

Исследование в среде MathCAD форм и частот Крутильных колебаний электропривода клетки дуо-450

08, август 2017

Мальцев А. А.^{1,*}, Тарасенко И. А.^{1,**}

УДК 621.771

¹Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

* a.a.mal@mail.ru

** iri-taraskenko@yandex.ru

Введение

В предыдущей статье [1] была построена крутильно-колебательная модель электропривода рабочих валков металлопрокатной клетки дуо-450 — изображена расчетная схема с разветвленной структурой (рис.1), приведена математическая запись законов крутильно-колебательного движения сосредоточенных масс (1), идентифицированы параметры этой модели (табл.1).

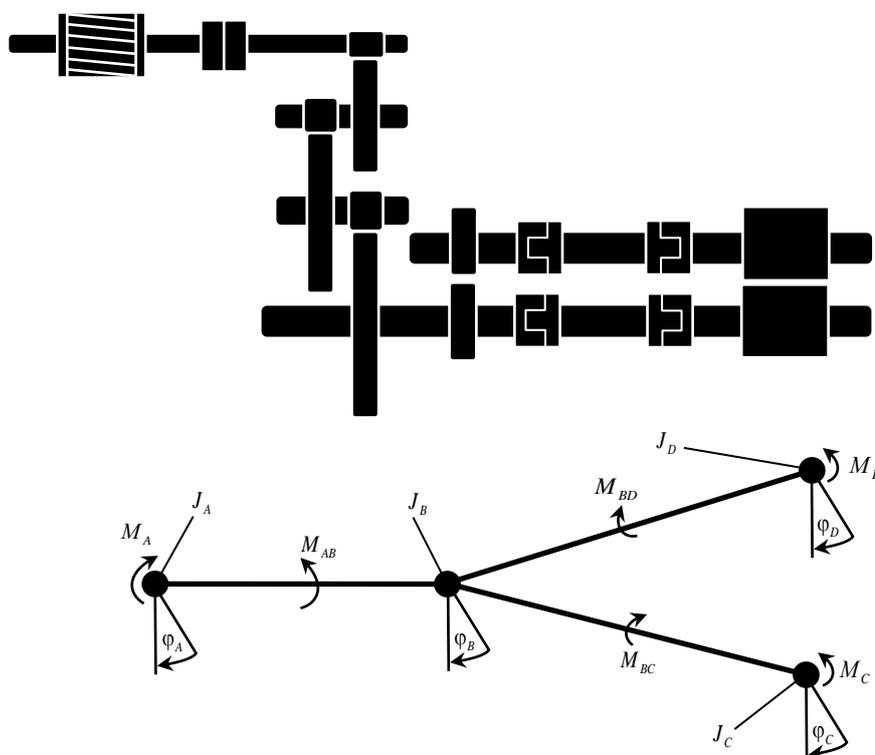


Рис.1. Расчетная схема [2] крутильно-колебательной модели электропривода:
 A, B, C и D — сосредоточенные массы; J_A, J_B, J_C и J_D — моменты инерции;
 $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C$ и φ_D — угловые координаты; M_A, M_C и M_D — внешние моменты;
 M_{AB}, M_{BC} и M_{BD} — внутренние моменты упругих связей AB, BC и BD

$$\begin{cases} J_A \frac{d^2 \varphi_A(t)}{dt^2} + M_{AB}(t) = M_A \left[1 - e^{-\frac{t}{0,45 T_{\text{зах}}}} \right]; \\ J_B \frac{d^2 \varphi_B(t)}{dt^2} - M_{AB}(t) + M_{BC}(t) + M_{BD}(t) = 0; \\ J_C \frac{d^2 \varphi_C(t)}{dt^2} - M_{BC}(t) = -M_C \left[1 - e^{-\frac{t}{0,45 T_{\text{зах}}}} \right]; \\ J_D \frac{d^2 \varphi_D(t)}{dt^2} - M_{BD}(t) = -M_D \left[1 - e^{-\frac{t}{0,45 T_{\text{зах}}}} \right], \end{cases} \quad (1)$$

