

Справочный материал к определению перемещений с помощью интеграла Мора

01, март 2019

Компаниец И.В.

УДК 539.384.2

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

igor.komp.s@yandex.ru

Введение

Студенты используют способ Верещагина вычисления интеграла Мора при выполнении домашних заданий для определения перемещений (линейных, угловых, взаимных линейных и взаимных угловых) и для определения коэффициентов канонических уравнений метода сил. Способ Верещагина описан, например, в очень известном учебнике [1].

«Если эпюра M_x сложная, то ее можно “расслоить”, т.е. разбить на такие фигуры, для которых известна величина площади и положение центра тяжести этой площади. Это, например, прямоугольник, треугольник и некоторые другие фигуры» [2]. «Некоторые другие фигуры» – это параболический сегмент и параболический треугольник. В этой же работе «приведено подробное разъяснение, почему горбушка, расположенная на эпюре наклонно, в расчетах считается расположенной горизонтально».

Заметим, что очень часто на лекциях, на семинарах, в различных источниках употребляют термин «горбушка» вместо термина «параболический сегмент». Далее в этой работе будем употреблять научный термин «параболический сегмент».

Освоив «расслоение» эпюр, студенты постоянно спрашивают, откуда в формулах для определения площадей параболического сегмента и параболического треугольника коэффициенты $2/3$ и $1/3$ соответственно и как определено положение центра тяжести параболического треугольника. При выполнении домашних заданий на первых порах возникают сложности, связанные с тем, как правильно применить табличные значения для указанных фигур, то есть какую длину L подставлять в формулы, когда можно применять формулу для площади параболического треугольника и где расположен его центр тяжести.

При подготовке автора к занятиям по курсам «Сопротивление материалов» и «Прикладная механика», на которых планировалось рассмотреть способ Верещагина вычисления интеграла Мора, возник вопрос: «А как в учебной литературе выведены формулы для определения площадей параболического сегмента и параболического треугольника, а также как определяют координаты их центров тяжести?».

Выяснилось, что выводы формул для определения площадей обеих фигур, а также определение положения центра тяжести параболического треугольника во многих учебниках и в курсах «Соппротивление материалов» и «Прикладная механика» не приведены. Тогда автор рассмотрел этот вопрос, самостоятельно сделав все выводы, и теперь хотел бы поделиться ими. Именно в этом состоит актуальность данной работы.

Рассмотрена ли обсуждаемая тема в учебной литературе, известной широкому кругу студентов? В таком оригинальном и доступном виде, с современными требованиями к обозначениям, как сделал это автор, нет. Например, в работе [3] есть вывод формул для половины параболического сегмента и параболического треугольника, а табличные значения получены как частные случаи нагружения балок распределенной нагрузкой и сосредоточенной силой. Отметим далее, что в работе [4] есть вывод формул для параболического сегмента, но и там табличные значения получены из анализа нагружения участка балки не только распределенной нагрузкой. В источнике [5] для площади, «ограниченной осью z , вертикальной прямой $z = a$ и параболой n -й степени», приведены в общем виде формулы для определения величины площади и положения центра тяжести фигуры (вершиной параболы является начало координат).

В учебнике [6] по курсу «Теоретическая механика» выведена формула для площади параболического треугольника и определены координаты центра тяжести фигуры. Но не все студенты изучают курс «Теоретическая механика», и маловероятно, что, изучая курсы «Соппротивление материалов» и «Прикладная механика», кто-нибудь из них догадается и будет искать ответы в материалах курса «Теоретическая механика» и сумеет найти именно этот учебник. Наконец, в учебнике [7] обсуждаемый вопрос рассмотрен, но менее подробно и не так, как это сделано в данной работе. Кроме того, очень хорошие учебники [6] и [7], к сожалению, не всегда и не везде включены в список основной литературы при изучении курсов «Соппротивление материалов» и «Прикладная механика».

Цель данной работы – изложить для студентов и предложить преподавателям для использования на практике оригинальные выводы, изучив которые, студенты смогут лучше запомнить формулы, понять их структуру и будут понимать, как их применять. Кроме того, будет полезно закрепить пройденный материал.

Автор убежден, что приведенные оригинальные выводы формул наиболее понятны студентам.

Новизна состоит в методике изложения оригинальных выводов упомянутых формул, детальном анализе структуры формул, использовании современных обозначений. Причем выводы формул для определения площадей упомянутых фигур выполнены двумя способами – без использования материалов темы «Изгиб» и с их использованием. Это тоже может быть полезно и интересно.

1. Обоснование формул для определения площадей параболического сегмента и параболического треугольника, а также координаты z_c центра тяжести параболического треугольника без использования материалов темы «Изгиб»

Рассмотрим параболический сегмент длиной L и высотой H (рис. 1). Заметим, что мы пока не говорим о «природе» параболы, то есть о том, что эпюра изгибающих моментов в двухопорной балке, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q , изображается параболой.

