электронный научно-технический журнал
ИНЖЕНЕРНЫЙ ВЕСТНИК
Издатель: Общероссийская общественная организация "Академия инженерных наук им. А.М. Прохорова". Эл No. ФС77-51036. ISSN 2307-0595

О потенциалах Дебая для электромагнитных полей в общей теории относительности

 # 08, август 2017

Тришин В. Н.[1,2,*], Тришина Н. Е.[2,]**

УДК: 514.8+537.8

[1]Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
[2] Россия, РХТУ им. Д.И. Менделеева
[*]trishinvn@gmail.com
[**]natbelova@mail.ru

Введение

Хорошо известно, что в плоском пространстве-времени общее решение уравнений Максвелла без источников может быть выражено через тензорный потенциал Герца, являющийся потенциалом для обычного векторного электромагнитного потенциала. В плоском пространстве потенциал Герца допускает параметризацию одной комплексной функцией (потенциалом Дебая). В результате уравнения Максвелла без источников сводятся к одному скалярному уравнению второго порядка.

Данная конструкция не допускает непосредственного прямого обобщения на искривленное пространство-время общей теории относительности. Тем не менее в работе [1] (см. также [2, 3]) с помощью спиновых коэффициентов в формализме Ньюмена-Пенроуза было получено скалярное уравнение, описывающее решения уравнений Максвелла в пространствах с метрикой, допускающей бесдвиговую изотропную конгруэнцию. Этот класс метрик является достаточно общим, в частности, по известной [4] теореме Гольдберга-Сакса к нему относятся все алгебраически-специальные решения вакуумных уравнений Энштейна. Потенциалы Герца в алгебраически-специальных пространствах типа D по Петрову рассматривались также в работе [5].

В статье [6] (см. также [7]) было показано, что уравнение, предложенное в [1], фактически дает общее локальное решение для уравнений Максвелла без источников в пространствах с бесдвиговой изотропной конгруэнцией. Данный вывод уравнения для потенциала Дебая также основывался на спиновых коэффициентах в адаптированном базисе. Ковариантная формулировка скалярного уравнения для потенциала Дебая и новое доказательство, использующее дифференциальные формы, были предложены в работе [8].

В данной статье мы приводим альтернативный вывод уравнения для потенциала Дебая, которое описывает общее решение уравнений Максвелла без источников в алгебраически-специальных пространствах, допускающих бесдвиговую изотропную конгруэнцию. Доказательство использует ковариантные спинорные операторы, и полученное ска-

лярное уравнение также записано в ковариантной форме с использованием комплексного вектора Соммерса.

Пространство-время предполагается четырехмерным многообразием M с римановой метрикой g сигнатуры (+- --). Все функции предполагаются действительно аналитическими (класса C^{ω}). Мы используем формализм абстрактных индексов, следуя монографии [9].

1. Бессдвиговые изотропные конгруэнции в алгебраически-специальных метриках

Пусть векторное поле l^{μ} касательное к лучам изотропной бессдвиговой конгруэнции (БСК), имеет спинорное представление $l^{\mu} = \xi^{A}\xi^{A'}$. Условие нулевого сдвига соответствует системе уравнений

$$\xi^{A}\xi^{B}\nabla_{AA'}\xi_{B} = 0, \tag{1}$$

где $\Delta_{AA'}$ — оператор спинорной ковариантной производной относительно связности Леви - Чивита. Уравнения (1) можно записать [10] в эквивалентной форме

$$\nabla_{A'(A}\xi_{B)} = \phi_{A'(A}\xi_{B)}, \tag{2}$$

где $\phi_{AA'}$ - комплексное векторное поле (вектор Соммерса), ассоциированное с БСК. Ковариантную производную главного спинора БСК можно представить в виде

$$\nabla_{AA'}\xi_{B} = \phi_{A'B}\xi_{A} + \varepsilon_{AB}\eta_{A'}, \tag{3}$$

или

$$\nabla_{AA'}\xi_{B} = \phi_{A'A}\xi_{B} - \varepsilon_{AB}\zeta_{A'}, \tag{4}$$