где t — время; $T_{\text{зах}}$ — время захвата заготовки рабочими валками; M_A, M_C, M_D — моменты электродвигателя и прокатки M_{AB}, M_{BC}, M_{BD} — моменты сил упругости;

$$\begin{aligned} M_{AB}(t) &= C_{AB} \psi_{AB}(t) + \beta_{AB} \left[\frac{d\varphi_A(t)}{dt} - \frac{d\varphi_B(t)}{dt} \right]; \\ M_{BC}(t) &= C_{BC} \psi_{BC}(t) + \beta_{BC} \left[\frac{d\varphi_B(t)}{dt} - \frac{d\varphi_C(t)}{dt} \right]; \\ M_{BD}(t) &= C_{BD} \psi_{BD}(t) + \beta_{BD} \left[\frac{d\varphi_B(t)}{dt} - \frac{d\varphi_D(t)}{dt} \right]; \end{aligned}$$

где C_{AB}, C_{BC}, C_{BD} — угловые (крутильные) жесткости связей; $\beta_{AB}, \beta_{BC}, \beta_{BD}$ — коэффициенты демпфирования; $\psi_{AB}(t), \psi_{BC}(t), \psi_{BD}(t)$ — углы закручивания;

$$\begin{aligned} \psi_{AB}(t) &= \begin{cases} \varphi_A(t) - \varphi_B(t) - \frac{\Delta_{AB}}{2}, & \text{при } \varphi_A(t) - \varphi_B(t) \geq \frac{\Delta_{AB}}{2}; \\ 0, & \text{при } -\frac{\Delta_{AB}}{2} < \varphi_A(t) - \varphi_B(t) < \frac{\Delta_{AB}}{2}; \\ \varphi_A(t) - \varphi_B(t) + \frac{\Delta_{AB}}{2}, & \text{при } \varphi_A(t) - \varphi_B(t) \leq -\frac{\Delta_{AB}}{2}; \end{cases} \\ \psi_{BC}(t) &= \begin{cases} \varphi_B(t) - \varphi_C(t) - \frac{\Delta_{BC}}{2}, & \text{при } \varphi_B(t) - \varphi_C(t) \geq \frac{\Delta_{BC}}{2}; \\ 0, & \text{при } -\frac{\Delta_{BC}}{2} < \varphi_B(t) - \varphi_C(t) < \frac{\Delta_{BC}}{2}; \\ \varphi_B(t) - \varphi_C(t) + \frac{\Delta_{BC}}{2}, & \text{при } \varphi_B(t) - \varphi_C(t) \leq -\frac{\Delta_{BC}}{2}; \end{cases} \\ \psi_{BD}(t) &= \begin{cases} \varphi_B(t) - \varphi_D(t) - \frac{\Delta_{BD}}{2}, & \text{при } \varphi_B(t) - \varphi_D(t) \geq \frac{\Delta_{BD}}{2}; \\ 0, & \text{при } -\frac{\Delta_{BD}}{2} < \varphi_B(t) - \varphi_D(t) < \frac{\Delta_{BD}}{2}; \\ \varphi_B(t) - \varphi_D(t) + \frac{\Delta_{BD}}{2}, & \text{при } \varphi_B(t) - \varphi_D(t) \leq -\frac{\Delta_{BD}}{2}; \end{cases} \end{aligned}$$

где $\Delta_{AB}, \Delta_{BC}, \Delta_{BD}$ — люфты [3].

Таблица 1. Параметры крутильно-колебательной модели

Параметры	Обозначение	Значение	Единицы измерения
Осевой момент инерции массы <i>A</i>	J_A	10,737	кг · м ²
Осевой момент инерции массы <i>B</i>	J_B	1,990	кг · м ²
Осевой момент инерции массы <i>C</i>	J_C	0,011	кг · м ²
Осевой момент инерции массы <i>D</i>	J_D	0,011	кг · м ²
Угловая крутильная жесткость связи <i>AB</i>	C_{AB}	415 138	Н · м/рад
Угловая крутильная жесткость связи <i>BC</i>	C_{BC}	4 576	Н · м/рад
Угловая крутильная жесткость связи <i>BD</i>	C_{BD}	4 718	Н · м/рад
Момент электродвигателя	M_A	2 467	Н · м
Момент прокатки на нижнем рабочем валке	M_C	1 480	Н · м
Момент прокатки на верхнем рабочем валке	M_D	987	Н · м

