электронный научно-технический журнал
ИНЖЕНЕРНЫЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51036. ISSN 2307-0595

О методике изложения некоторых разделов комбинаторики: теория Пойа

02, февраль 2015

Белоусов А. И.[1,*]

УДК: 519.101+372.851

[1]Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
[*]al_belous@bk.ru

Введение

Данная статья продолжает цикл публикаций, начатых в статье [1] посвященных методике изложения разделов комбинаторного анализа, образующего весьма важный цикл в математической подготовке студентов программистских специальностей.

Перечислительная комбинаторика, одним из разделов которой является известная теория Пойа, является одной из наиболее трудных для понимания математических дисциплин. Тем важнее становится методическая задача построения максимально прозрачных доказательств основных положений.

В статье рассматриваются новые доказательства основной теоремы теории Пойа о структурном перечне и числе классов эквивалентности на множестве функций разметки, а также леммы Бернсайда, на которую доказательство основной теоремы существенно опирается.

В учебниках и монографиях, посвященных этим результатам, доказательства упомянутых утверждений излагаются либо очень сложно, что делает их доступными только профессионалам [2 – 4], либо не достаточно подробно, с пробелами [5]. В то же время, можно изложить их вполне прозрачно, не жертвуя строгостью, тем самым сделав их доступными пониманию студентов технического вуза, имеющих, разумеется, соответствующую подготовку.

В статье рассматриваются пересмотренные доказательства леммы Бернсайда и теоремы Пойа так, как они излагаются в курсе дискретной математики, читаемом студентам программистских специальностей. Элементы теории Пойа составляют последний раздел заключительного модуля, посвященного комбинаторному анализу, и к моменту изучения этого раздела студент владеет основами общей алгебры (теории групп, в частности, что особенно важно) и необходимыми положениями теории графов.

Излагая ниже доказательства, мы обращаем особое внимание на некоторые методические приемы, способствующие лучшему усвоению предмета, уделяя также таким деталям доказательств, которые обычно опускаются. Главная особенность предлагаемой методики – пошаговость, постепенность в изложении весьма непростых результатов, которые только таким образом можно сделать прозрачными и доступными пониманию учащихся.

1. Лемма Бернсайда

Следует напомнить предварительно основные положения, связанные с понятием действия группы на множестве.

Пусть S - непустое конечное множество, а G - действующая на нем группа, т.е. некоторая подгруппа симметрической группы S. В конечном случае это группа подстановок.

Элементы $s, s' \in S$ назовем ***эквивалентными***, если для некоторой подстановки $\sigma \in G$ выполняется $s' = \sigma(s)$.

Легко проверяется, что тем самым действительно определено отношение эквивалентности на S. Обозначим его $\tilde{G}$.

Для произвольно фиксированного $s \in S$ рассмотрим множество G_s всех подстановок в G, для которых s является неподвижной точкой, т.е. $G_s = \{\sigma : \sigma(s) = s\}$.

Докажем, что G_s - подгруппа G. Действительно, тождественная подстановка $\varepsilon \in G_s$. Далее, если $\rho, \sigma \in G_s$, то $\rho\sigma(s) = \sigma(\rho(s)) = \sigma(s) = s$, откуда $\rho\sigma \in G_s$. Наконец, при $\sigma \in G_s$ получаем: $\sigma^{-1}(s) = \sigma^{-1}(\sigma(s)) = s$, т.е. $\sigma^{-1} \in G_s$. Подгруппа G_s называется ***стабилизатором*** (или ***стационарной подгруппой***) ***элемента*** s.

При доказательстве леммы Бернсайда следует, на наш взгляд, максимально проявить связь утверждения леммы со свойствами смежных классов (в данном случае правых) подгрупп-стабилизаторов. Со свойствами смежных классов студенты знакомы из раздела общей алгебры.

Утверждение леммы Бернсайда будет выведено из доказываемых ниже двух утверждений. Разумно сначала доказать их, а потом уже получить формулу леммы Бернсайда. Тем самым доказательство леммы оказывается лучше структурированным.

Обозначим через $G(s,r)$ множество всех подстановок, переводящих s в r.