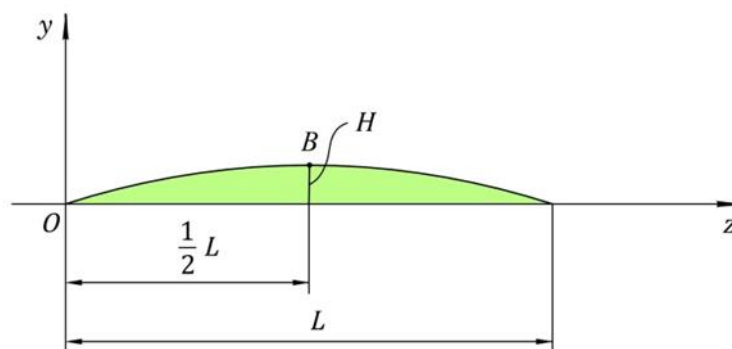


Рис. 1. Параболический сегмент

Составим уравнение параболы в выбранной системе координат, учитывая, что вершиной параболы является точка $B(L/2; H)$:

$$y = 4H \frac{z}{L} \left(1 - \frac{z}{L}\right).$$

Введем масштабированную координату $\xi = z/L$, причем $0 \leq \xi \leq 1$. Тогда

$$y = 4H\xi(1 - \xi).$$

Определяем площадь:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 y L d\xi = \int_0^1 4H\xi(1 - \xi)L d\xi = 4HL \int_0^1 \xi(1 - \xi) d\xi = 4HL \int_0^1 (\xi - \xi^2) d\xi = \\ &= 4HL \left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 4HL \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = 4HL \frac{1}{6} = \frac{2}{3} LH. \end{aligned}$$

Итак, площадь параболического сегмента длиной L и высотой H

$$A = \frac{2}{3} LH.$$

Очевидно, что центр тяжести параболического сегмента расположен на оси симметрии фигуры на расстоянии $L/2$ от начала координат.

Рассмотрим далее параболический треугольник длиной L и высотой H (рис. 2).

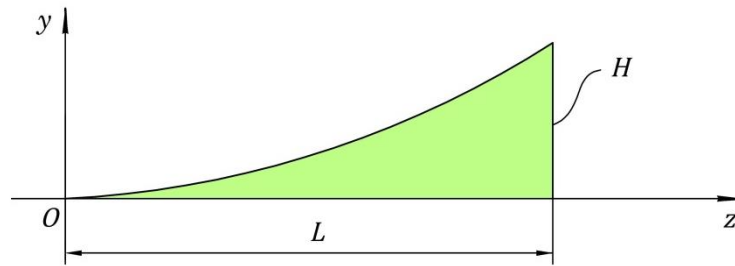


Рис. 2. Параболический треугольник

Составим уравнение параболы в выбранной системе координат, учитывая, что вершиной параболы в данном случае является начало координат:

$$y = H \left(\frac{z}{L} \right)^2.$$

Введем масштабированную координату $\xi = z/L$, причем $0 \leq \xi \leq 1$. Тогда

$$y = H\xi^2.$$

Определяем площадь:

$$A = \int_0^1 y L d\xi = \int_0^1 H \xi^2 L d\xi = HL \left. \frac{\xi^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3} LH.$$

Таким образом площадь параболического треугольника длиной L и высотой H

$$A = \frac{1}{3} LH.$$

Для определения координаты z_C центра тяжести рассматриваемой площади (рис. 3) от вершины параболы, которая находится в начале координат, следует сначала рассчитать статический момент площади фигуры относительно оси y .

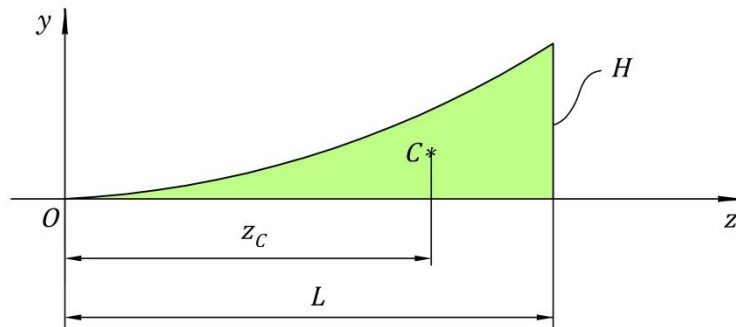


Рис. 3. Координата z_C центра тяжести рассматриваемой площади

Рассчитываем статический момент площади фигуры относительно оси y :

$$S_y = \int_0^1 y L \xi L d\xi = \int_0^1 H \xi^2 L \xi L d\xi = HL^2 \int_0^1 \xi^3 d\xi = HL^2 \left. \frac{\xi^4}{4} \right|_0^1 = \frac{1}{4} HL^2.$$

Определяем z_C :

$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{1}{4}HL^2}{\frac{1}{3}LH} = \frac{3}{4}L.$$

Заметим, что и в этом случае мы не говорим о «природе» параболы.

