в расписании студентов контролируемой самостоятельной работы (КСР) способствовало улучшению ситуации с успеваемостью. Для того чтобы изложение дисциплины в 3 семестре не пострадало, в программе параллельной дисциплины «Кратные интегралы и ряды» поменяли местами независимые друг от друга модули, поставив на первое место модуль «Ряды». Удалось также согласовать изложение функционального анализа с лекциями по дифференциальным уравнениям. Так, например, доказательство теоремы Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения приводится в курсе функционального анализа в качестве иллюстрации принципа сжимающих отображений. Причем происходит это в то время, когда в курсе дифференциальных уравнений формулируется названная выше теорема Коши.

Дисциплина имеет 4 модуля: Метрические и нормированные пространства», «Гильбертовы пространства», «Интеграл Лебега. Линейные функционалы и операторы», «Компактные операторы и интегральные уравнения». В каждом семестре изучается по 2 модуля. Оценка результатов освоения каждого модуля и дисциплины в целом проводится на основе модульно-рейтинговой системы.

Результаты освоения дисциплины

Необходимо отметить важность изучения дисциплины «Функциональный анализ и интегральные уравнения» в формировании у студентов познавательных, творческих и общепрофессиональных компетенций, в частности, способности к саморазвитию, творческому применению полученных знаний современных функционально-аналитических методов решения прикладных задач. Овладевая аппаратом функционального анализа, абстрагируясь от конкретных ситуаций, учащийся приобретает умение строить теории, включающие в себя классические задачи как частные случаи и дающие возможность решать новые задачи. Сам процесс абстрагирования имеет самостоятельное значение, проясняя ситуацию, отбрасывая лишнее и открывая неожиданные связи. В результате появляется возможность глубже проникнуть в сущность математических понятий и прокладывать новые пути исследования. Появляется способность выявлять, формулировать, преобразовывать поставленную задачу и принимать верные решения, самостоятельно выбирать способ решения проблемы из альтернативных вариантов, переносить знания из одной области в другую для генерации идей, решать нестандартные задачи, в том числе за пределами профессионального поля деятельности. В результате изучения дисциплины формируются такие компетенции, как компетенция профессиональной мобильности: способность к самостоятельному обучению новым методам исследования, к изменению научного и научно-производственного профиля своей профессиональной деятельности; компетенция системного аналитического мышления: способность к системному мышлению и анализу, к аналитической оценке событий и процессов в природе, технике и обществе; компетенция креативности: способность к творчеству, генерации новых идей, созданию нового знания; компетенция обобщения и презентации результатов исследований: способность к самостоятельному формированию выводов и подготовке научных и аналитических отчётов, публикаций и презентаций результатов научных и аналитических исследований.

Проблемы обучения

В начале обучения возникает большой поток новой информации с весьма специфичной терминологией, что создает значительные трудности при освоении дисциплины. Рекомендуется разработать компактный и удобный в использовании справочный материал (словарики с определениями основных понятий, тетради для «шпаргалок» из необходимых фактов, таблицы, в которых представлены основные нормированные пространства и перечислены их свойства…) Решение каждой задачи на семинарах рекомендуется начинать с повторения определений понятий, которые содержатся в формулировке условия. Решать больше совсем простых задач, поясняющих суть того или иного отдельного понятия. Отметим, что задачи по функциональному анализу довольно специфичны. Многие из них требуют изобретательности, особого подхода, глубоких знаний и функционального анализа, и смежных дисциплин (теории множеств, математического анализа, линейной алгебры и др.). Сложность добавляет и абстрактность самого курса. Для успешного освоения материала и методов решения задач нужны всевозможные методические пособия, в которых содержатся подробные решения большого количества задач по каждой изучаемой теме. Опытом создания одного из таких пособий являются методические указания к проведению семинарских занятий [5].

