

Практическое применение способа Верещагина

02, июнь 2018

Андриевская С. И. ^{*}, Компаниец И. В. ^{**}

УДК: 539.384.2

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

^{*}steandr2@mail.ru

^{**}igor.komp.s@yandex.ru

Введение

«Для многих машиностроительных конструкций существенную роль играет так называемый расчет на жесткость. Задача этого расчета – обеспечить конструкции необходимую жесткость, т.е. ограничить упругие перемещения деталей, обусловленные их деформацией, определенными пределами, зависящими от назначения и условий работы конструкции. Повседневная практика и анализ работы многих выполненных конструкций показывают безусловную необходимость подобного рода расчетов» [1].

Особенно актуален расчет по определению перемещений для элементов конструкций в виде балок, работающих на изгиб. Именно для балок при их изгибе рассматриваются примеры в данной работе.

Определение перемещений с помощью способа Верещагина описано в различных учебных изданиях, например, в [2-4]. В работе [5] также есть примеры определения перемещений этим способом. В ходе нескольких лабораторных работ, описанных в [6], способ Верещагина используется для определения перемещений. Таким образом, способ Верещагина активно используется в процессе инженерного образования. Несмотря на то, что в работах [2] и [4] хорошо изложена последовательность действий при определении перемещений с помощью способа Верещагина, в данной статье приведены примеры, после рассмотрения которых освоить данную тему будет значительно проще.

Для определения перемещений с помощью способа Верещагина необходимо уметь строить эпюры. «Научиться строить эпюры М и Q крайне необходимо. В процессе изучения курса сопротивления материалов с ними придется встречаться неоднократно. Следует иметь в виду, что освоение эпюр дается только в результате самостоятельной работы и решения большого числа примеров и задач. Здесь необходима серьезная тренировка» [7].

Точно так же освоить способ Верещагина можно лишь решая задачи.

Актуальность статьи состоит в том, что в ней приведены примеры различных видов нагружения балок и рассмотрены практически все варианты расслоения эпюр, встречающиеся при применении способа Верещагина для определения перемещений.

Изучение статьи дает возможность успешно освоить способ Верещагина как студентам, так и начинающим преподавателям.

1. Примеры определения перемещений

Пример 1. Определить прогиб на конце балки (точка «K» на рис. 1).

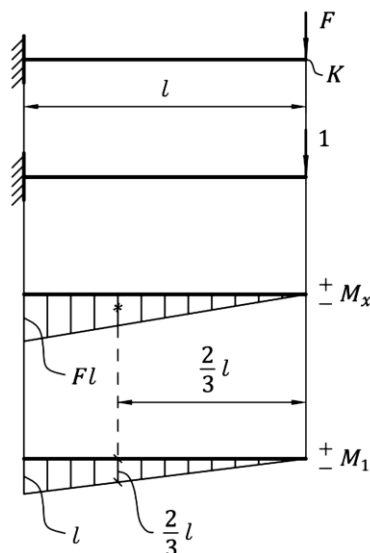


Рис. 1.

В точке K, в которой надо определить перемещение, приложили к балке единичную силу, построили эпюры изгибающих моментов от нагрузки, т.е. силы F (это эпюра M_x) и от единичной силы (это эпюра M_1). Эти эпюры перемножили: площадь одной эпюры умножили на ординату другой под центром тяжести первой. Площадь эпюры M_x равна $Fl^2/2$. Ордината на эпюре M_1 под центром тяжести эпюры M_x равна $2l/3$.

Эпюры расположены по одну сторону оси, поэтому их произведение будет с плюсом. В пределах перемножаемого участка обе эпюры линейные, поэтому можно любую из двух площадей умножить на соответствующую ординату другой эпюры.

Рекомендуем при решении задачи записывать выражение для определения перемещения (« $\delta_K =$ ») в следующем виде: поставить коэффициент $\frac{1}{EI_x}$, открыть квадратную скобку, затем в круглых скобках подробно записать выражение для определения площади эпюры M_x , после круглых скобок записать выражение для ординаты на эпюре M_1 под центром тяжести эпюры M_x , закрыть квадратную скобку и записать результат в виде обыкновенной дроби:

$$\delta_K = \frac{1}{EI_x} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot Fl \right) \cdot \frac{2}{3} l \right] = \frac{Fl^3}{3EI_x}.$$

Окончательный результат расчета со знаком «плюс» означает, что перемещение будет в сторону направления единичного силового фактора.

Пример 2. Определить прогиб на конце балки (точка «K» на рис. 2).

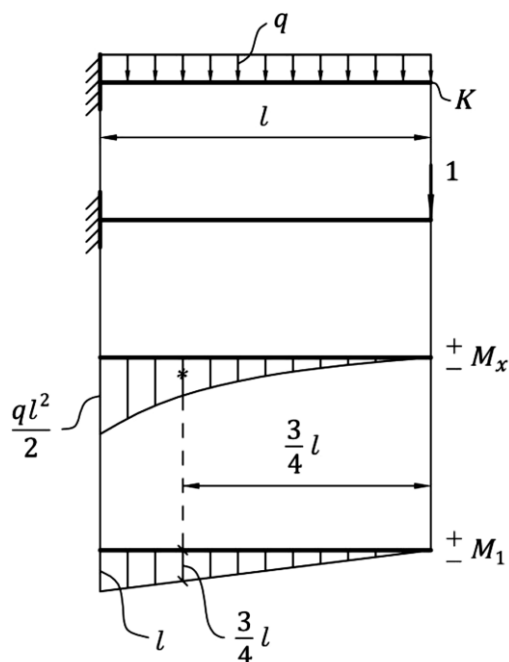


Рис. 2.

