электронный научно-технический журнал
ИНЖЕНЕРНЫЙ ВЕСТНИК
Издатель: Общероссийская общественная организация "Академия инженерных наук им. А.М. Прохорова". Эл No. ФС77-51036. ISSN 2307-0595

Способ Верещагина для определения перемещений

01, март 2018

Андриевская С. И.[1,*], Компаниец И. В.[1]

УДК: 539.384.2

[1]Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
[*] steandr2@mail.ru

Введение

Известно, что перемещения можно определять различными способами. Например, при помощи теоремы Кастилиано или при помощи интеграла Мора.

«Определение перемещений при помощи теоремы Кастилиано... обладает тем очевидным недостатком, что дает возможность найти перемещения только точек приложения внешних сил и только в направлении этих сил. На практике же возникает необходимость определять перемещения любых точек системы в любом направлении» [1].

«Основным недостатком определения перемещений при помощи интеграла Мора является необходимость составления аналитического выражения подынтегральных функций. Это особенно неудобно при определении перемещений в стержне, имеющем большое количество участков» [1].

А.К. Верещагин предложил способ определения перемещений, который носит его имя.

В книге [2] «Кто есть кто в сопротивлении материалов» в списке литературы приведено библиографическое описание статьи Андрея Константиновича Верещагина в журнале «Строительная промышленность» [3].

Цель данной статьи – дать подробное разъяснение сути и удобства определения перемещений по способу Верещагина, научить студентов приемам расчета по изучаемому способу, показать пример расслоения эпюр, создать базу для самостоятельного использования этого способа.

1. Вывод формулы способа Верещагина для определения перемещений

Способ Верещагина – это графоаналитический способ определения перемещений, основанный на интеграле Мора. Способ применим для плоских и пространственных систем, состоящих только из прямолинейных элементов, т. е. единичная эпюра должна быть обязательно линейной.

Рассмотрим этот способ на примере балки, имеющей только один участок. Для такой балки перемещение по интегралу Мора равно

$$\delta = \int_l \frac{M_x M_1 dz}{EI_x}.$$

Представим функцию M_x в виде криволинейного графика. Этот график, т.е. эпюра M_x, изображен на рис. 1. Эпюра M_1 представлена на рис. 1 в виде линейного графика.

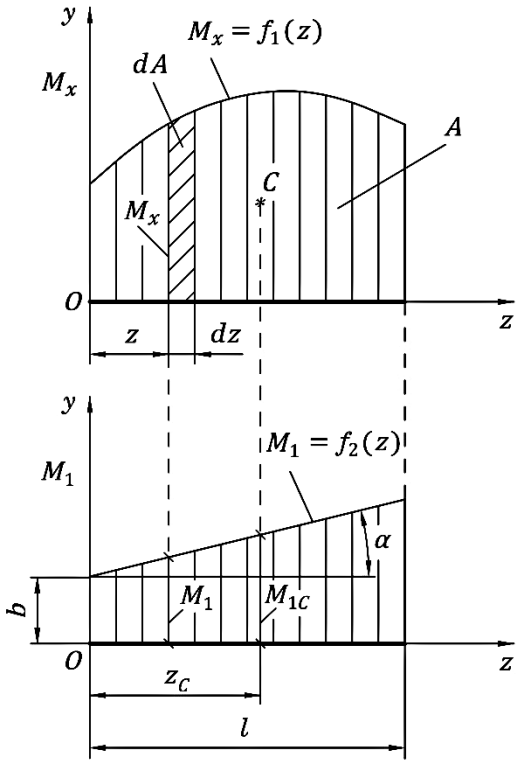


Рис. 1. Эпюры $\boldsymbol{M_x}$ и $\boldsymbol{M_1}$

Согласно эпюре M_1 (рис. 1), линейную функцию изгибающего момента от единичного силового фактора можно представить в виде $M_1 = b + kz$, где $k = tg\alpha$. Считаем изгибную жесткость балки постоянной ($EI_x = const$). Тогда интеграл Мора принимает вид

$$\delta = \int_l \frac{M_x(b + kz)dz}{EI_x} = \frac{b}{EI_x}\int_l M_x dz + \frac{k}{EI_x}\int_l zM_x\, dz = \frac{1}{EI_x}\left(b\int_l dA + k\int_l zdA\right).$$