В начальный момент времени (непосредственно перед захватом заготовки рабочими валками) отсутствуют крутильные колебания, поэтому начальные угловые координаты и начальные угловые скорости масс равны нулю:

$$\begin{aligned} \varphi_A(0) = 0; \quad \frac{d\varphi_A(0)}{dt} = 0; \\ \varphi_B(0) = 0; \quad \frac{d\varphi_B(0)}{dt} = 0; \\ \varphi_C(0) = 0; \quad \frac{d\varphi_C(0)}{dt} = 0; \\ \varphi_D(0) = 0; \quad \frac{d\varphi_D(0)}{dt} = 0. \end{aligned}$$

Постановка задачи теоретического исследования следующая: требуется установить, как влияет изменение в достаточно широком диапазоне параметров времени захвата заготовки рабочими валками, величин демпферов и люфтов на коэффициент динамичности и частоту вынужденных крутильных колебаний на каждом из трех участков модели электропривода.

Программирование крутильно-колебательной модели в среде MathCAD

Для решения системы дифференциальных уравнений (1) методом Рунге-Кутты выбран вычислительный блок Given – Odesolve [4], который сначала был запрограммирован на исследование собственных форм и собственных частот крутильных колебаний (рис. 3, 4) на интервалах времени интегрирования $t \in [0, 1]$ и $t \in [0, 100]$:

$$\begin{aligned}
 & \text{Given} \\
 & \varphi_A(0) = 0 \quad \varphi'_A(0) = 0 \\
 & \varphi_B(0) = 0 \quad \varphi'_B(0) = 0 \\
 & \varphi_C(0) = 0 \quad \varphi'_C(0) = 0 \\
 & \varphi_D(0) = 0 \quad \varphi'_D(0) = 0 \\
 & M_{AB}(0) = 0 \quad M_{BC}(0) = 0 \quad M_{BD}(0) = 0 \\
 & M_{AB}(t) = 415138 \cdot (\varphi_A(t) - \varphi_B(t)) \\
 & M_{BC}(t) = 4576 \cdot (\varphi_B(t) - \varphi_C(t)) \\
 & M_{BD}(t) = 4718 \cdot (\varphi_B(t) - \varphi_D(t)) \\
 & 10.737 \cdot \varphi''_A(t) + M_{AB}(t) = 2467 \\
 & 1.990 \cdot \varphi''_B(t) - M_{AB}(t) + M_{BC}(t) + M_{BD}(t) = 0 \\
 & 0.011 \cdot \varphi''_C(t) - M_{BC}(t) = -1480 \\
 & 0.011 \cdot \varphi''_D(t) - M_{BD}(t) = -987 \\
 & \left(\begin{array}{c} \varphi_A \\ \varphi_B \\ \varphi_C \\ \varphi_D \\ M_{AB} \\ M_{BC} \\ M_{BD} \end{array} \right) := \text{Odesolve} \left[\left(\begin{array}{c} \varphi_A \\ \varphi_B \\ \varphi_C \\ \varphi_D \\ M_{AB} \\ M_{BC} \\ M_{BD} \end{array} \right), t, 1 \right] \\
 & t := 0, 0.01 \dots 1
 \end{aligned} \tag{2}$$

Затем вычислительный блок Given – Odesolve (2) был перепрограммирован на теоретическое исследование коэффициентов динамичности K_{AB}, K_{BC}, K_{BD} и времени переходного процесса T_{AB}, T_{BC}, T_{BD} (рис.5–9), с возможностью изменения величины времени захвата заготовки $T_{зах}$ (рис.2), величин люфтов $\Delta_{AB}, \Delta_{BC}, \Delta_{BD}$ и демпферов $\beta_{AB}, \beta_{BC}, \beta_{BD}$ на интервале времени интегрирования $t \in [0, T_{п}]$, где $T_{п} = 10$ с — время прокатки заготовки:

Given

$$\begin{aligned} \varphi_A(0) = 0 & \quad \varphi_B(0) = 0 & \quad \varphi_C(0) = 0 & \quad \varphi_D(0) = 0 \\ \varphi'_A(0) = 0 & \quad \varphi'_B(0) = 0 & \quad \varphi'_C(0) = 0 & \quad \varphi'_D(0) = 0 \\ \psi_{AB}(0) = 0 & \quad \psi_{BC}(0) = 0 & \quad \psi_{BD}(0) = 0 \\ M_{AB}(0) = 0 & \quad M_{BC}(0) = 0 & \quad M_{BD}(0) = 0 \end{aligned}$$

(3)

$$\psi_{AB}(t) = \begin{cases} (\varphi_A(t) - \varphi_B(t)) - \frac{\Delta_{AB}}{2} & \text{if } (\varphi_A(t) - \varphi_B(t)) \geq \frac{\Delta_{AB}}{2} \\ 0 & \text{if } -\frac{\Delta_{AB}}{2} < (\varphi_A(t) - \varphi_B(t)) < \frac{\Delta_{AB}}{2} \\ (\varphi_A(t) - \varphi_B(t)) + \frac{\Delta_{AB}}{2} & \text{if } (\varphi_A(t) - \varphi_B(t)) \leq -\frac{\Delta_{AB}}{2} \end{cases}$$

$$\psi_{BC}(t) = \begin{cases} (\varphi_B(t) - \varphi_C(t)) - \frac{\Delta_{BC}}{2} & \text{if } (\varphi_B(t) - \varphi_C(t)) \geq \frac{\Delta_{BC}}{2} \\ 0 & \text{if } -\frac{\Delta_{BC}}{2} < (\varphi_B(t) - \varphi_C(t)) < \frac{\Delta_{BC}}{2} \\ (\varphi_B(t) - \varphi_C(t)) + \frac{\Delta_{BC}}{2} & \text{if } (\varphi_B(t) - \varphi_C(t)) \leq -\frac{\Delta_{BC}}{2} \end{cases}$$

$$\psi_{BD}(t) = \begin{cases} (\varphi_B(t) - \varphi_D(t)) - \frac{\Delta_{BD}}{2} & \text{if } (\varphi_B(t) - \varphi_D(t)) \geq \frac{\Delta_{BD}}{2} \\ 0 & \text{if } -\frac{\Delta_{BD}}{2} < (\varphi_B(t) - \varphi_D(t)) < \frac{\Delta_{BD}}{2} \\ (\varphi_B(t) - \varphi_D(t)) + \frac{\Delta_{BD}}{2} & \text{if } (\varphi_B(t) - \varphi_D(t)) \leq -\frac{\Delta_{BD}}{2} \end{cases}$$

$$M_{AB}(t) = 415138 \cdot \psi_{AB}(t) + \beta_{AB}(\varphi'_A(t) - \varphi'_B(t))$$

$$M_{BC}(t) = 4576 \cdot \psi_{BC}(t) + \beta_{BC}(\varphi'_B(t) - \varphi'_C(t))$$

$$M_{BD}(t) = 4718 \cdot \psi_{BD}(t) + \beta_{BD}(\varphi'_B(t) - \varphi'_D(t))$$

$$10.737 \cdot \varphi''_A(t) + M_{AB}(t) = 2467 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{0.45 \cdot T_{\text{зак}}}\right) \right)$$

$$1.990 \cdot \varphi''_B(t) - M_{AB}(t) + M_{BC}(t) + M_{BD}(t) = 0$$

$$0.011 \cdot \varphi''_C(t) - M_{BC}(t) = -1480 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{0.45 \cdot T_{\text{зак}}}\right) \right)$$