Строим эпюры изгибающих моментов от распределенной нагрузки интенсивности q и от единичной силы, эти эпюры перемножаем. Площадь A параболического треугольника (эпюры M_x) равна

$$A = \frac{1}{3} l \frac{ql^2}{2}.$$

Приведенной формулой можно воспользоваться только в случае, если в вершине параболы находится экстремум. В этой точке поперечная сила Q_y равна нулю. Кривая имеет экстремум в точке, где ее производная равна нулю. Поперечная сила Q_y и есть производная от функции изгибающих моментов M_x .

В нашем примере на конце балки поперечная сила отсутствует ($Q_y = 0$), значит, у параболы экстремум в точке «K» и прогиб равен

$$\delta_K = \frac{1}{EI_x} \cdot \left[\left(\frac{1}{3} \cdot l \cdot \frac{ql^2}{2} \right) \cdot \frac{3}{4} l \right] = \frac{ql^4}{8EI_x}.$$

Отметим, что при определении перемещений по способу Верещагина в задачах без распределенной нагрузки эпюры поперечных сил можно не строить, так как в них нет надобности. В рассмотренном выше примере также нет необходимости строить эпюру поперечных сил, так как легко понять, что экстремум параболы на эпюре M_x находится на конце балки справа, где поперечная сила равна нулю ($Q_y = 0$).

Пример 3. Определить прогиб на конце балки (точка «K» на рис. 3).

В рассматриваемом примере строим эпюру поперечных сил, из которой следует, что экстремум параболы на эпюре M_x находится за пределами балки.

В подобных случаях следует поступать следующим образом: надо провести прямую линию, добавив к эпюре горбушку, и получить треугольник, а затем эту горбушку отнять.

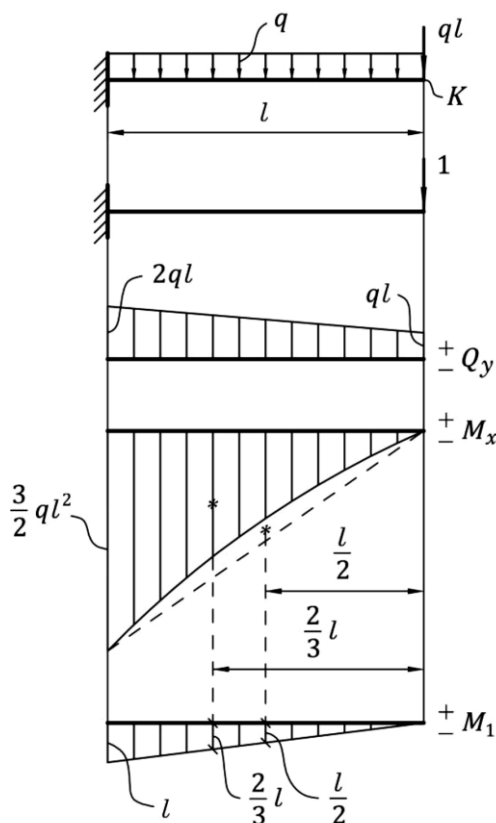


Рис. 3.

При перемножении эпюр член, содержащий добавленную горбушку, будет иметь знак, противоположный знаку члена с треугольником. Горбушку, расположенную наклонно, при расчете считаем расположенной горизонтально. Эпюры изгибающих моментов от распределенной нагрузки и от единичной силы перемножаем:

$$\delta_K = \frac{1}{EI_x} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{3}{2} ql^2 \right) \cdot \frac{2}{3} l - \left(\frac{2}{3} \cdot l \cdot \frac{ql^2}{8} \right) \cdot \frac{l}{2} \right] = \frac{ql^4}{EI_x} \cdot \left[\frac{3 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} \right] = \frac{11}{24} \cdot \frac{ql^4}{EI_x}.$$

Примечание.

Эпюры M_1 от единичной силы – это треугольники. Каждая ордината такой эпюры на участке от нуля до максимального значения M_1 есть произведение единичной силы или найденной от нее реакции на расстояние до сечения, в котором определяется ордината.

Поэтому ординату на эпюре M_1 под центром тяжести площади на эпюре M_x можно вычислять, умножая единицу или найденную от нее реакцию на расстояние от этой силы до центра тяжести соответствующей фигуры на эпюре M_x .

Пример 4. Определить прогиб балки в сечении «К» (рис. 4).

В этом примере у параболического треугольника на участке перемножения также нет экстремума в вершине параболы, поэтому добавляем горбушку, а затем ее отнимаем:

$$\delta_K = \frac{1}{EI_x} \cdot \left[\left(l \cdot \frac{ql^2}{2} \right) \cdot \frac{l}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{3}{2} ql^2 \right) \cdot \frac{2}{3} l - \left(\frac{2}{3} \cdot l \cdot \frac{ql^2}{8} \right) \cdot \frac{l}{2} \right] =$$

$$= \frac{ql^4}{EI_x} \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{6}{2 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} \right] = \frac{ql^4}{EI_x} \cdot \left[\frac{6 + 12 - 1}{24} \right] = \frac{17}{24} \cdot \frac{ql^4}{EI_x}.$$