В соответствии с рис. 1 в выражении для δ приняты обозначения $M_x dz = dA$, где A – площадь эпюры M_x.

$$\int_l zdA - \text{статический момент площади эпюры } M_x \text{ относительно оси } y.$$

Этот статический момент равен произведению площади фигуры на расстояние от центра тяжести этой площади до оси y. На рис. 1 это расстояние z_C, а центр тяжести площади эпюры M_x обозначен точкой C. Тогда перемещение равно

$$\delta = \frac{1}{EI_x}(bA + kz_C A) = \frac{A(b + kz_C)}{EI_x} = \frac{AM_{1C}}{EI_x}.$$

$$\delta = \frac{AM_{1C}}{EI_x} - \text{формула способа Верещагина.}$$

В этом выражении $M_{1C} = b + kz_C$ – ордината на единичной эпюре под центром тяжести площади эпюры M_x.

2. Последовательность действий для определения перемещений с помощью способа Верещагина

1. Чтобы найти перемещение с помощью способа Верещагина, нужно в том сечении и в том направлении, в котором определяем перемещение, приложить в системе без внешней нагрузки единичный силовой фактор: для линейного перемещения прикладываем единичную силу, для углового – единичный момент, для взаимного перемещения прикладываем два взаимных единичных силовых фактора.

2. Построить эпюры изгибающих моментов от внешних силовых факторов и от единичного силового фактора (т. е. эпюры M_x и M_1).

3. Эти эпюры по участкам перемножить: площадь одной эпюры следует умножить на ординату другой под центром тяжести первой.

Та эпюра, на которой берем ординату, в пределах участка должна быть линейной и не иметь излома.

Если эпюры расположены по разные стороны данного участка, то их произведение будет с минусом.

4. Сложить результаты перемножения по участкам с учетом знаков. Окончательный результат расчета со знаком «минус» означает, что перемещение будет в сторону, противоположную направлению единичного силового фактора.

Если в пределах перемножаемого участка обе эпюры линейны, то можно любую из двух площадей умножать на соответствующую ординату другой эпюры.

Если эпюра M_x сложная, то ее можно «расслоить», т.е. разбить на такие фигуры, для которых известна величина площади и положение центра тяжести этой площади. Это, например, прямоугольник, треугольник и некоторые другие фигуры.

3. Площади элементарных фигур и положение центра тяжести фигуры

Изображенные на рис. 2 фигуры являются примерами эпюр изгибающих моментов.

Криволинейные фигуры на рис. 2 – это аналоги эпюр от распределенной нагрузки интенсивности q, поэтому высота этих криволинейных фигур выражена через q.

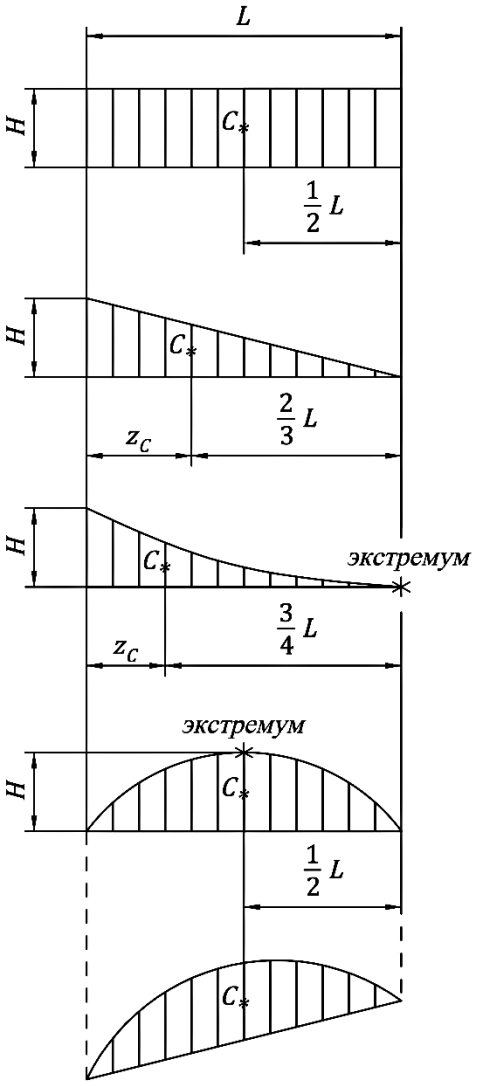
Формулы для параболического треугольника легко запомнить, заметив их связь с формулами для простого треугольника. Все цифры (кроме 1) в формулах для параболического треугольника на единицу больше, чем в формулах для простого треугольника.