Утверждение 1. Число *всех* подстановок, которые переводят s в r, равно порядку стабилизатора элемента s, т.е., $|G(s,r)| = |G_s|$.

(Через $|A|$ обозначается число элементов конечного множества A.)

Доказательство. Определим отображение f подгруппы G_s в множество всех подстановок, переводящих s в r, следующим образом: $f(\sigma)=\sigma\sigma_r$ (для произвольной фиксированной подстановки σ_r, переводящей s в r). Легко видеть, что f инъекция ($\sigma\sigma_r=\sigma'\sigma_r$ влечет $\sigma=\sigma'$ в силу известного закона сокращения в группах). Докажем, что f сюръекция. Берем какую угодно подстановку σ' переводящую s в r; тогда ее можно представить следующим образом:

$$f(\sigma'\sigma_r^{-1})=(\sigma'\sigma_r^{-1})\sigma_r=\sigma',$$

а так как $\sigma'\sigma_r^{-1}(s)=\sigma_r^{-1}(\sigma'(s))=\sigma_r^{-1}(r)=s$, т.е. $\sigma'\sigma_r^{-1}\in G_s$, то каждая подстановка, переводящая s в r, есть образ при отображении f некоторого элемента подгруппы G_s.

Замечание. При объяснении доказанного выше утверждения можно прибегнуть к такой иллюстрирующей диаграмме:

$$\begin{tikzcd} s \arrow[r, shift left, "\sigma_r,\sigma'"] & r \arrow[l, shift left, "\sigma_r^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Подстановки σ_r и σ' переводят s в r, а подстановка σ_r^{-1} возвращает r в s, т.е. композиция $\sigma'\sigma_r^{-1}\in G_s$ (принадлежит стабилизатору s).

Итак, f биективно отображает G_s на смежный класс $G_s\sigma_r$, и каждая подстановка, переводящая s в r, есть элемент этого класса. Но, как известно из теории групп, $|G_s|=|G_s\sigma|$ (для любой подстановки σ), и $|G(s,r)|=|G_s\sigma_r|=|G_s|$.

Можно заметить, что если $r_{\tilde{G}}s$, то $|G_r|=|G_s|$, так как каждой подстановке, переводящей s в r, соответствует обратная подстановка, и $|G(s,r)|=|G(r,s)|$. Это значит, что порядки групп-стабилизаторов всех эквивалентных элементов одинаковы.

Класс эквивалентности $[s]_{\tilde{G}}$ элемента s называют ***орбитой*** этого элемента. Число элементов в орбите s будем обозначать $\omega(s)$.

Утверждение 2. Индекс $|G:G_s|$ подгруппы G_s в группе G равен числу $\omega(s)$ элементов в классе эквивалентности (орбите) $[s]_{\tilde{G}}$.

Доказательство. Индекс $|G:G_s|$ равен, как известно, числу левых (или правых) смежных классов подгруппы G_s. Множество всех правых смежных классов подгруппы G_s обозначим $C(G_s)$. Т.е. $C(G_s)=\{G_s\sigma:\sigma\in G\}$.

Определим отображение h орбиты $[s]_{\tilde{G}}$ в $C(G_s)$ следующим образом: какова бы ни была подстановка σ и вместе с ней правый смежный класс $G_s\sigma$, полагаем $h(\sigma(s))=G_s\sigma$ (тут важно подчеркнуть, что элемент $\sigma(s)$ как раз принадлежит орбите s, причем каждый элемент этой орбиты, в силу самого определения орбиты, может быть представлен таким образом). Это значит, что отображение h сразу определено как сюръективное. Но отображение h и инъективно. Действительно, пусть даны два элемента орбиты s: $r=\sigma_r(s)$ и $t=\sigma_t(s)$. Тогда при $t\neq r$ предположение $h(t)=h(r)$ влечет равенство смежных классов $G_s\sigma_r=G_s\sigma_t$, где $\sigma_t(s)=t$. Но в силу утверждения 1 каждая подстановка класса $G_s\sigma_t$ переводит s в r и, в частности, $\sigma_t(s)=r\neq t$, что невозможно. Итак, h - биекция, и $\omega(s)=|G:G_s|$.