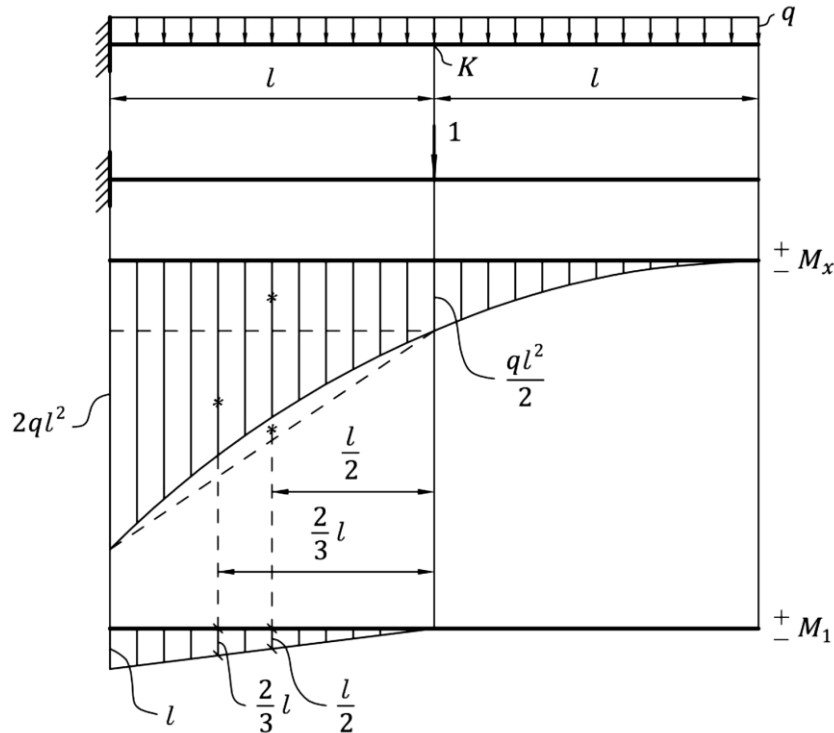


Рис. 4.

Пример 5. Определить прогиб на конце балки (точка «K» на рис. 5).

В этом примере ордината на эпюре M_1 под центром тяжести фигуры на эпюре M_x определялась как произведение реакции от единичной силы на расстояние до центра тяжести соответствующей фигуры на эпюре M_x . Такой прием справедлив только на участке эпюры M_1 от нуля до излома на этой эпюре.

$$\delta_K = \frac{1}{EI_x} \cdot \left[\left(\frac{2}{3} \cdot l \cdot \frac{ql^2}{8} \right) \cdot \frac{l}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot ql^2 \right) \cdot \frac{2}{3} l + \left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{ql^2}{2} \right) \cdot \frac{4}{3} l + \left(l \cdot \frac{ql^2}{2} \right) \cdot \frac{3}{2} l + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{ql^2}{2} \right) \cdot \frac{4}{3} l \right] = \frac{ql^4}{EI_x} \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{4}{2 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 2} + \frac{4}{2 \cdot 2 \cdot 3} \right] =$$

$$= \frac{ql^4}{EI_x} \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{4 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{4 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} \right] =$$

$$= \frac{ql^4}{EI_x} \cdot \left[\frac{1 + 8 + 8 + 18 + 8}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} \right] = \frac{43}{24} \cdot \frac{ql^4}{EI_x}.$$