Далее покажем, что к тем же самым результатам можно прийти другим путем, используя знания, полученные при изучении темы «Изгиб».

2. Определение площади и координаты центра тяжести параболического сегмента с использованием материалов темы «Изгиб»

Пусть даны три двухопорные балки, нагруженные равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q (рис. 4).

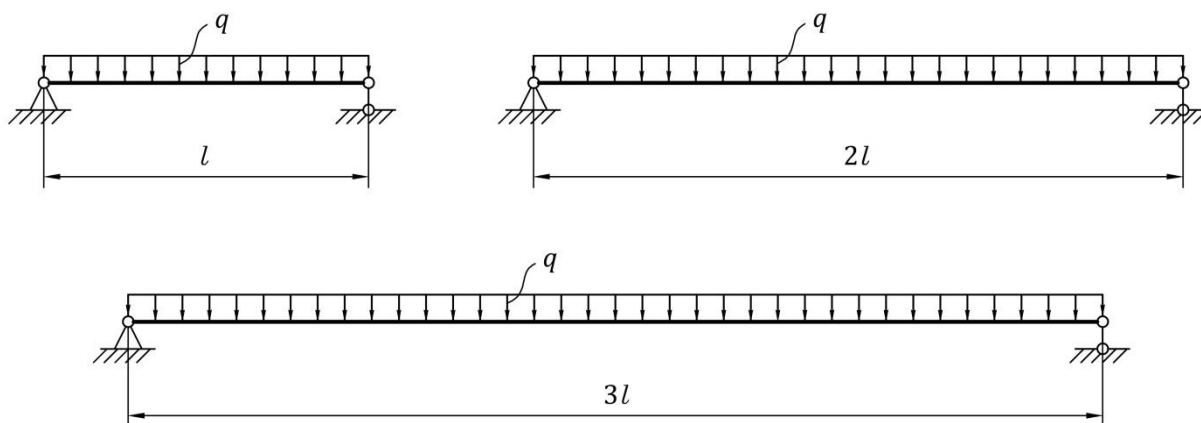


Рис. 4. Три двухопорные балки, нагруженные равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q

Выведем в общем виде формулу для определения площадей эпюр изгибающих моментов в этих балках. Для этого введем коэффициент k и запишем длины балок в виде kl . Тогда для балок, имеющих длины l , $2l$ и $3l$, коэффициент k соответственно будет принимать значения 1, 2 и 3. Теперь рассматриваем балку длиной kl (рис. 5).

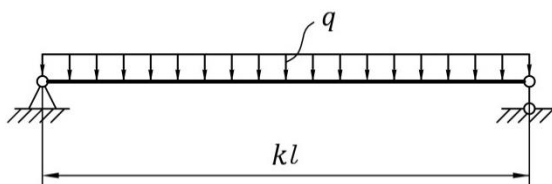


Рис. 5. Двухопорная балка длиной kl с равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q

На рис. 6 изображены балка с заданной нагрузкой и реакции опор. Горизонтальная реакция опоры слева равна нулю, так как в горизонтальном направлении нагрузка к системе не приложена.

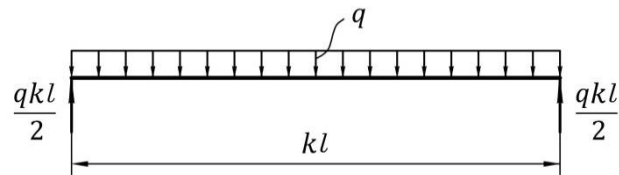


Рис. 6. Балка длиной kl с равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q и реакциями опор

Воспользуемся методом сечений. Рассекаем мысленно балку на две части и рассматриваем равновесие левой отсеченной части, приложив в месте разреза внутренние силовые факторы согласно правилу знаков (рис. 7). Отметим, что $0 \leq z \leq kl$.

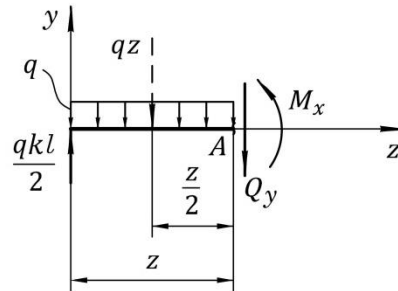


Рис. 7. Левая отсеченная часть балки и действующая на нее нагрузка

Составляем уравнения равновесия для левой отсеченной части и определяем Q_y и M_x .