По теореме Лагранжа получаем, что $|G|=|G:G_s||G_s|$.

Согласно утверждению 2, $|G|=\omega(s)|G_s|$, или

$$|G|=\sum_{r\in[s]_{\tilde{G}}}|G_r|,$$

так как порядки стабилизаторов всех эквивалентных элементов, т.е. всех элементов орбиты s, одинаковы.

Замечание. Соотношение $|G|=\omega(s)|G_s|$ интересно и само по себе, так как позволяет найти порядок группы G по известным порядку стабилизатора произвольно выбранного элемента s и числу элементов в орбите s. Так, в частности, можно вычислить порядок группы автоморфизмов графа. Более подробно соответствующий алгоритм описан в [6].

Пусть теперь N - число классов эквивалентности по отношению $\tilde{G}$, и $s_1,\dots,s_N$ попарно неэквивалентные представители этих классов. Тогда

$$N\cdot|G|=\omega(s_1)|G_{s_1}|+\dots+\omega(s_N)|G_{s_N}|.$$

В этой сумме суммируются порядки стабилизаторов всех элементов множества S, разбитого на классы эквивалентности, т.е. $N|G| = \sum_{s \in S} G_s$. Отсюда следует, что число классов эквивалентности по отношению $\tilde{G}$ составит $N = \frac{1}{|G|}\sum_{s \in S}|G_s|$.

Стоящая в записанном выражении сумма есть число всех элементов группы G, оставляющих неподвижным какой-либо элемент множества S. Но это же число можно получить, суммируя по всем подстановкам, оставляющим неподвижными некоторый её элемент S (в указанной выше сумме каждая подстановка учитывается столько раз, сколько элементов множества S она оставляет неподвижным). Тогда получим

$$N = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma \in G}\psi(\sigma),$$

где через $\psi(\sigma)$ обозначено число всех элементов множества S, являющихся неподвижными точками подстановки σ.

Полученный результат и есть ***лемма Бернсайда о подсчете***. Подводя итог, лемму Бернсайда можно сформулировать так:

Лемма Бернсайда. Если на множестве S действует группа G, то число N орбит, на которые разбивается множество S, составляет $N = \frac{1}{|G|}\sum_{s \in S}|G_s|$, где G_s - стабилизатор элемента s, или $N = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma \in G}\psi(\sigma)$, где $\psi(\sigma)$ есть всех элементов множества S, являющихся неподвижными точками подстановки σ.

Примеры.

1) Пусть $S = \{1,2,3,4\}$, а группа G порождается подстановками (12) и (34). Тогда $\psi(\varepsilon) = 4, \psi((12)) = \psi((34)) = 2, \psi((12)(34)) = 0$. Следовательно, $N = \frac{1}{2}(4+2+2) = 2$, орбиты (классы эквивалентности): $\{1,2\}$ и $\{3,4\}$. Стабилизаторы: $G_1 = \{\varepsilon,(34)\} = G_2, G_3 = G_4 = \{\varepsilon,(12)\}$, и по другому способу подсчета $N = \frac{1}{4}(2+2+2+2) = 2.$

Далее, пусть $\sigma_0 = (12)$, тогда все элементы, переводящие 1 в 2, суть элементы правого смежного класса $G_1(12) = \{(12),(34)(12)\}$, а $|G| = 4$ (произведение числа элементов в каждом из стабилизаторов на число классов эквивалентности, или орбит).

2) Пусть множество $S = B^A$ есть множество функций из конечного множества A в конечное множество B, G - группа, действующая на множестве A. Определим действие группы G на множестве функций S следующим образом: $\sigma(f)(a) = f(\sigma^{-1}(a))$, и эквивалентность функций f и g определим так:

$$f \underset{G}{\sim} g \Leftrightarrow g = \sigma(f)$$

для некоторой подстановки $\sigma \in G$.

Замечание. Надо заметить, что в руководствах, известных автору, никак не объясняется, почему в определении функции разметки $\sigma(f)$ фигурирует не сама подстановка σ, а обратная к ней. Более того, функция $\sigma(f)$ явно не определяется, а дается лишь определение эквивалентных функций разметки в виде: функции и называются эквивалентными, если для любого элемента $a \in A$ и некоторой подстановки $\sigma \in G$ имеет место равенство $g(a) = f(\sigma(a))$.