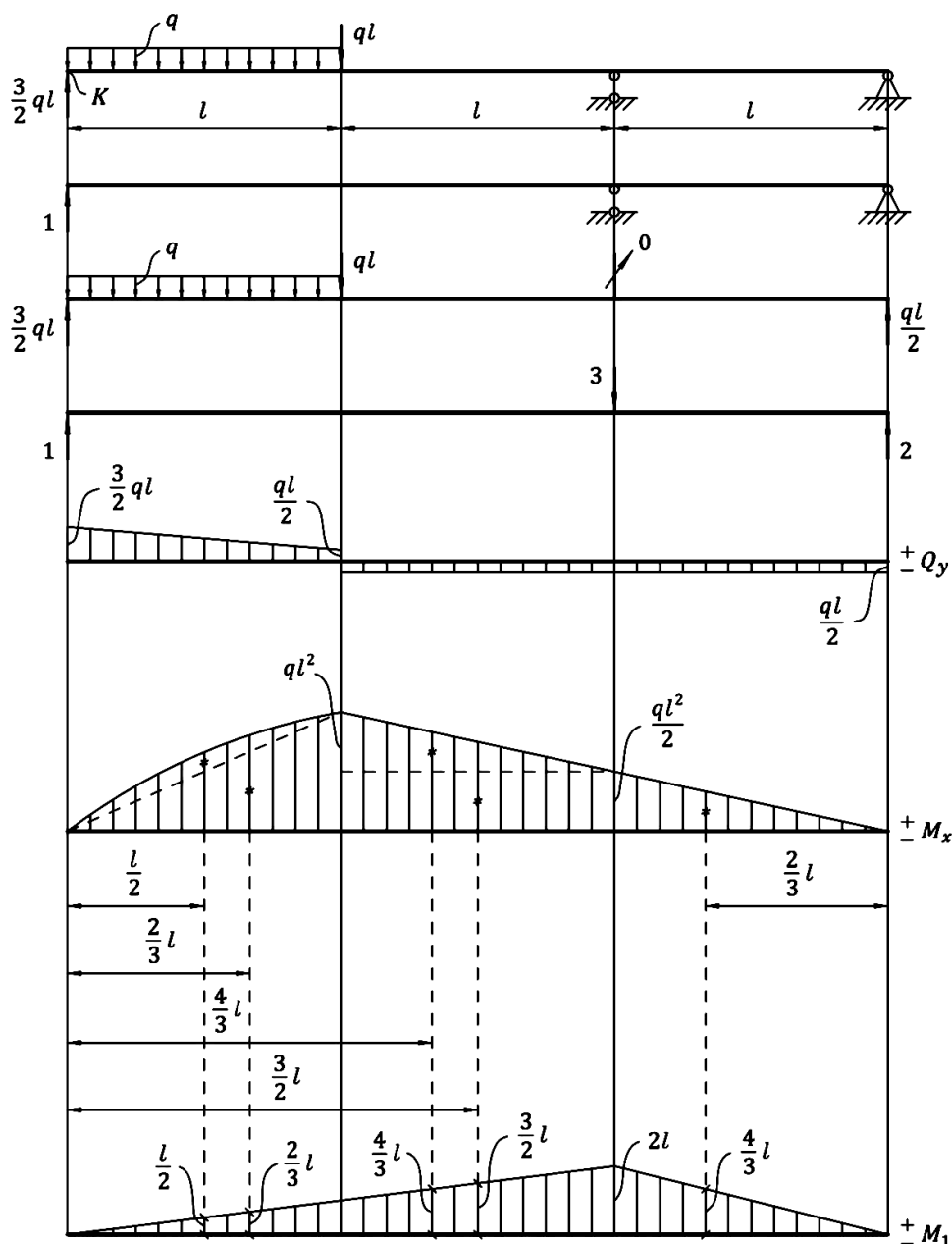


Рис. 5.

Пример 6. Определить угол поворота конца балки (точка «К» на рис. 6).

Иногда вместо разбиения эпюры на простейшие фигуры удобнее осуществить другой вид расслоения: вместо суммарной эпюры M_x построить эпюры от каждого силового фактора отдельно. Рассмотрим два варианта расслоения эпюры M_x в данном примере.

Первый вариант. Приложив в точке «К» единичный момент, строим эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки и от единичного момента. Эпюру M_x расслаиваем, площади полученных после расслоения фигур (двух треугольников и горбушки) и соответствующие ординаты на эпюре M_1 перемножаем. При перемножении эпюр получаем три слагаемых, одно из которых (для нижнего треугольника) – с минусом:

$$\theta_K = \frac{1}{EI_x} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 2l \cdot ql^2 \right) \cdot 1 + \left(\frac{2}{3} \cdot 2l \cdot \frac{1}{8} q(2l)^2 \right) \cdot 1 - \left(\frac{1}{2} \cdot 2l \cdot ql^2 \right) \cdot 1 \right] = \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^3}{EI_x}.$$

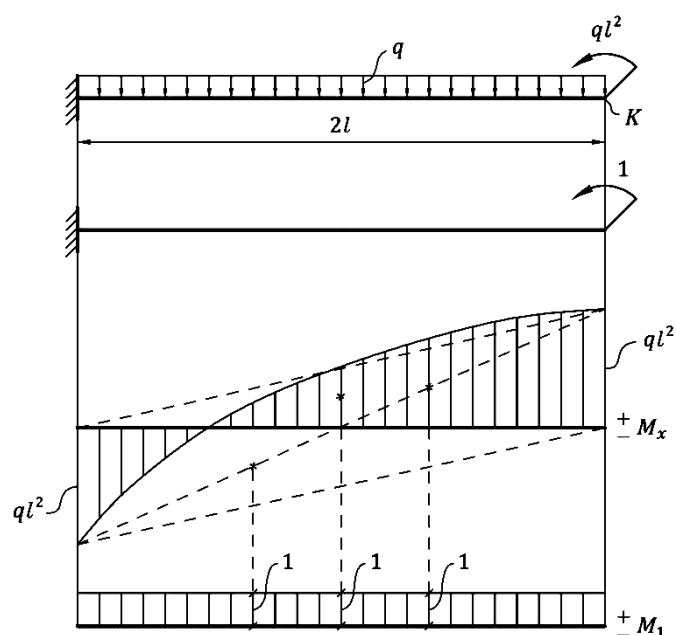


Рис. 6.

Второй вариант. Вместо эпюры M_x строим отдельные эпюры изгибающих моментов от каждого из двух силовых факторов (распределенной нагрузки q и момента M , рис. 7).

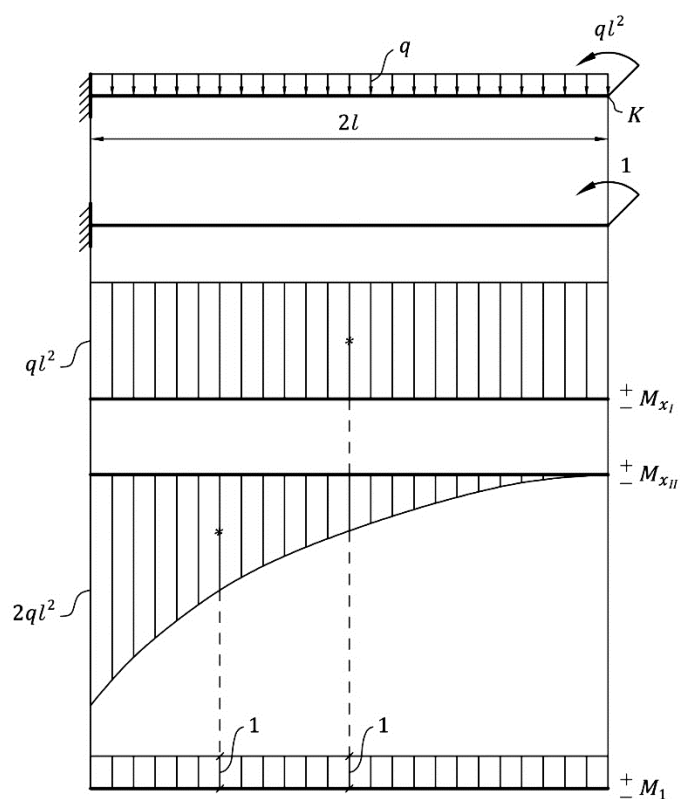


Рис. 7.

$$\theta_K = \frac{1}{EI_x} \cdot \left[(2l \cdot ql^2) \cdot 1 - \left(\frac{1}{3} \cdot 2l \cdot \frac{1}{2} q (2l)^2 \right) \cdot 1 \right] = \frac{ql^3}{EI_x} \cdot \left[2 - \frac{4}{3} \right] = \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^3}{EI_x}.$$

Получили такой же результат, как и в первом способе, но во втором варианте, как правило, проще определять площадь фигуры и положение ее центра тяжести.