Определяем Q_y :

$$\sum_{i=1}^N F_{iy} = 0; \quad \frac{qkl}{2} - qz - Q_y = 0; \quad Q_y = -qz + \frac{qkl}{2}.$$

Получаем линейную функцию. График линейной функции – прямая. Эпюру поперечных сил строим, вычислив значения функции Q_y на границах участка. При $z = 0$ $Q_y = qkl/2$, а при $z = kl$ $Q_y = -qkl/2$.

Определяем M_x :

$$\sum_{i=1}^N M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad -\frac{qkl}{2} \cdot z + qz \cdot \frac{z}{2} + M_x = 0; \quad M_x = -\frac{qz^2}{2} + \frac{qkl}{2}z.$$

Получаем квадратичную функцию. График квадратичной функции – парабола. Для построения эпюры изгибающих моментов нужно найти значения функции M_x на границах участка и в том сечении, где у функции M_x экстремум. При $z = 0$ $M_x = 0$ и при $z = kl$ $M_x = 0$.

Находим производную функции M_x по координате z :

$$\frac{dM_x}{dz} = -qz + \frac{qkl}{2}.$$

Приравниваем производную функции M_x по координате z нулю и определяем положение экстремума:

$$-qz^* + \frac{qkl}{2} = 0; \quad z^* = \frac{kl}{2}.$$

Определяем экстремум функции M_x :

$$z^* = \frac{kl}{2}; M_x = -\frac{q\left(\frac{kl}{2}\right)^2}{2} + \frac{qkl}{2} \cdot \frac{kl}{2} = \frac{qk^2l^2}{8}.$$

Продолжаем исследование функции M_x и находим вторую производную функции M_x по координате z :

$$\frac{d^2M_x}{dz^2} = -q; \frac{d^2M_x}{dz^2} < 0.$$

В выбранной системе координат парабола направлена выпуклостью вверх.

Обратим внимание, что

$$\frac{dM_x}{dz} = -qz + \frac{qkl}{2} \text{ и } Q_y = -qz + \frac{qkl}{2},$$

то есть дифференциальная зависимость $dM_x/dz = Q_y$ при прямом поперечном изгибе соблюдена. Строим эпюры Q_y и M_x (рис. 8).

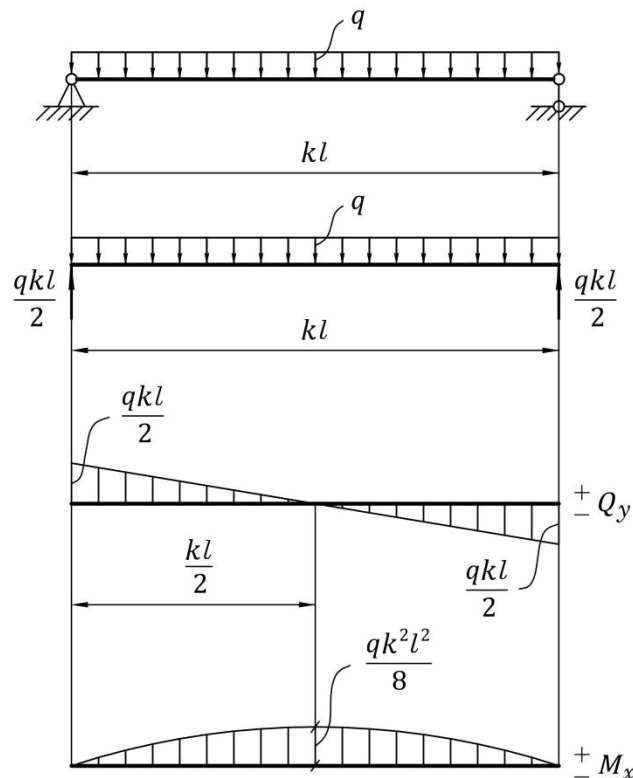


Рис. 8. Рассматриваемая балка, эпюры Q_y и M_x

На рис. 9 показан параболический сегмент, площадь которого нужно найти.

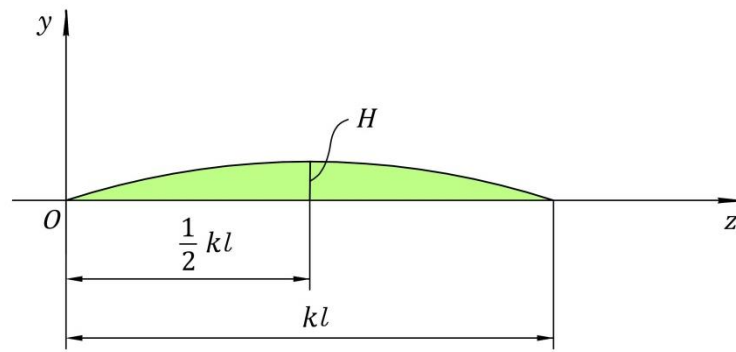


Рис. 9. Рассматриваемый параболический сегмент

Определяем площадь:

$$A = \int_0^{kl} \left(\frac{qkl}{2} \cdot z - \frac{qz^2}{2} \right) dz = \left(\frac{qkl}{2} \cdot \frac{z^2}{2} - \frac{qz^3}{2 \cdot 3} \right) \Big|_0^{kl} = \frac{qkl}{2} \cdot \frac{(kl)^2}{2} - \frac{q(kl)^3}{2 \cdot 3} =$$

$$= qk^3 l^3 \left(\frac{1}{2 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) = qk^3 l^3 \left(\frac{3}{2 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 2} \right) = \frac{qk^3 l^3}{12}.$$

Выше мы нашли экстремум функции M_x , а на рис. 9 ему соответствует H , то есть

$$H = \frac{qk^2 l^2}{8}.$$

И вот, наконец, мы увидим, откуда в формуле для площади параболического сегмента появляется коэффициент $2/3$. Разделим выражение для определения площади параболического сегмента на выражение для определения его высоты:

$$\frac{A}{H} = \frac{\frac{qk^3 l^3}{12}}{\frac{qk^2 l^2}{8}} = \frac{8}{12} kl = \frac{2}{3} kl.$$

Получаем, что площадь параболического сегмента равна

$$A = \frac{qk^3 l^3}{12} = \frac{2}{3} kl \frac{qk^2 l^2}{8} = \frac{2}{3} kl \frac{q(kl)^2}{8}.$$

Обозначаем kl через L и получаем:

$$H = \frac{qk^2 l^2}{8} = \frac{q(kl)^2}{8} = \frac{qL^2}{8};$$

$$A = \frac{2}{3} LH.$$

Чтобы воспользоваться выведенными формулами для балок, имеющих длины l , $2l$ и $3l$ (рис. 4), нужно в формулы для определения A и H подставить вместо L соответствующие длины.

Тогда для двухопорной балки длиной l , нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q ,

$$H = \frac{ql^2}{8};$$

$$A = \frac{2}{3} \cdot l \cdot \frac{ql^2}{8}.$$

Для двухопорной балки длиной $2l$, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q ,

$$H = \frac{q(2l)^2}{8} = \frac{ql^2}{2};$$

$$A = \frac{2}{3} \cdot 2l \cdot \frac{ql^2}{2}.$$

Для двухопорной балки длиной $3l$, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q ,

$$H = \frac{q(3l)^2}{8} = \frac{9}{8}ql^2;$$

$$A = \frac{2}{3} \cdot 3l \cdot \frac{9}{8}ql^2.$$

Длина участка указана на расчетной схеме и нужно просто подставить ее в формулы для определения A и H . А вот высоты H для двухопорной балки длиной l и для двухопорной балки длиной $2l$ рекомендуем выучить, так как эти значения часто встречаются в задачах при определении перемещений с помощью способа Верещагина вычисления интеграла Мора.

Центр тяжести C параболического сегмента расположен на оси симметрии фигуры, координата z_C центра тяжести рассматриваемой площади указана на рис. 10.

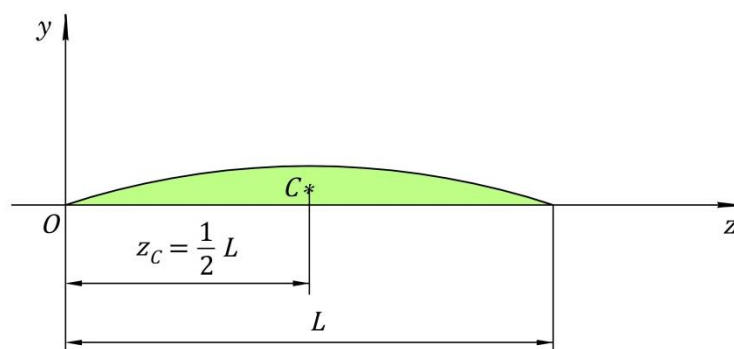


Рис. 10. Положение центра тяжести параболического сегмента

3. Определение площади и координаты центра тяжести параболического треугольника с использованием материалов темы «Изгиб»

Теперь по аналогии рассматриваем консоль длиной kl , нагруженную равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q (рис. 11).

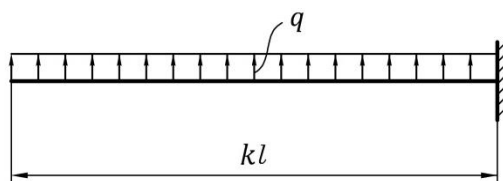


Рис. 11. Консоль длиной kl с равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q

В данном случае реакции опоры можно не определять. Имеем один участок с постоянной внешней нагрузкой. Воспользуемся методом сечений. Рассекаем мысленно балку на две части и рассматриваем равновесие левой отсеченной части, приложив в месте разреза внутренние силовые факторы согласно правилу знаков (рис. 12). Отметим, что $0 \leq z \leq kl$.