Представляется всё-таки, что разумно объяснить, в чем тут дело.

Пусть подстановка σ есть цикл и пусть значения функции разметки f на элементах цикла равны $r_1, r_2, ..., r_k$ соответственно. Тогда $f(\sigma(i_j)) = f(i_{j\oplus 1})$, где

$$j \oplus 1 = \begin{cases} j+1, \text{при } j < k \\ 1, \text{ при } j = k \end{cases},$$

и если положить $g(a) = f(\sigma(a))$, то вектор значений функции g на элементах цикла будет иметь вид: $(r_2, r_3, ..., r_k, r_1)$, т.е. цвета элементов сдвигаются (циклически) противоположно самим элементам. Ясно тогда, что заменяя в определении функции g подстановку σ на обратную, мы и цвета элементов и сами элементы сдвигаем одинаково. Поэтому и разумно определить действие группы на множестве функций так, как записано выше, т.е. через обратную подстановку.

Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{К, Ч\}$ (содержательно, первое множество есть множество вершин треугольника, а второе – множество «цветов», {красное, черное}).

Все 8 функций из A в B опишем в виде такой формальной суммы:

$$\underset{f_1}{(К,К,К)} + \underset{f_2}{(Ч,Ч,Ч)} + \underset{f_3}{(К,К,Ч)} + \underset{f_4}{(К,Ч,К)} +$$
$$+ \underset{f_5}{(Ч,К,К)} + \underset{f_6}{(Ч,Ч,К)} + \underset{f_7}{(Ч,К,Ч)} + \underset{f_8}{(К,Ч,Ч)}.$$

Группа G определяется как симметрическая группа степени 3, т.е. $G = S_3$. Тогда

$$G_{f_1} = G_{f_2} = G,$$

$$G_{f_3} = \{\varepsilon, (12)\} = G_{f_6}, G_{f_4} = \{\varepsilon, (13)\} = G_{f_7}, G_{f_5} = \{\varepsilon, (23)\} = G_{f_8}.$$

Тогда по лемме Бернсайда получается $N = \frac{1}{6}(6+6+12) = 4$. Слагаемое 12 получается из рассмотрения 6 стабилизаторов по 2 элемента в каждом. Классы эквивалентных функций: $\{f_1\},\{f_2\},\{f_3, f_4, f_5\},\{f_6, f_7, f_8\}$. Тогда, например, порядок группы = 6 может быть получен как произведение порядка стабилизатора G_{f_1}, равного 6, на число функций, эквивалентных f_1, т.е. единицу; или произведение порядка стабилизатора G_{f_3}, равного 2, на число функций, эквивалентных f_3, т.е. 3, и т.д. Подстановка (23) переводит функцию f_3 в функцию f_4, а все подстановки, переводящие f_3 в f_4, образуют смежный класс $G_{f_3}(23) = \{(23),(132)\}$, а подстановки, переводящие f_3 в f_5, образуют смежный класс $G_{f_3}(13) = \{(13),(123)\}$.

При анализе этого примера как раз удобно показать, почему при определении действия группы на множестве функций разметки следует использовать обратные подстановки.

Так функция $(132)(f_3)$ дает следующий вектор цветов:

$$(132)(f_3)(1) = f_3((123)(1)) = f_3(2) = К,$$
$$(132)(f_3)(2) = f_3((123)(2)) = f_3(3) = Ч,$$
$$(132)(f_3)(3) = f_3((123)(3)) = f_3(1) = К,$$

т.е., действительно $f_4 = (132)(f_3)$.

Если же использовать саму подстановку (132), а не обратную к ней (123), то получим вектор (*Ч, К, К*), т.е. функцию f_5.