Оценочные средства

Контроль знаний учащихся – неотъемлемая часть процесса обучения, оценки качества образования. Программа дисциплины «Функциональный анализ и интегральные уравнения» предусматривает в каждом модуле проведение двух контрольных мероприятий в форме домашнего задания и рубежного контроля. Домашнее задание, как правило, состоит из 3-4 задач. Решение каждой задачи связано с проработкой и закреплением теоретического материала и применением его на практике. В помощь к выполнению домашнего задания каждого модуля имеются методические указания [4], содержащие подробное описание методов решения всех типовых заданий. Рубежный контроль проходит в письменной форме, обязательно включает теоретические вопросы (несколько вопросов на определения основных понятий, формулировки теорем, один вопрос с доказательством) и практические задания.

В течение изучения каждого модуля на занятиях, проводимых под контролем преподавателя (КСР), можно проводить тестирование студентов. Текущий контроль в форме тестирования позволяет выявить знания и на их основе строить и совершенствовать технологию преподавания. Тестовый контроль позволяет оперативно проверить знания студентов, психологически меньше нагружает и студентов, и преподавателей. На этапе текущего контроля знаний основной упор должен быть сделан на отслеживание движения учащихся по ступенькам знаний, на установление причин непонимания материала. Поэтому тестовый материал должен содержать задания, проверяющие знание и понимание определений и теорем, предлагающие устанавливать причинно-следственные отношения, проводить классификации, позволяющие проводить сравнения, сопоставления, распознавать противоречия в предлагаемых вариантах решений. При этом тестовые задания должны быть очень наглядными и несложными для выполнения. Для проверки терминологии это могут быть задания открытой формы с пропусками слов, знание определений можно эффективно проверить с помощью заданий закрытого типа с большим числом ответов. При конструировании тестовых заданий следует помнить, что освоение любого теоретического материала может быть у студента чисто механическим. Задача преподавателя – выяснить, понимает ли он содержание заученного. В этом помогут задания на соответствие. Для диагностирования причинно-следственных знаний и умений можно конструировать цепные задания, в которых правильный ответ на последующее задание зависит от ответа на предыдущее. Так, например, для проверки и закрепления знаний по модулю «Гильбертовы пространства» может быть предложен следующий тест:

В следующих заданиях вставьте пропущенные слова или выражения.

1. Бесконечномерное евклидово (унитарное) пространство $\boldsymbol{H}$, полное относительно нормы, индуцированной скалярным умножением в этом пространстве, согласно формуле ______________ называют действительным (комплексным) _____________ пространством.
2. Во всяком гильбертовом пространстве справедливо равенство параллелограмма ____

В следующих заданиях выберите правильный ответ.

3. Нормированным пространством, в котором можно ввести скалярное произведение, индуцирующее норму этого пространства, является пространство

   а) $\boldsymbol{m}$, б) $\boldsymbol{C}[0,1]$, в) $\boldsymbol{s}$, г) $\boldsymbol{l_2}$, д) $\boldsymbol{L_1}[0,1]$.
4. Скалярное произведение элементов $x_1 = \{-1,0,1,0,1,0,\dots,0\dots\}$ и $x_2 = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $\boldsymbol{l_2}$ равно

   а) $\frac{23}{15}$, б) $-\frac{7}{15}$, в) $\frac{7}{15}$, г) $\sqrt{\frac{23}{15}}$, д) $\sqrt{\frac{7}{15}}$.
5. Расстояние от элемента $\cos 4t$ до подпространства <$\sin 5t$> в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{L_2}[-\pi,\pi]$ равно

   а) 2π, б) π, в) $\sqrt{\pi}$, г) $\sqrt{2\pi}$, д) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.
6. Выберите последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, которая может быть последовательностью коэффициентов Фурье некоторого элемента x гильбертова пространства $\boldsymbol{H}$ по ортонормированному базису

   а) $\left\{1-\cos\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$, б) $\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$, в) $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, г) $\left\{\frac{1}{ln^n 2}\right\}_{n=1}^{\infty}$, д) $\{ln^n 2\}_{n=1}^{\infty}$.
7. Норма элемента x (см. предыдущее задание) в пространстве $\boldsymbol{H}$ равна

   а) $\frac{\pi}{90}$, б) $\frac{ln2}{\sqrt{1-ln^2 2}}$, в) $\sqrt{3}$, г) $\sqrt{\frac{1}{1-ln2}}$, д) $\sqrt{\frac{ln2}{1-ln2}}$.