$$0.011 \cdot \varphi''_D(t) - M_{BD}(t) = -987 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{0.45 \cdot T_{\text{зак}}}\right) \right)$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \\ \varphi_C \\ \varphi_D \\ \psi_{AB} \\ \psi_{BC} \\ \psi_{BD} \\ M_{AB} \\ M_{BC} \\ M_{BD} \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[\begin{pmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \\ \varphi_C \\ \varphi_D \\ \psi_{AB} \\ \psi_{BC} \\ \psi_{BD} \\ M_{AB} \\ M_{BC} \\ M_{BD} \end{pmatrix}, t, T_{\Pi} \right]$$

$$t := 0, 0.01 \dots T_{\Pi}$$

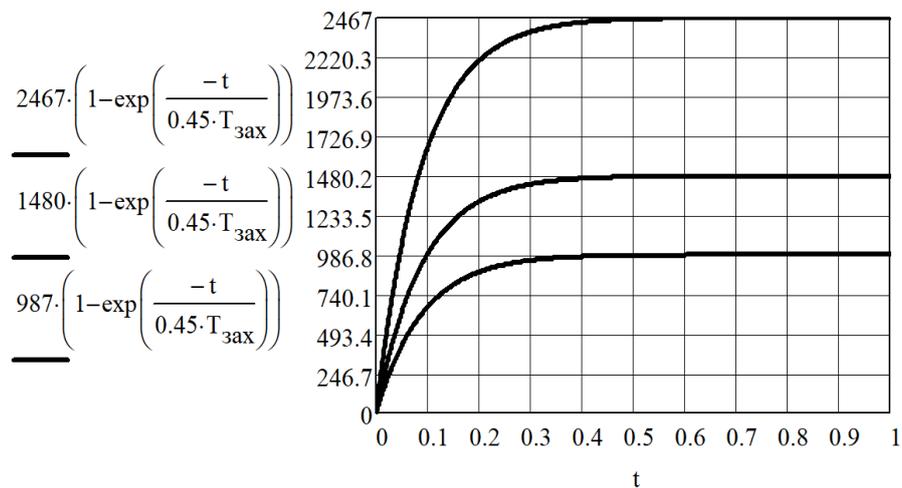


Рис. 2. Компьютерные графики внешних моментов $[Н \cdot м]$, заданных как экспоненциальные функции времени t [с]: $T_{зах} = 0,2$ с — время захвата заготовки рабочими валками