На рис. 7 эпюра изгибающих моментов от момента M обозначена M_{xI} , а эпюра изгибающих моментов от распределенной нагрузки q обозначена M_{xII} .

Пример 7. Определить прогиб балки в сечении «К» (рис. 8).

Рассмотрим также два варианта расчленения эпюры M_x в данном примере.

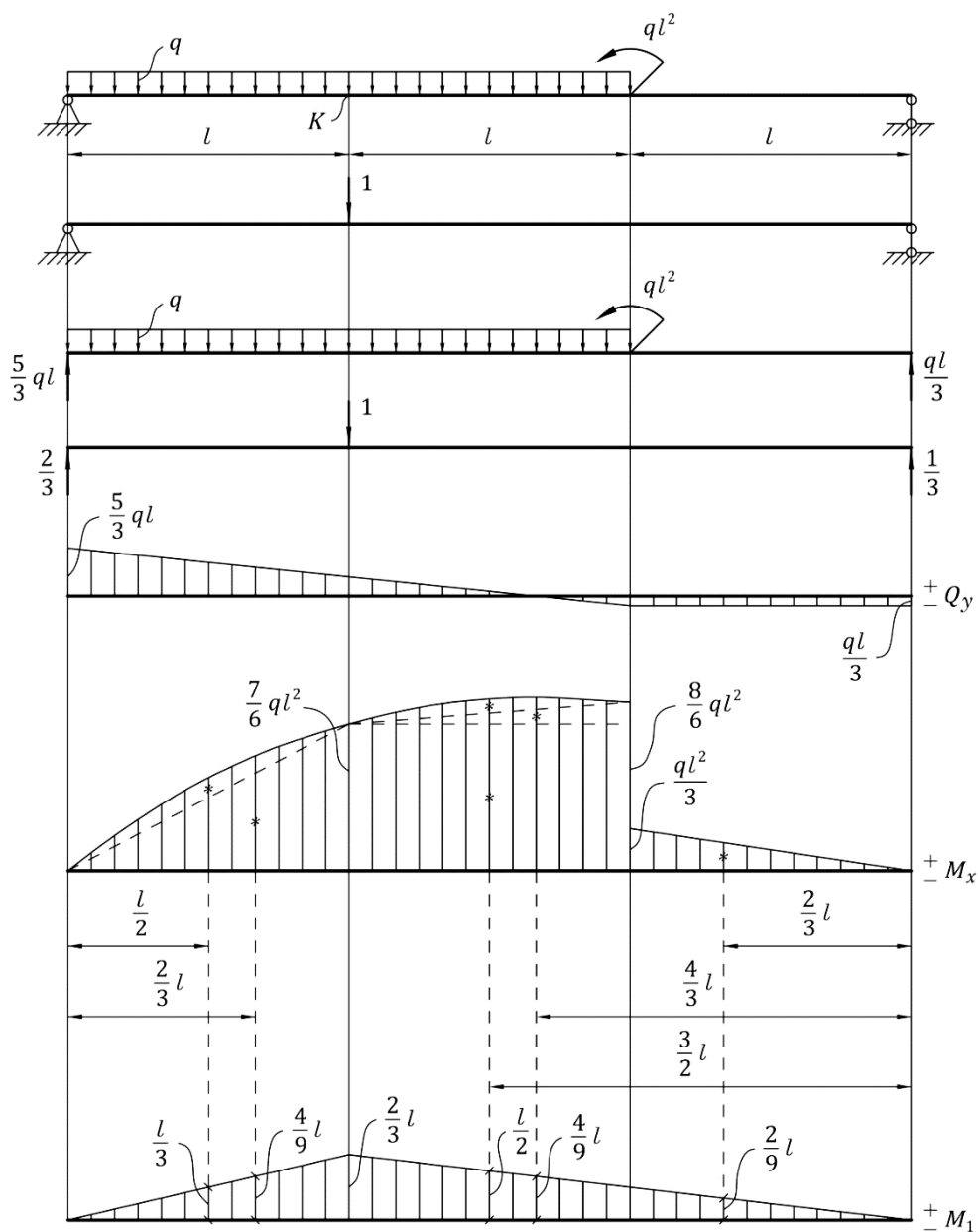


Рис. 8.

Первый вариант. Прикладываем в точке «К» единичную силу, строим эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки и от единичной силы. Эпюру M_x расчлаиваем, площади полученных фигур и соответствующие ординаты на эпюре M_1 перемножаем. Эпюру Q_y строим для того, чтобы правильно изобразить эпюру M_x , расположив на ней экстремум под нулем на эпюре Q_y . Положение и величину экстремума на эпюре M_x не указываем, так как эти данные не используются для определения прогиба.

$$\begin{aligned}
\delta_K &= \frac{1}{EI_x} \cdot \left[\left(\frac{2}{3} \cdot l \cdot \frac{ql^2}{8} \right) \cdot \frac{l}{3} + \left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{7}{6} ql^2 \right) \cdot \frac{4}{9} l + \left(\frac{2}{3} \cdot l \cdot \frac{ql^2}{8} \right) \cdot \frac{l}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{ql^2}{6} \right) \cdot \frac{4}{9} l + \right. \\
&+ \left. \left(l \cdot \frac{7}{6} ql^2 \right) \cdot \frac{l}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{ql^2}{3} \right) \cdot \frac{2}{9} l \right] = \frac{ql^4}{EI_x} \cdot \left[\frac{2}{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 4}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} + \right. \\
&+ \left. \frac{4}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} + \frac{7}{2 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} \right] = \frac{ql^4}{EI_x} \cdot \left[\frac{6 + 56 + 9 + 8 + 126 + 8}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} \right] = \\
&= \frac{213}{216} \cdot \frac{ql^4}{EI_x} = \frac{71}{72} \cdot \frac{ql^4}{EI_x}.
\end{aligned}$$

Второй вариант. Строим эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки относительно сечения, где излом на эпюре M_1 (рис. 9), отдельно от силовых факторов, лежащих левее этого сечения, и от силовых факторов, лежащих правее этого сечения.