При постоянной тестовой проверке у студентов формируется полезная привычка читать лекции и учебно-методическую литературу, вникать в их содержание, а не обращаться к ним от случая к случаю. Студента, правильно выполнявшего тестовые задания в течение семестра, можно поощрить дополнительными рейтинговыми баллами.

Рейтинг

Программа учебной дисциплины в конце каждого семестра предусматривает промежуточную аттестацию в виде экзамена, его прохождение является обязательным для студента контрольным мероприятием. На экзамен выделяется 30 баллов из 100. Экзамен считается сданным, если за него студент получил не менее 16 баллов. Экзамен проводится в два этапа: сначала в письменной форме по билетам, утвержденным на заседании кафедры, затем в виде беседы с преподавателем. Билет состоит из двух теоретических вопросов и двух задач. По каждому из 4 заданий студент может получить максимально 5 баллов. Оставшиеся 10 баллов студент может получить при устном ответе на два дополнительных вопроса, не выходящих за рамки программы дисциплины. Полностью отказываться от устного ответа на экзамене нецелесообразно, поскольку именно в процессе беседы с преподавателем студент учится последовательно и логически излагать свои мысли и отстаивать свою точку зрения. Рейтинг студента по дисциплине за семестр определяется как сумма баллов, полученных им за все дисциплинарные модули семестра, и баллов за экзамен. Баллы за домашнее задание составляют не более 30% от баллов за модуль. Таким образом, в системе начисления баллов за отдельный модуль акцент сделан на успешную сдачу рубежного контроля. Разработана система начисления премиальных баллов за активность на занятиях и КСР [6]. Таким образом, студент может набрать за работу в семестре максимально 70 баллов и дополнительно 30 баллов по результатам промежуточной аттестации (экзамена).

Заключение

Преподавание в техническом университете такой сложной и абстрактной дисциплины как «Функциональный анализ и интегральные уравнения» требует особого методического обеспечения, включающего большое количество справочной литературы, методических пособий и указаний к решению как простейших, так и сложных задач, различных иллюстраций работы общих абстрактных принципов в конкретных и прикладных случаях, четко продуманной модульно-рейтинговой системы оценки знаний учащихся.

Список литературы

1. Власова Е.А. Ряды: учебник для вузов / под ред. Зарубина В.С., Крищенко А.П. - 3-е изд., испр. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. IX). М: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2006. 612 с.

2. Власова Е.А., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Приближенные методы математической физики: учебник для втузов / под ред. Зарубина В.С., Крищенко А.П. - 2-е изд., стер. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XIII). М: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2004. 700 с.
3. Власова Е.А., Феоктистов В.В., Чадов В.Б. Введение в прикладной функциональный анализ: учебное пособие. М: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 1994. 54 с.
4. Власова Е.А., Нараленков К.М., Пугачев О.В. Функциональный анализ: методические указания к выполнению домашнего задания. М: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2005. 64 с.
5. Власова Е.А., Красновский Е.Е., Марчевский И.К. Функциональный анализ: методические указания к практическим занятиям / под ред. Зарубина В.С. М: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2009. 77 с.
6. Власова Е.А., Красновский Е.Е. Методические рекомендации к проведению аудиторной контролируемой самостоятельной работы студентов // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. вып. 4. С. 1-10. Режим доступа: http://engjournal.ru/catalog/pedagogika/hidden/677.html (Дата обращения: 5.05.2015)