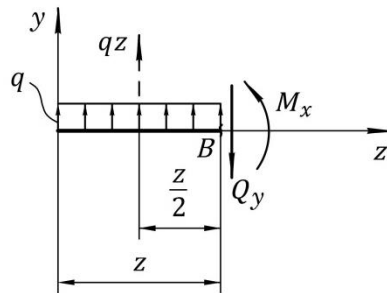


Рис. 12. Левая отсеченная часть балки и действующая на нее нагрузка

Равновесие правой отсеченной части рассматривать нельзя, так как реакции опоры мы не определяли, и нет возможности правильно составить уравнения равновесия.

Составляем уравнения равновесия для левой отсеченной части и определяем Q_y и M_x .

Определяем Q_y :

$$\sum_{i=1}^N F_{iy} = 0; \quad qz - Q_y = 0; \quad Q_y = qz.$$

Получаем линейную функцию. График линейной функции – прямая. Эпюру поперечных сил строим, вычислив значения функции Q_y на границах участка. При $z = 0$ $Q_y = 0$, а при $z = kl$ $Q_y = qkl$.

Определяем M_x :

$$\sum_{i=1}^N M_B(\bar{F}_i) = 0; \quad -qz \cdot \frac{z}{2} + M_x = 0; \quad M_x = \frac{qz^2}{2}.$$

Получаем квадратичную функцию. График квадратичной функции – парабола. Для построения эпюры изгибающих моментов нужно найти значения функции M_x на границах участка и в том сечении, где у функции M_x экстремум. При $z = 0$ $M_x = 0$, а при $z = kl$ $M_x = qk^2l^2/2$.

Находим производную функции M_x по координате z :

$$\frac{dM_x}{dz} = qz.$$

Приравниваем производную функции M_x по координате z нулю и определяем положение экстремума:

$$qz^* = 0; \quad z^* = 0.$$

Определяем экстремум функции M_x :

$$z^* = 0; \quad M_x = 0.$$

Продолжаем исследование функции M_x и находим вторую производную функции M_x по координате z :

$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = q; \quad \frac{d^2 M_x}{dz^2} > 0.$$

В выбранной системе координат парабола направлена выпуклостью вниз.

Дифференциальная зависимость $dM_x/dz = Q_y$ при прямом поперечном изгибе соблюдена:

$$\frac{dM_x}{dz} = qz \text{ и } Q_y = qz.$$

Строим эпюры Q_y и M_x (рис. 13).

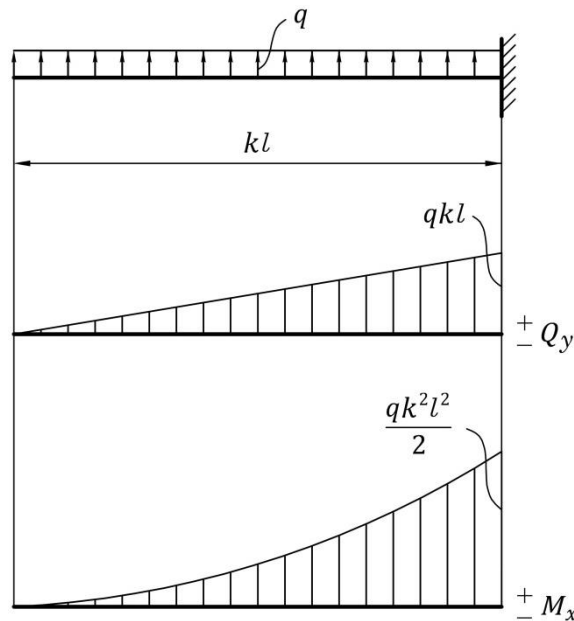


Рис. 13. Консоль с заданной нагрузкой, эпюры Q_y и M_x

На рис. 14 показан параболический треугольник, площадь которого нужно найти.