Площадь фигуры A:

для простого треугольника $A = LH/2$, для параболического треугольника $A = LH/3$,

где L – длина участка, H – высота фигуры.

Расстояние z_C от указанной на рис. 2 высоты H до центра тяжести фигуры: для простого треугольника $z_C = L/3$, для параболического треугольника $z_C = L/4$.



$$A = LH$$
$$\left(L = \frac{l}{2}, l, 2l, 3l, \ldots\right)$$

$$A = \frac{1}{2}LH$$

$$A = \frac{1}{3}LH$$
$$H = \frac{1}{2}qL^2$$

$$A = \frac{2}{3}LH$$
$$H = \frac{1}{8}qL^2$$

Рис. 2. Площади элементарных фигур и положение центра тяжести фигуры

Пример. Определить прогиб на конце балки (точка «K» на рис. 3).

Расслаиваем эпюру M_x на простейшие фигуры, для которых известна величина площади и положение ее центра тяжести. Поскольку в точке «K» поперечная сила равна нулю, то это точка экстремума параболы на эпюре M_x (известно, что поперечная сила Q_y – это производная от функции M_x). Значит, приведенная формула для площади параболического треугольника применима.

$$\delta_K = \frac{1}{EI_x}\cdot\left[-\left(\frac{2}{3}\cdot l\cdot\frac{ql^2}{8}\right)\cdot\frac{3}{2}l - \left(\frac{1}{2}\cdot l\cdot\frac{3}{2}ql^2\right)\cdot\frac{4}{3}l - (l\cdot ql^2)\cdot\frac{3}{2}l + \left(\frac{1}{3}\cdot l\cdot\frac{ql^2}{2}\right)\cdot\frac{3}{4}l\right] =$$
$$= \frac{ql^4}{EI_x}\cdot\left[-\frac{1}{8} - 1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{8}\right] = -\frac{5}{2}\cdot\frac{ql^4}{EI_x}.$$

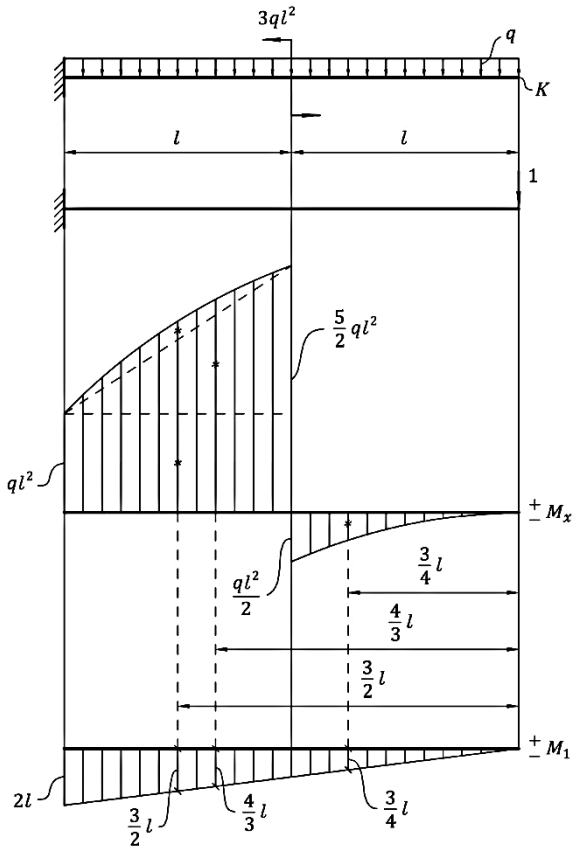


Рис. 3. Заданная расчетная схема, расчетная схема с единичным силовым фактором, эпюры M_x и M_1

Расположенная наклонно горбушка при расчетах считается расположенной горизонтально, пояснение смотрите в приложении**.**

Последний член выражения для прогиба положительный, поскольку обе эпюры – M_x и M_1 находятся по одну сторону оси. Остальные члены – с минусом, так как вышеназванные эпюры расположены по разные стороны от оси (одна сверху, другая снизу).