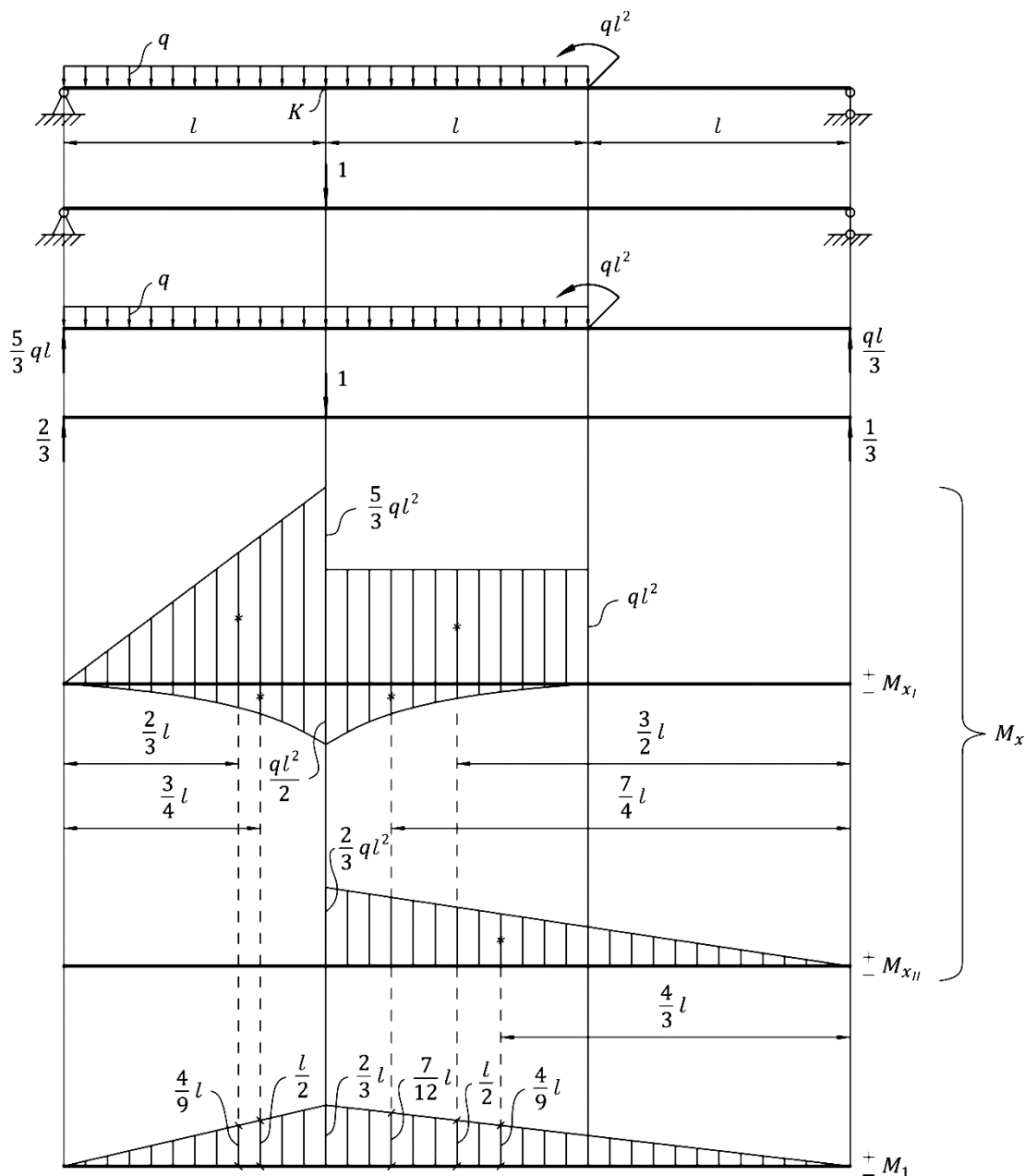


Рис. 9.

На рис. 9 эпюра изгибающих моментов от реакции опоры слева, момента ql^2 и от распределенной нагрузки q обозначена M_{xI} , а эпюра изгибающих моментов от реакции опоры справа обозначена M_{xII} .

$$\begin{aligned}\delta_K &= \frac{1}{EI_x} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{5}{3} ql^2 \right) \cdot \frac{4}{9} l - \left(\frac{1}{3} \cdot l \cdot \frac{ql^2}{2} \right) \cdot \frac{l}{2} + (l \cdot ql^2) \cdot \frac{l}{2} - \left(\frac{1}{3} \cdot l \cdot \frac{ql^2}{2} \right) \cdot \frac{7}{12} l + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{1}{2} \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} ql^2 \right) \cdot \frac{4}{9} l \right] = \frac{ql^4}{EI_x} \cdot \left[\frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{1}{2} - \frac{7}{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} \right] = \\ &= \frac{ql^4}{EI_x} \cdot \left[\frac{80 - 18 + 108 - 21 + 64}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} \right] = \frac{213}{216} \cdot \frac{ql^4}{EI_x} = \frac{71}{72} \cdot \frac{ql^4}{EI_x}.\end{aligned}$$

Получаем такой же результат, как и в первом варианте, но решение проще.