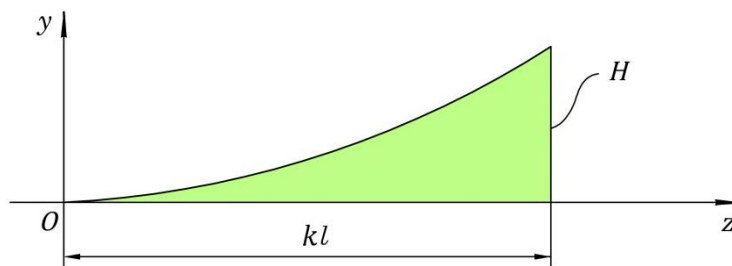


Рис. 14. Рассматриваемый параболический треугольник

Определяем площадь:

$$A = \int_0^{kl} \frac{qz^2}{2} dz = \left. \frac{qz^3}{6} \right|_0^{kl} = \frac{q(kl)^3}{6} = \frac{qk^3l^3}{6}.$$

Выше мы нашли, что при $z = kl$ значение функции M_x равно $qk^2l^2/2$, а на рис. 14 оно обозначено H . Таким образом,

$$H = \frac{qk^2l^2}{2}.$$

Посмотрим, откуда в формуле для площади параболического треугольника появляется коэффициент $1/3$. Разделим выражение для определения площади параболического треугольника на выражение для определения его высоты:

$$\frac{A}{H} = \frac{\frac{qk^3l^3}{6}}{\frac{qk^2l^2}{2}} = \frac{2}{6}kl = \frac{1}{3}kl.$$

Получаем, что площадь параболического треугольника равна

$$A = \frac{qk^3l^3}{6} = \frac{1}{3}kl \frac{qk^2l^2}{2} = \frac{1}{3}kl \frac{q(kl)^2}{2}.$$

Обозначаем kl через L и получаем:

$$H = \frac{qk^2l^2}{2} = \frac{q(kl)^2}{2} = \frac{qL^2}{2};$$

$$A = \frac{1}{3}LH.$$

Чтобы воспользоваться выведенными формулами для консолей, показанных на рис. 15, нужно в формулы для определения A и H подставить вместо L соответствующие длины.

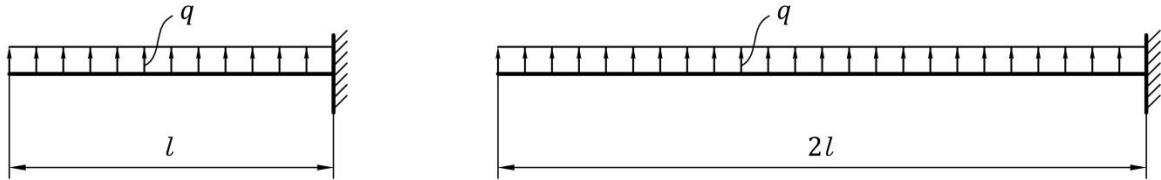


Рис. 15. Две консоли, нагруженные равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q

Для консоли длиной l , нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q ,

$$H = \frac{ql^2}{2};$$

$$A = \frac{1}{3} \cdot l \cdot \frac{ql^2}{2}.$$

Для консоли длиной $2l$, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q ,

$$H = \frac{q(2l)^2}{2} = 2ql^2;$$

$$A = \frac{1}{3} \cdot 2l \cdot 2ql^2.$$

Длина участка указана на расчетной схеме и нужно подставить ее в формулы для определения A и H . Высоты H для консоли длиной l и для консоли длиной $2l$ рекоменду-

ем выучить, так как эти значения часто встречаются в задачах при определении перемещений с помощью способа Верещагина вычисления интеграла Мора.

Для определения координаты z_C центра тяжести рассматриваемой площади от вершины параболы, которая находится в начале координат, следует сначала рассчитать статический момент площади фигуры относительно оси y (рис. 16).

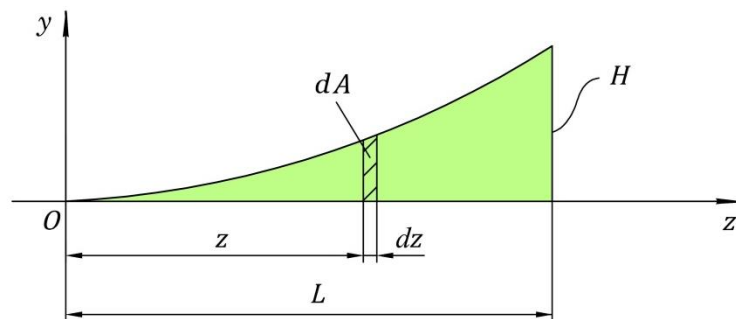


Рис. 16. Рисунок для расчета статического момента площади параболического треугольника

Рассчитываем статический момент площади фигуры относительно оси y :

$$S_y = \int_0^L z dA = \int_0^L z \frac{qz^2}{2} dz = \frac{qz^4}{8} \Big|_0^L = \frac{qL^4}{8}.$$

Определяем z_C :

$$z_C = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{qL^4}{8}}{\frac{1}{3}LH} = \frac{\frac{qL^4}{8}}{\frac{1}{3}L \frac{qL^2}{2}} = \frac{3}{4}L.$$

На рис. 17 показано положение центра тяжести C параболического треугольника.