Сопоставим каждой «краске» (или «цвету», т.е. элементу множества B) ***вес*** в виде рациональной переменной: $К \to r, Ч \to b$. Тогда каждой функции из S можно сопоставить вес как произведение весов ее значений. Нетрудно сообразить, что эквивалентными могут быть только функции одинакового веса (обратное неверно, как скоро будет показано!). С учетом этого описание классов эквивалентных функций данного примера может быть представлено таким полиномом: $r^3 + b^3 + r^2b + rb^2$. Здесь все функции одинакового веса оказались эквивалентными.

В последующем изложении мы обобщим результаты этого простого примера. Этот пример готовит нас к главному: рассмотрению действия некоторой группы на множестве функций разметки.

2. Функции разметки

Пусть на множестве S задана функция $f: S \to R$, отображающая S в множество ***меток*** (***красок***, ***цветов***) R. Такая функция называется ***функцией разметки***, или ***функцией раскраски*** (или просто ***раскраской***). Действие группы G на множестве S стандартным образом распространяется на множество R^S всех раскрасок: $\sigma(f)(s) = f(\sigma^{-1}(s))$ (для каждого $s \in S$). Почему именно тут вводится обратная подстановка, было разъяснено выше. Эквивалентность раскрасок f, g означает тем самым, что для некоторой подстановки σ имеет место равенство $g = \sigma(f)$, т.е. для каждого $s \in S$ выполняется $g(s) = f(\sigma^{-1}(s))$. Число классов эквивалентности на множестве раскрасок определяется по лемме Бернсайда.

Каждому элементу множества $r \in R$, называемому ***запасом*** (это, образно говоря, некое множество «красок», или «цветов») сопоставим ***вес*** $w(r)$ в виде рациональной переменной. Тогда каждой функции разметки $f \in R^S$ может быть также сопоставлен вес в виде произведения

$$w(f) = \prod_{s \in S} w(f(s)) = w(f(s_1))\ldots w(f(s_n)),$$

где мы полагаем, что $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$.

а всему множеству R^S сопоставляется так называемый ***перечень*** в виде полинома над полем рациональных чисел:

$$Invt(R^S) = \sum_{f \in R^S} w(f)$$

(обозначение *Invt* производится от английского слова inventory – перечень, инвентарь).

Можно показать, что перечень множества R^S может быть представлен также в виде:

$$Invt(R^S) = [\sum_{r \in R} w(r)]^{|S|} = (w_1 + \ldots + w_m)^n,$$

где мы полагаем, что $R = \{r_1, \ldots, r_m\}$ и через w_j обозначаем вес цвета r_j, т.е. $w_j = w(r_j),\ j = 1, \ldots, m$.

Эта сумма называется ***перечнем запаса***.

Действительно, получаем n одинаковых сомножителей, а при раскрытии скобок каждое слагаемое (произведение n сомножителей) отвечает некоторому выбору элемента запаса по номеру элемента множества S, т.е. номеру сомножителя (скобки), и, тем самым, это слагаемое есть не что иное, как вес некоторой функции разметки.

Например, при раскраске вершин квадрата двумя цветами получим

$$Invt(R^S) = (r+b)^4 = r^4 + 4r^3b + 6r^2b^2 + 4rb^3 + b^4,$$

где

$$R = \{red, blue\},\ S = \{1,2,3,4\},\ w(red) = r, w(blue) = b,$$

что отвечает всем возможным способам окраски вершин квадрата двумя цветами (красным (*red*) и голубым (*blue*)). Например, слагаемое $4r^3b$ означает, что существует четыре функции разметки, при которых три вершины покрашены в голубой, а одна – в красный цвет (что очевидно).

Нетрудно показать, что эквивалентные функции (раскраски) имеют одинаковый вес.

Действительно, если некоторая функция g эквивалентна функции f, то найдется такая подстановка σ, что $g(a) = f(\sigma^{-1}(a))$ и

$$w(g) = w(f(\sigma^{-1}(s_1))...w(f(\sigma^{-1}(s_n)).$$

Очевидно, что возникает перестановка элементов S в виде $\sigma^{-1}(s_1),...,\sigma^{-1}(s_n)$, а так как веса, как рациональные переменные, коммутируют, то записанное выше произведение совпадет с произведением

$$w(f(s_1))...w(f(s_n)) = w(f),$$

что и требовалось.

Заметим, что обратное неверно, т.е. могут быть неэквивалентные функции одинакового веса.