Приложение. Эпюра в форме горбушки.

Поясним, почему эпюру в форме горбушки, расположенной наклонно, при расчете рассматриваем как горбушку, расположенную горизонтально.

Предположим, что на каком-то участке балки эпюра M_x имеет вид, представленный на рис. 4. Величина экстремума на этой эпюре не имеет значения, так как эта ордината не участвует в определении перемещения. Для перемножения эпюр с помощью способа Верещагина эпюру M_x расслаиваем, разбив ее на два треугольника и горбушку (пунктир на рис. 4).

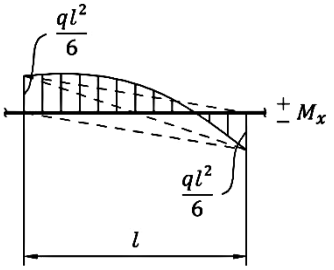


Рис. 4. Вид эпюры $\boldsymbol{M_x}$ на одном из участков балки

На рис. 4 горбушка наклонная, но при перемножении эпюр с помощью способа Верещагина мы считаем ее расположенной горизонтально. Поясним этот прием.

Данный участок балки можно представить, как отдельную шарнирно закрепленную балку, нагруженную двумя моментами и распределенной нагрузкой (рис. 5.)

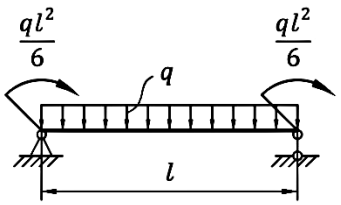


Рис. 5. Шарнирно закрепленная балка, нагруженная двумя моментами и распределенной нагрузкой

Определив реакции опор, построим эпюры Q_y и M_x для этой балки (рис. 6).

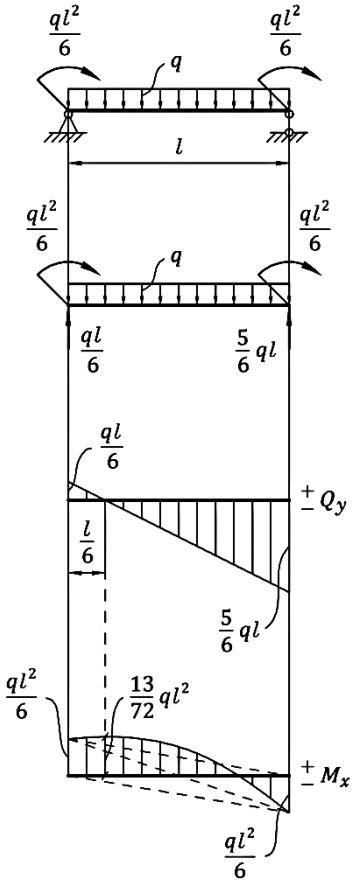


Рис. 6. Эпюры $\boldsymbol{Q_y}$ и $\boldsymbol{M_x}$ для рассматриваемой балки

Представим, что три внешних силовых фактора, действующих на балку (распределенная нагрузка и изгибающие моменты на концах балки (рис. 6), были приложены по отдельности.

Тогда получим три простые расчетные схемы, для которых построение эпюр изгибающих моментов не представляет трудностей. Площади фигур, подобных полученным в данном примере, и положение их центра тяжести указаны на рис. 2.

Эти схемы нагружения балки только одним из трех внешних силовых факторов, схемы с реакциями опор, эпюры изгибающих моментов изображены на рис. 7, где эпюры из-

гибающих моментов от сосредоточенного момента слева, от распределенной нагрузки, от сосредоточенного момента справа соответственно обозначены $M_{x_I}, M_{x_{II}}, M_{x_{III}}$.