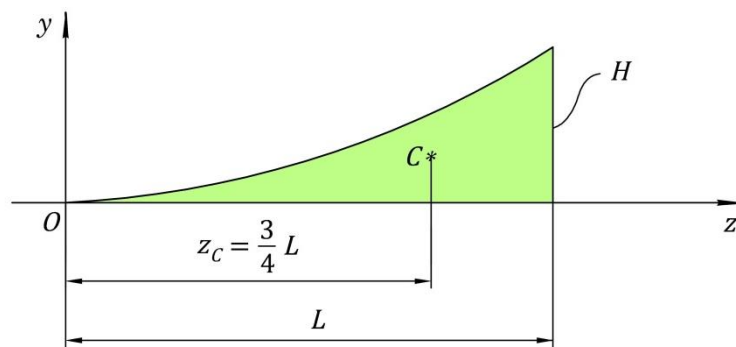


Рис. 17. Положение центра тяжести параболического треугольника

При выводе формул для параболического треугольника мы исходили из схем, показанных на рис. 11 и на рис. 12, и получили, что на левом конце консоли поперечная сила равна нулю и здесь же расположен экстремум параболы на эпюре изгибающих моментов. Только в таком случае можно пользоваться выведенными формулами для параболического треугольника.

Заключение

1. В данной работе двумя способами подробно выведены формулы для определения площадей параболического сегмента и параболического треугольника, выяснена их структура, показаны схемы, из которых исходили при выводе. Определены координаты z_c центров тяжести этих фигур.

2. Подробно рассмотрено построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов в двухопорной балке и в консоли, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q . Это повторение пройденного материала с использованием грамотно составленных схем, современной терминологии и обозначений, поэтому оно является весьма полезным.

3. Изучив материал данной работы, студенты смогут уверенно и правильно применять выведенные формулы при практическом применении способа Верещагина вычисления интеграла Мора.

4. Можно предложить студентам изучить изложенный материал не обязательно в рассмотренном виде, а с помощью рабочих листов. Автор предлагает организовать изучение изложенного материала в рамках внеаудиторной самостоятельной работы студентов и считает, что статья может быть интересна и полезна студентам, которые изучают курсы «Сопротивление материалов» и «Прикладная механика». «Никакие знания, не подкрепленные самостоятельной деятельностью, не могут стать подлинным достоянием человека» [8]. Связь между самостоятельной работой студента и его мотивацией рассматривается в работах [9] и [10]. «Выработать у студентов столь необходимую мотивацию к обучению, большую восприимчивость к теории возможно только при освоении ее через практику» [9].

Список литературы

- [1]. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов: учебник для вузов. 16-е изд., испр. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2016. 543 с.
- [2]. Андриевская С. И., Компаниец И. В. Способ Верещагина для определения перемещений // Инженерный вестник. Электронный научно-технический журнал. 2018. № 1. Режим доступа: <http://ainjournal.ru/doc/864075.html> (дата обращения 05.01.2019).
- [3]. Алексеев А. А., Алексеева Е. Г., Ведерников В. Н., Гульятеев В. И. К вопросу об определении перемещений методом Мора и введении уточняющих коэффициентов при перемножении эпюр // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2016. № 3 (29). С. 50–59.
- [4]. Казарновский М. С. Определение перемещений в балках и рамах по способу Верещагина: метод. разработка для студентов специальностей: 1102, 1104, 1111, 0568, 0570, 0308, 0639 / Министерство высшего и среднего специального образования СССР, Московский текстильный институт. Кафедра сопротивления материалов. М.: Изд-во МТИ, 1971. 53 с.

- [5]. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К., Макушин В. М., Малинин Н. Н., Феодосьев В. И. Расчеты на прочность в машиностроении. В 3 т. Т. 1. Теоретические основы и экспериментальные методы. Расчеты стержневых элементов конструкций при статической нагрузке / под редакцией д-ра техн. наук проф. С. Д. Пономарева. М.: Машгиз, 1956. 884 с.
- [6]. Сорокин В. Н. Краткий курс теоретической механики: учебник. В 3 ч. Ч. 1. Раздел «Статика» в теории, задачах и плакатах. Уфа: Изд-во УГНТУ, 2003. 122 с.
- [7]. Беляев Н. М. Сопротивление материалов. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1976. 608 с.
- [8]. Ситникова М. А. Самостоятельная работа студентов: учебно-методическое пособие. Чебоксары: Новое Время, 2014. 192 с.
- [9]. Назарова И. Р. Мотивационный потенциал самостоятельной работы студентов // Инженерный вестник. Электронный научно-технический журнал. 2014. № 5. Режим доступа: <http://ainjournal.ru/doc/711682.html> (дата обращения 19.08.2018).
- [10]. Дулин Ю. Н. Самостоятельная работа студентов. Методические рекомендации. СПб.: Изд-во РГПУ имени А. И. Герцена, 2015. 32 с.