где вспомогательные спиноры $\eta_{A'}$ и $\zeta_{A'}$ определены уравнениями

$$\xi^{A}\nabla_{AA'}\xi_{B} = \xi_{B}\eta_{A'}, \qquad \xi^{B}\nabla_{AA'}\xi_{B} = \xi_{A}\zeta_{A'}. \tag{5}$$

Известно (см., например. [9]), что из условий интегрируемости уравнений (1) следует, что вектор БСК l^{μ} должен определять главное изотропное направление (ГИН) тензора конформной кривизны Вейля; соответственно, спинор ξ^{A} должен быть главным спинором конформного спинора Вейля ψ_{ABCD}.

Уравнения (1) инвариантны относительно репараметризации луча БСК, т.е. сохраняют свой вид при произвольных масштабных преобразованиях $\xi_{A} \to \alpha(x)\ \xi_{A}$. Если потребовать, чтобы спинор ξ_{A} удовлетворял дополнительному калибровочному условию

$$\xi^{A}\nabla_{AA'}\xi_{B} = 0, \tag{6}$$

которое означает, что $\eta_{A'} = 0$, то для ковариантной производной получаем простое выражение

$$\nabla_{AA'}\xi_{B} = \phi_{A'B}\xi_{A} \tag{7}$$

и

$$\zeta_{A'} = \xi^{A}\phi_{AA'} = \nabla^{A}_{A'}\xi_{A}. \tag{8}$$

В [11] было показано, что выбор такой калибровки всегда возможен, если ξ_{A} определяет *кратное* ГИН, соответственно, пространство-время должно быть алгебраически-

специальным.

Разложение условий интегрируемости уравнений (6) на неприводимые представления дает [12] систему

$$\begin{cases} \Psi_{ABCD}\xi^D = \xi_{(A}\varphi_{BC)} \\ 12\Lambda\xi_A = 2\varphi_{AC}\xi^C - 3\xi_A(\nabla_{CC'}\phi^{CC'} + \phi_{CC'}\phi^{CC'}) \\ 2\Phi_{A'B'}{}^{CD}\xi_D = -\tilde{\varphi}_{A'B'}\xi^C + (\nabla^{(C}_{(A'}\phi^{D)}_{B')} - \phi^{(C}_{(A'}\phi^{D)}_{B')})\xi_D, \end{cases} \quad (9)$$

где $\varphi_{AB} = \nabla_{A'(A}\phi^{A'}_{B)}$, $\tilde{\varphi}_{A'B'} = \nabla_{A(A'}\phi^{A}_{B')}$, Ψ_{ABCD} - конформный спинор Вейля, $\Phi_{A'B'AB}$ - спинор Риччи и $\Lambda = R/24$, *R* - скалярная кривизна.

Определим дифференциальный спинорный оператор

$$\delta_{A'} = \xi^A\nabla_{AA'}. \quad (10)$$

Прямыми вычислениями, учитывая условия интегрируемости (9) и соотношения (8), можно проверить, что при выполнении калибровочного условия (6) оператор $\delta_{A'}$ обладает следующими свойствами:

1) $\delta_{A'}\xi_A = 0$,
2) $\delta_{A'}\zeta^{A'} = 0$,
3) $\delta_{A'}\delta^{A'}f(x) = 0$,

где *f (x)* - произвольная функция координат. Заметим, что из второго свойства следует, что существует скалярная функция ζ такая, что $\zeta_{A'} = \delta_{A'}\zeta$.

2. Потенциал Дебая для поля Максвелла

Уравнения Максвелла без источников для тензора напряженности электромагнитного поля имеют вид

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = 0, \qquad \nabla_{[\alpha}F_{\mu\nu]} = 0. \quad (11)$$

Второе уравнение означает существование (на топологически тривиальном многообразии) потенциала $A\mu$ такого, что $F_{\mu\nu} = 2\nabla_{[\mu}A_{\nu]}$, и оставшиеся уравнения Максвелла представляют собой уравнения второго порядка для электромагнитного потенциала $A\mu$.