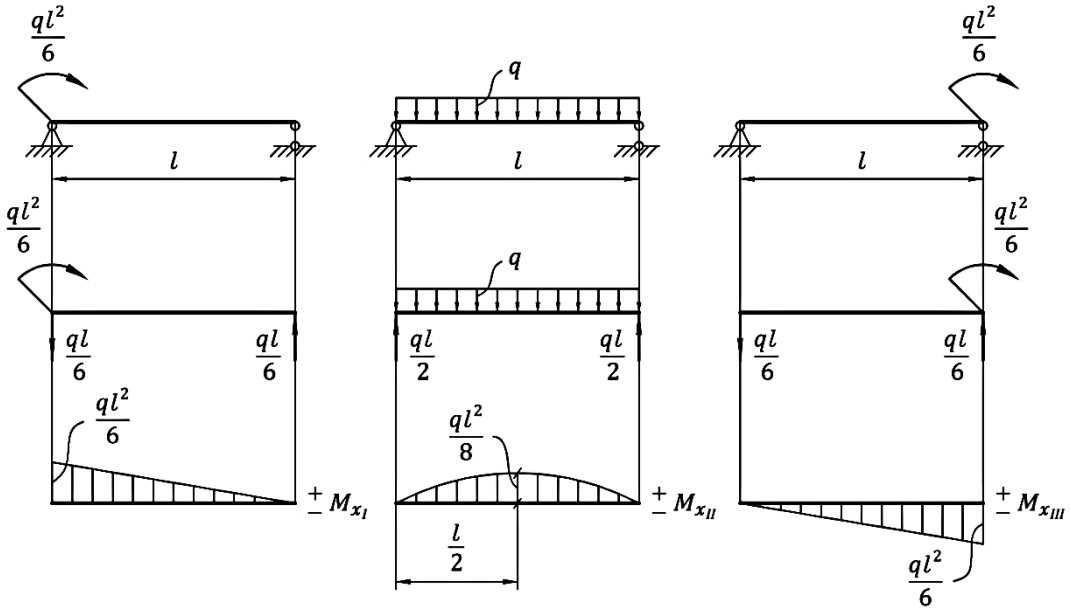


Рис. 7. Схемы нагружения балки только одним из трех внешних силовых факторов, схемы с реакциями опор, эпюры изгибающих моментов

Именно эти три эпюры M_x (M_{x_I}, $M_{x_{II}}$, $M_{x_{III}}$), изображенные на рис. 7 (два треугольника и ***горизонтально*** расположенную горбушку), мы используем при перемножении эпюр с помощью способа Верещагина.

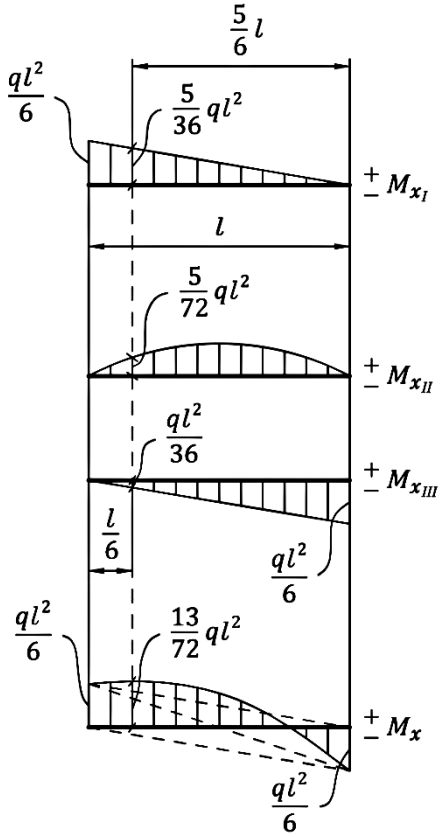


Рис. 8. Эпюры изгибающих моментов от каждого силового фактора отдельно и суммарная эпюра

На рис. 8 изображены все три эпюры изгибающих моментов от каждого силового фактора отдельно, а внизу изображена эпюра, которая является их графической суммой.