Наша задача состоит теперь в том, чтобы найти перечень классов эквивалентности (по отношению $\underset{G}{\sim}$) функций разметки.

3. Ступенчатые функции разметки

Рассмотрим частный случай, когда множество S разбито на подмножества $T_1,...,T_k, |T_j| = p_j, j = 1,...,k$, и все такие функции разметки, каждая из которых постоянна на любом подмножестве T_j. Вес какой-либо из таких функций может быть представлен термом $w_{i_1}^{p_1} w_{i_2}^{p_2} \dots w_{i_k}^{p_k}$, где через w_q обозначен вес «цвета» $r_q \in R$. Т.е., все элементы множества T_1 «покрашены» цветом w_{i_1} и т.д. Тогда структурный перечень множества D всех таких функций может быть представлен произведением

$$Invt(D) = \prod_{j=1}^{k} (w_1^{p_j} + \dots + w_m^{p_j}),$$

где предполагается, что $|R| = m$.

Действительно, раскрывая скобки, получим сумму термов указанного выше вида.

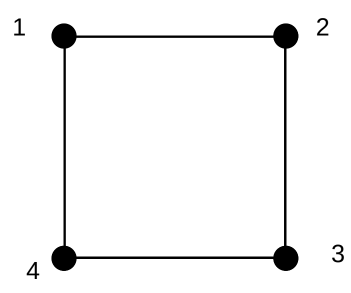
Условимся называть такие функции разметки ***ступенчатыми***.

Чтобы понять важность для дальнейшего изложения ступенчатых функций разметки, необходимо ввести понятие циклического (циклового) индекса группы подстановок.

Цикловым индексом конечной группы G называется многочлен $P_G(x_1, \dots, x_n)$ над полем рациональных чисел, построенный следующим образом: каждой подстановке $\sigma \in G$, разложенной на независимые циклы: $\sigma = \kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_{K(\sigma)}$, сопоставляется произведение (мультипликативный терм) $t_\sigma = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$, где $m_j \geq 0, j = 1, \dots, n,$ есть число всех циклов длины j в подстановке σ (предполагается, что n - наибольшая длина цикла в группе G, и, конечно, $\sum_{j=1}^{n} m_j = K(\sigma)$); тогда $P_G(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} t_\sigma$.

Понятие циклового индекса можно проиллюстрировать таким примером.

Пример. Рассмотрим группу симметрий квадрата, или, что то же самое, группу автоморфизмов графа, изображенного ниже:



Сведем построение циклового индекса этой группы в следующую таблицу:

σ	t_σ
ε=(1)(2)(3)(4)	x_1^4
(1234)	x_4
(13)(24)	x_2^2
(4321)	x_4
(12)(34)	x_2^2
(13)(2)(4)	$x_1^2 x_2$
(24)(1)(3)	$x_1^2 x_2$
(14)(23)	x_2^2

В итоге получаем цикловой индекс:

$$P_G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{8}(x_1^4 + 2x_1^2 x_2 + 3x_2^2 + 2x_4).$$

Имея в виду лемму Бернсайда, примем во внимание следующее соображение. Пусть подстановка $\sigma \in G$ разложена на независимые циклы: $\sigma = \kappa_1 \kappa_2 ... \kappa_{K(\sigma)}$. Нетрудно сообразить, что для того, чтобы цикл сохранял раскраску (т.е. оставлял ее неподвижной), необходимо и достаточно, чтобы все его элементы были одного цвета, т.е., более формально, чтобы функция разметки принимала на нем постоянное значение. Таким образом, эта функция принадлежит как раз классу ступенчатых функций.

Таким образом, каждый цикл сохраняет $|R|$ раскрасок, а вся подстановка σ сохранит $|R|^{K(\sigma)}$ раскрасок, т.е. $\psi(\sigma) = |R|^{K(\sigma)}$, причем перечень всех функций разметки, сохраняемых подстановкой σ, будет иметь вид:

$$\hat{t}_\sigma = (w_1 + ... + w_m)^{q_1} (w_1{}^2 + ... + w_m{}^2)^{q_2} ... (w_1{}^n + ... + w_m{}^n)^{q_n},$$

где q_j - число циклов длины j в разложении σ, $\sum_{j=1}^{n} q_j = K(\sigma)$.