Хорошо известно (см., например, [6]). что уравнения Максвелла (11) можно представить в виде условия самодуальности $*\mathcal{F}_{\mu\nu} = i\mathcal{F}_{\mu\nu}$ комплексного тензора $\mathcal{F}_{\mu\nu} = 2\nabla_{[\mu}\mathcal{A}_{\nu]} = F_{\mu\nu} - i*F_{\mu\nu}$, где $*$ - дуальный оператор Ходжа.

Используя спинорное представление $\mathcal{F}_{\mu\nu} = f_{AB}\varepsilon_{A'B'} + \tilde{f}_{A'B'}\varepsilon_{AB}$, где $f_{AB} = \nabla_{C'(A}\mathcal{A}^{C'}_{B)}$, где $\tilde{f}_{A'B'} = \nabla_{C(A'}\mathcal{A}^{C}_{B')}$, запишем условие самодуальности в виде уравнений первого порядка для комплексного потенциала:

$$\nabla_{C'(A}\mathcal{A}^{C'}_{B)} = 0. \quad (12)$$

Решения $\mathcal{A}_\mu$ этого комплексного уравнения соответствуют действительным решениям уравнений Максвелла (11): $F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathcal{F}_{\mu\nu} + \overline{\mathcal{F}}_{\mu\nu})$, где черта означает комплексное сопряжение.

Рассмотрим (комплексный) электромагнитный потенциал, заданный выражением

$$\mathcal{A}_{AA'} = 2\psi\xi^C\nabla_{AA'}\xi_C - \nabla^B_{A'}(\psi\xi_A\xi_B), \tag{13}$$

где спинор ξ_A удовлетворяет уравнению (6), а комплексная функция ψ (потенциал Дебая) соответствует (действительному) потенциалу Герца

$$H_{\mu\nu} = \varepsilon_{AB}(\bar{\psi}\xi_{A'}\xi_{B'}) + \varepsilon_{A'B'}(\psi\xi_A\xi_B).$$

Используя введенный в первой части статьи оператор $\delta_{A'}$ и его свойства, выражение (13) можно преобразовать к виду

$$\mathcal{A}_{AA'} = \xi_A\chi_{A'}, \quad \chi_{A'} = \delta_{A'}\psi + \psi\delta_{A'}\zeta. \tag{14}$$

Подставляя (14) в условие самодуальности (12) получим

$$f_{AB} = \xi_{(A}[\nabla_{B)C'} + \phi_{B)C'}]\chi^{C'} = 0, \tag{15}$$

откуда сразу получаем, что $f_{AB}\xi^A\xi^B = 0$. Для выражения $(\nabla_{BC'} + \phi_{BC'})\chi^{C'}$ имеем:

$$\begin{aligned}(\nabla_{BC'} + \phi_{BC'})(\delta^{C'}\psi + \psi\delta^{C'}\zeta) = \\ = \nabla_{BC'}\delta^{C'}\psi + (\delta^{C'}\zeta\cdot\nabla_{BC'} + \phi_{BC'}\delta^{C'})\psi + \psi(\nabla_{BC'} + \phi_{BC'})\delta^{C'}\zeta.\end{aligned} \tag{16}$$

Используя условия интегрируемости (9) и свойства $\delta_{A'}$, для каждой группы слагаемых в правой части выражения (16) получим

$$\nabla_{BC'}\delta^{C'}_1\psi = -\xi_B(\frac{1}{2}\Box + \phi^\mu\nabla_\mu)\psi, \tag{17}$$

$$(\delta^{C'}\zeta\cdot\nabla_{BC'} + \phi_{BC'}\delta^{C'})\psi = -\xi_B\phi^\mu\nabla_\mu\psi, \tag{18}$$

$$(\nabla_{BC'} + \phi_{BC'})\delta^{C'}\zeta = 3\xi_B(2\Lambda + \frac{1}{2}\nabla_\mu\phi^\mu), \tag{19}$$