Пример 8. Определить угол поворота конца балки (точка «K» на рис. 10).

Прикладываем в точке «K» единичный момент, строим эпюры M_x и M_1 .

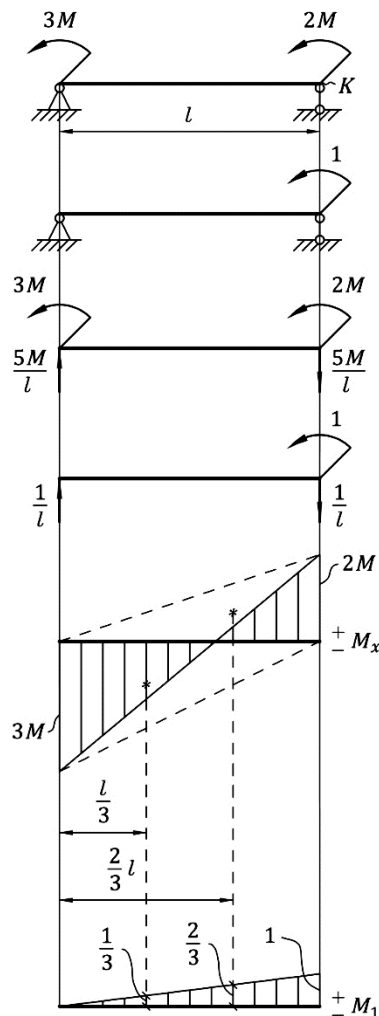


Рис. 10.

В данном примере эпюра M_x пересекает ось. В подобных случаях не следует искать точку пересечения эпюры с осью, так как у полученных в результате треугольников могут быть трудности с определением положения центра тяжести фигуры и ординаты под этим центром на эпюре M_1 .

Рекомендуется расслаивать подобные эпюры следующим образом. На эпюре M_x следует достроить треугольники сверху и снизу, как это сделано пунктиром на рис. 10. Эпюра M_x – это графическая сумма этих двух пунктирных треугольников, в каждом из которых просто найти положение центра тяжести и ординату под ним на эпюре M_1 .

Пояснение смотрите в приложении.

$$\begin{aligned}\theta_K &= \frac{1}{EI_x} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot 2M \right) \cdot \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot 3M \right) \cdot \frac{1}{3} \right] = \\ &= \frac{Ml}{EI_x} \cdot \left[\frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 3} - \frac{3}{2 \cdot 3} \right] = \frac{Ml}{6EI_x}.\end{aligned}$$

Пример 9. Определить угол поворота сечения «K» (рис. 11).

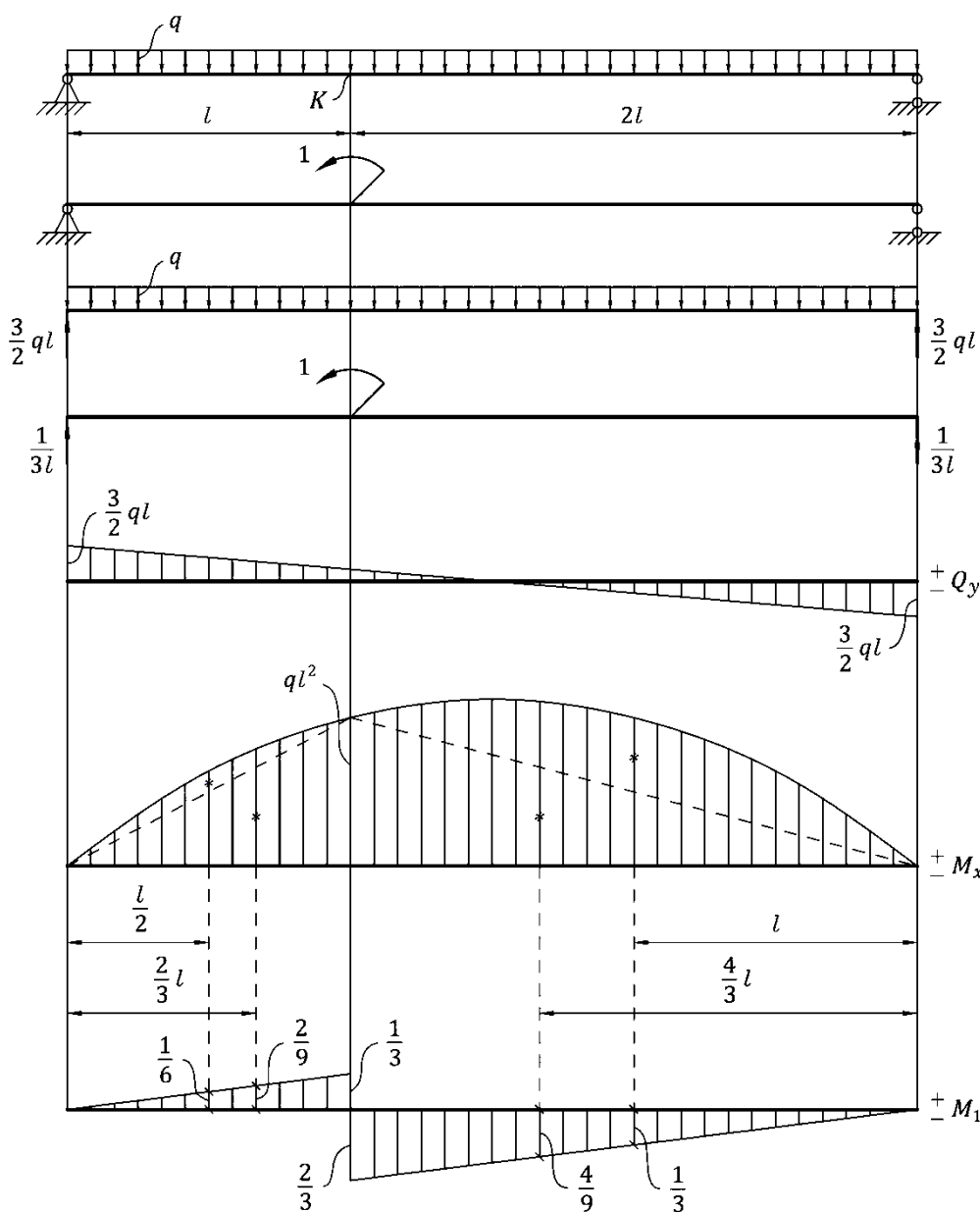


Рис. 11.