Здесь необходимо подчеркнуть, что терм $\hat{t}_\sigma$ есть не что иное, как структурный перечень определенного множества ступенчатых функций разметки, а именно всех функций, сохраняемых подстановкой σ. Множество, на котором определены функции разметки, разбивается в данном случае на q_1 одноэлементных подмножеств (каждое из которых содержит элемент какого-то длины 1), q_2 двухэлементных подмножеств (каждое из которых содержит элементы какого-то цикла длины 2) и т.д. На каждом из этих подмножеств любая функция разметки, представленная термом $\hat{t}_\sigma$, принимает постоянное значение. Видно также, что терм $\hat{t}_\sigma$ получен из терма t_σ, слагаемого в циклическом индексе, подстановкой на место переменной x_k суммы k-х степеней весов цветов $w_1^k + \ldots + w_m^k$.

Раскрывая в терме $\hat{t}_\sigma$ скобки и приводя подобные члены с одинаковыми весами, получим выражение вида

$$\hat{t}_\sigma = \sum_w \psi_w(\sigma) w,$$

где $\psi_w(\sigma)$ - число функций веса w, сохраняемых подстановкой σ, а сумма берется по весам всех функций (но отличными от нуля будут только те слагаемые, которые отвечают функциям, сохраняемым подстановкой σ).

В этом месте разумно привести пример.

Пример. Пусть $\sigma = (13)(2)(4) \in S_4$, число цветов $m = 2, w_1 = r, w_2 = b$, то

$$t_\sigma = x_1^2 x_2, \text{ а } \hat{t}_\sigma = (r+b)^2(r^2+b^2) = r^4 + 2r^3b + 2r^2b^2 + 2rb^3 + b^4,$$

что означает, что среди всех функций, сохраняемых подстановкой σ, по одной, принимающих постоянное значение, по две, которые красят три элемента одним цветом, а четвертый – другим, и две функции, распределяющие краски по две.

Следует заметить также, что, подставив в терм t_σ вместо каждой переменной число цветов m, получим $m^{K(\sigma)}$, что равно записанному выше числу $\psi(\sigma)$ функций, сохраняемых подстановкой σ.

4. Теорема Пойа

Под ***структурным перечнем классов эквивалентности функций разметки*** (или ***перечнем классов эквивалентности раскрасок***, ***перечнем попарно неэквивалентых раскрасок***) будем называть сумму

$$Invt(C) = \sum_w \alpha_w w,$$

где суммирование ведется по весам всех функций, причем коэффициент α_w показывает, сколько имеется попарно неэквивалентных функций веса w (или, что то же самое, сколько классов эквивалентности покрывают функции данного веса).

Основной результат (***теорема Пойа***) состоит в следующем:

Теорема. Перечень классов эквивалентности функций разметки равен

$$P_G\Big(\sum_{r\in R} w(r), \sum_{r\in R}[w(r)]^2, \ldots, \sum_{r\in R}[w(r)]^n\Big).$$

Число неэквивалентных функций разметки составляет

$$P_G(|R|, |R|, \ldots, |R|).$$

Доказательство. После проведенного выше анализа структуры терма $\hat{t}_\sigma$ остается доказать уже немного.

Ясно, что указанная в условии теоремы первая подстановка в циклический индекс группы даст $\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\hat{t}_\sigma$.

Тогда, вторая подстановка в циклический индекс даст $\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}m^{K(\sigma)}$, но число $m^{K(\sigma)}$, как уже было замечено, составляет число функций, сохраняемых подстановкой σ, т.е. равно $\psi(\sigma)$. По лемме Бернсайда получаем число классов эквивалентности на множестве функций разметки.