где $\Box\psi = \nabla_\mu\nabla^\mu\psi$ - волновой оператор Д'Аламбера. В итоге уравнения самодуальности принимают вид

$$f_{AB} = -\frac{1}{2}\xi_{(A}\xi_{B)}(\Box + 4\phi^\mu\nabla_\mu - 3\nabla_\mu\phi^\mu - 12\Lambda)\psi = 0. \tag{20}$$

Таким образом мы доказали, что если потенциал Дебая ψ удовлетворяет комплексному скалярному уравнению

$$\Box\psi + 4\phi^\mu\nabla_\mu\psi - \psi(3\nabla_\mu\phi^\mu + \frac{R}{2}) = 0, \tag{21}$$

где ϕ_μ - вектор Соммерса, заданный выражением (7), а *R*- скалярная кривизна метрики, то поле

$$F_{\mu\nu} = \nabla_{[\mu}\mathcal{A}_{\nu]} + \nabla_{[\mu}\overline{\mathcal{A}}_{\nu]}. \tag{22}$$

Здесь потенциал $\mathcal{A}_\mu$ определен выражением (13), удовлетворяет уравнениям Максвелла (11).

Заключение

В результате решение уравнений Максвелла без источников в алгебраически-специальном пространстве-времени, допускающем бесдвиговую изотропную конгруэнцию, сводится к решению скалярного уравнения (21). Это уравнение фактически является ковариантной записью уравнения, полученного для потенциала Дебая в работе [1] с использованием специального адаптированного базиса.

Список литературы

[1]. Cohen J. M., Kegeles L. S. Electromagnetic fields in curved spaces: A constructive procedure // Physical Review D. 1974. Vol.10. P.1070-1084. DOI: 10.1103/PhysRevD.10.1070

[2]. Kegeles L. S., Cohen J. M. Constructive procedure for perturbations of spacetimes // Physical Review D. 1979. Vol.\9. P.1641-1664. DOI: 10.1103/PhysRevD.19.1641

[3]. Mustafa E., Cohen J. M. Hertz and Debye potentials and electromagnetic fields in general relativity // Classical Quantum Gravity. 1987. Vol.4. P.1623-1631. DOI: 10.1088/0264-9381/4/6/020

[4]. Stephani H., Kramer D., MacCallum M. A. H., Hoenselaers C., Herlt E. Exact solutions of Einstein's field equations. Cambridge: Cambridge University Pess, 2003. 701 p.

[5]. Stewart J. M. Hertz-Bromwich-Debye-Whittaker-Penrose Potentials in General Relativity // Proceedings of the Royal Society London A. 1979. Vol.367. P.527-538. DOI: 10.1098/rspa.1979.0101

[6]. Torres del Castillo G. F. Debye Potentials for Self-dual Fields // General Relativity and Gravitation. 1999. Vol.31. P.205-212. DOI: 10.1023/A:1018840126514

[7]. Torres del Castillo G. F. Spinors in Four-Dimensional Spaces. Springer, 2010. 182 p.

[8]. Benn I. M., Charlton P., Kress J. Debye potentials for Maxwell and Dirac fields from a generalization of the Killing–Yano equation // Journal of Mathematical Physics. 1997. Vol.38. P.4504-4527. DOI: 10.1063/1.532140

[9]. Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время. В 2 т. Т.1. Два-спинорное исчисление и релятивистские поля: пер. с англ. М.: Мир, 1987. 528 с.

[10]. Sommers P. Properties of Shear-free Congruences of Null Geodesics // Proceedings of the Royal Society London A. 1976. Vol.349. P.309-318. DOI: 10.1098/rspa.1976.0075

[11]. Kassandrov V. V., Trishin V. N. Effective connections and fields associated with shear-free null congruences // General Relativity and Gravitation. 2004. Vol.36. P.1603-1612. DOI: 10.1023/B:GERG.0000032152.79799.8a

[12]. Тришин В.Н. О некоторых свойствах бессдвиговых изотропных конгруэнций // Инженерный журнал: наука и инновации. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. N7. DOI: 10.18698/2308-6033-2013-7-843