Прикладываем в точке «К» единичный момент, строим эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки и от единичного момента. Эпюру M_x раскладываем, площади полученных после расслоения фигур и соответствующие ординаты на эпюре M_1 перемножаем. При перемножении эпюр получаем четыре слагаемых. Эпюру Q_y построили для того, чтобы правильно изобразить эпюру M_x , расположив на ней экстремум под нулем на эпюре Q_y . Положение и величину экстремума на эпюре M_x не указываем, так как эти данные не используются для определения угла поворота сечения «К».

$$\begin{aligned}\delta_K &= \frac{1}{EI_x} \cdot \left[\left(\frac{2}{3} \cdot l \cdot \frac{ql^2}{8} \right) \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot ql^2 \right) \cdot \frac{2}{9} - \left(\frac{2}{3} \cdot 2l \cdot \frac{ql^2}{2} \right) \cdot \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2} \cdot 2l \cdot ql^2 \right) \cdot \frac{4}{9} \right] = \\ &= \frac{ql^3}{EI_x} \cdot \left[\frac{2}{3 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 3} - \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 3} \right] = \\ &= \frac{ql^3}{EI_x} \cdot \left[\frac{2 + 16 - 32 - 64}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 8} \right] = -\frac{78}{144} \cdot \frac{ql^3}{EI_x} = -\frac{13}{24} \cdot \frac{ql^3}{EI_x}.\end{aligned}$$

Приложение. Пояснение к примеру 8.

Поясним, почему в примере 8 эпюру M_x раскладываем именно так (рис. 12).

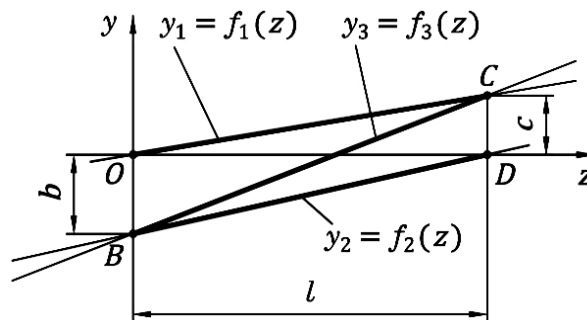


Рис. 12.

Прямые, на которых лежат отрезки ОС и BD соответствуют функциям

$$y_1 = \frac{c}{l} \cdot z; \quad y_2 = \frac{b}{l} \cdot z - b.$$

Сложим две линейные функции и получим

$$y_1 + y_2 = \frac{c + b}{l} \cdot z - b.$$

С другой стороны, из рис. 12 видно, что отрезок ВС лежит на прямой, соответствующей функции

$$y_3 = \frac{c + b}{l} \cdot z - b.$$

Таким образом, линейная функция y_3 действительно является суммой линейных функций y_1 и y_2 .

Заключение

1. Кроме описания способа Верещагина и методики его применения необходимо рассмотреть наибольшее количество примеров применения данного способа. Накопленный таким образом опыт позволит успешно использовать способ Верещагина на практике.

2. В работе дана рекомендация по оформлению расчета и приведены подробные арифметические выкладки. Подобное оформление работы позволит преподавателю легко определить ошибку, если таковая имеется в представленном студентом расчете.

3. В приложении приведено обоснование замены эпюры, пересекающей ось, двумя треугольниками.

4. Показан удобный способ безошибочного определения ординат на единичной эпюре под центром тяжести соответствующей площади.

5. Приведенные в данной работе примеры, включающие в себя практически все возможные варианты расслоения эпюр, позволяют полноценно освоить способ Верещагина и успешно его использовать в расчетах при выполнении графоаналитических работ.

Список литературы

- [1]. Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Лихарев К.К., Макушин В.М., Малинин Н.Н., Феодосьев В.И. Расчеты на прочность в машиностроении. В 3 т. Т. 1. Теоретические основы и экспериментальные методы. Расчеты стержневых элементов конструкций при статической нагрузке / под редакцией д-ра техн. наук проф. С.Д. Пономарева. М.: Машгиз, 1956. 884 с.
- [2]. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. 16-е изд., испр. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. 543 с.
- [3]. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1976. 608 с.
- [4]. Тихомиров Е.Н. Курс сопротивления материалов. М.; Л.: ОНТИ, Государственное технико-теоретическое издательство, 1934. 583 с.
- [5]. Газарян А.С., Сухова Н.А. Статически определимые балки. Методические указания по выполнению расчетно-графических работ по «Сопротивлению материалов». М.: МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1987. 24 с.
- [6]. Экспериментальная механика. Под ред. д.т.н., проф. Р.К. Вафина, д.т.н., проф. О.С. Нарайкина. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 136 с.
- [7]. Телевизионный курс сопротивления материалов. Изгиб и статически неопределимые системы / под общей редакцией В.И. Феодосьева. М.: "Высшая школа", 1981. 150 с.