Далее, преобразуя терм $\hat{t}_\sigma$ к сумме по весам функций (см. выше), получим

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\hat{t}_\sigma = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\sum_{w}\psi_w(\sigma)w.$$

Меняя порядок суммирования, получим

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\hat{t}_\sigma = \sum_{w}(\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\psi_w(\sigma))w.$$

Докажем теперь, что коэффициент при весе w есть не что иное, как число классов эквивалентности на множестве функций этого веса. Действительно, так как все эквивалентные функции, как было замечено ранее, имеют одинаковый вес, то группа, действуя на подмножестве функций разметки заданного веса, не выводит за пределы этого подмножества. Тогда мы попадаем в условия применимости леммы Бернсайда к действию группы именно на подмножестве функций заданного веса, и указанный коэффициент действительно дает, в силу доказанной в лемме формулы, число классов эквивалентности на множестве функций этого веса. Следовательно, полученное выражение является структурным перечнем этих классов.

Теорема доказана.

Замечание. То, что в приведенных выше выкладках можно изменить порядок суммирования, рекомендуется показать студентам, расписав обе суммы явно.

А именно, пусть L - число весов, а K - порядок группы G. Тогда записанную выше двойную сумму (без учета множителя $\frac{1}{|G|}$) можно представить так:

$$((\psi_{w_1}(\sigma_1)w_1+\ldots+\psi_{w_L}(\sigma_1)w_L))+\ldots+((\psi_{w_1}(\sigma_K)w_1+\ldots+\psi_{w_L}(\sigma_K)w_L))=$$
$$((\psi_{w_1}(\sigma_1)+\ldots+\psi_{w_1}(\sigma_K))w_1+\ldots+((\psi_{w_L}(\sigma_1)+\ldots+\psi_{w_L}(\sigma_K))w_L$$

Таким образом, наглядно демонстрируется простая перегруппировка слагаемых.

Подчеркнем также, что очень важно обратить внимание студентов на замкнутость подмножества функций фиксированного веса относительно действия группы в заключении доказательства.

Пример. Для перечня неэквивалентных двухцветных раскрасок квадрата тогда имеем:

$$\frac{1}{8}[(r+b)^4+2(r+b)^2(r^2+b^2)+3(r^2+b^2)^2+2(r^4+b^4)]=$$
$$=r^4+r^3b+2r^2b^2+rb^3+b^4.$$

Общее число таких раскрасок составит 6=1+1+2+1+1. Это число может быть получено и подстановкой 2 на место каждой переменной циклового индекса.

Заключение

В статье рассмотрена методика изложения основ теории Пойа для студентов программистских специальностей. Суть методики, по которой в МГТУ им. Н.Э. Баумана читается раздел «Комбинаторика» в курсе дискретной математики, состоит в пересмотренном и существенно упрощенном доказательстве основной теоремы (теоремы Пойа). Кроме этого, по-другому (по сравнению с известными руководствами) изложено доказательство леммы Бернсайда. В этом доказательстве максимально проявлена структура смежных классов группы, действующей на основном множестве. Также особое внимание уделено специальному классу функций разметки, названных ступенчатыми. Именно анализ структуры таких функций позволил детализировать и вместе с этим упростить и сделать максимально прозрачным доказательство основной теоремы.

Преимущество предложенной методики как раз в том и состоит, что все доказательства излагаются подробно, пошагово, что облегчает их понимание студентами технического вуза.

Список литературы

1. Белоусов А.И. О методике изложения некоторых разделов комбинаторики: линейные рекуррентные соотношения // Инженерный вестник: электронный научно-технический журнал МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014, №11. Режим доступа: http://engbul.bmstu.ru/doc/751496.html (дата обращения: 12.01.15)
2. В.Н. Сачков. Введение в комбинаторные методы дискретной математики.- 2-е изд., испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2004. – 424 с.
3. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции. / пер. с англ. М. А. Всемирнова, Д. М. Лебединского, Н. В. Цилевич – М.: Мир, 2005. – 767 с.
4. Де Брейн Н. Дж. Теория перечисления Пойа // Прикладная комбинаторная математика: сб. статей /под ред. Э. Баккенбаха. М.: Мир, 1968. С. 61 – 106.
5. Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика: пер. с англ. М.: Изд. дом «Вильямс», 2003. – 960 с.

6. Белоусов А.И., Власов П.А. Элементы комбинаторики: метод. указания к выполнению домашнего задания. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 53 с.