Убедимся в том, что эта эпюра является суммарной и идентичной эпюре M_x, изображенной на рис. 6. Для этого на расстоянии $l/6$ от левого конца балки, в сечении, где экстремум на суммарной эпюре, просуммируем ординаты на трех эпюрах M_{x_I}, $M_{x_{II}}$, $M_{x_{III}}$ (рис. 8):

на первой эпюре (схема с моментом слева, рис. 7) ордината равна

$$\frac{ql}{6}\cdot\frac{5l}{6}=\frac{5ql^2}{36};$$

на второй эпюре (схема с распределенной нагрузкой, рис. 7) ордината равна

$$\frac{ql}{2}\cdot\frac{l}{6}-q\cdot\frac{l}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{6}=\frac{5ql^2}{72};$$

на третьей эпюре (схема с моментом справа, рис. 7) ордината равна

$$-\frac{ql}{6}\cdot\frac{l}{6}=-\frac{ql^2}{36}.$$

Ордината на суммарной эпюре равна сумме (с учетом знаков) этих ординат

$$\frac{5ql^2}{36}+\frac{5ql^2}{72}-\frac{ql^2}{36}=\frac{13}{72}ql^2.$$

Определим эту же ординату, т.е. экстремум на суммарной эпюре (рис. 6). Согласно эпюре Q_y, экстремум расположен на расстоянии $l/6$ от левого конца балки и равен:

$$\frac{ql}{6}\cdot\frac{l}{6}+\frac{ql^2}{6}-q\cdot\frac{l}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{6}=\frac{13}{72}ql^2.$$

Получаем тот же результат.

Заключение

1. В работе приведена подробная последовательность всех действий, которые следует осуществить при определении перемещений по способу Верещагина.

Отмечены особенности применения способа, на которые следует обратить внимание при расчетах.

Следуя приведенной в работе инструкции, студент сможет безошибочно осуществить применение описанного способа при выполнении графоаналитических расчетов.

2. Рассмотрен пример, включающий в себя при расслоении эпюр все фигуры, которые встречаются в расчетах.

3. Приведено подробное разъяснение, почему горбушка, расположенная на эпюре наклонно, в расчетах считается расположенной горизонтально.

4. «Правильно выстроенная архитектура размещения информации существенно ускоряет доступ к ней и позволяет выявлять различные закономерности» [4].

Соответствующее расположение и грамотное оформление расчетных схем и эпюр изгибающих моментов – одно из обязательных условий успешного применения способа Верещагина.

5. Способ Верещагина также используется для теоретического определения перемещений, найденных экспериментально [5].

6. Способу Верещагина посвящен ряд работ, что показывает интерес к нему со стороны авторов [6–10]. Возможно, появятся новые работы, связанные с этим эффективным и простым в применении способом определения перемещений.

Список литературы

[1]. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. 16-е изд., испр. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. 543 с.

[2]. Малинин Н.Н. Кто есть кто в сопротивлении материалов / под ред. В.Л. Данилова. 2-е изд., стереотип. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 248 с.

[3]. Верещагин А.К. Новые методы расчета статически неопределимых систем // Строительная промышленность. 1925. № 9. С. 654–657.

[4]. Белим С.В., Бардычев В.Ю. Поиск связей в информационных структурах. // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2011. №2. Режим доступа: http://old.technomag.edu.ru/doc/167060.html (дата обращения: 10.04.2018).

[5]. Экспериментальная механика. Под ред. д.т.н., проф. Р.К. Вафина, д.т.н., проф. О.С. Нарайкина. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 136 с.

[6]. Алексеев А.А., Алексеева Е.Г., Ведерников В.Н., Гультяев В.И. К вопросу об определении перемещений методом Мора и введении уточняющих коэффициентов при перемножении эпюр // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2016. № 3 (29). С. 50–59.

[7]. Казарновский М.С. Определение перемещений в балках и рамах по способу Верещагина: метод. разработка для студентов специальностей: 1102, 1104, 1111, 0568, 0570, 0308, 0639 / Министерство высшего и среднего специального образования СССР, Московский текстильный институт. Кафедра сопротивления материалов. М.: Изд-во МТИ, 1971. 53 с.

[8]. Мещеряков А.В. Определение перемещений в балках способом Верещагина: учебно- методическое пособие / Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет дизайна и технологии» (ФГБОУ ВО "МГУДТ"). М.: Изд-во МГУДТ, 2016. 27 с.

[9]. Севастьянова Л.П. Матричная форма определения перемещений по способу Верещагина: учебное пособие / Министерство высшего и среднего специального образования СССР, Харьковский авиационный институт. Харьков: Изд-во ХАИ, 1974. 21 с.

[10]. Улюмджиева Г.В., Гельманова М.О. Правило Верещагина для плоско-пространственной системы в программе Ansys // Вестник науки и образования. 2016. № 11 (23). С. 22–24.