Результаты компьютерного моделирования крутильных колебаний

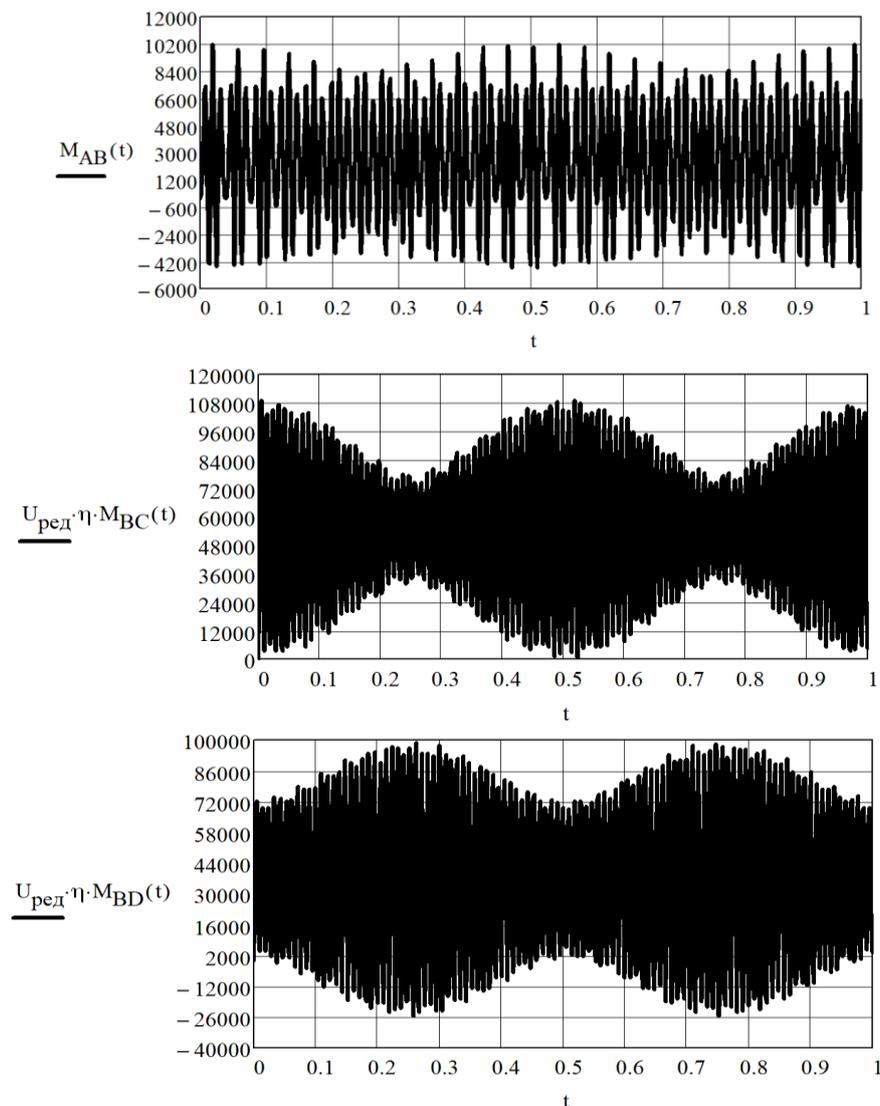


Рис.3. Компьютерные графики изменения моментов M_{AB}, M_{BC}, M_{BD} $[Н \cdot м]$ во времени t [с]: наблюдаются высшие гармоники и биения на интервале $t \in [0, 1]$

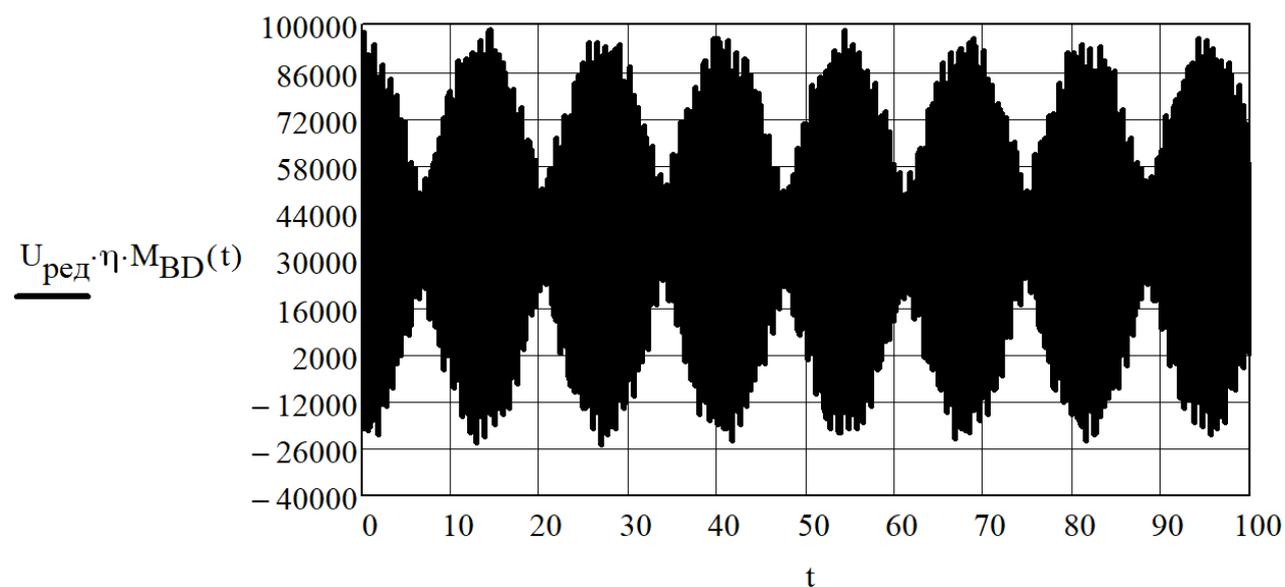
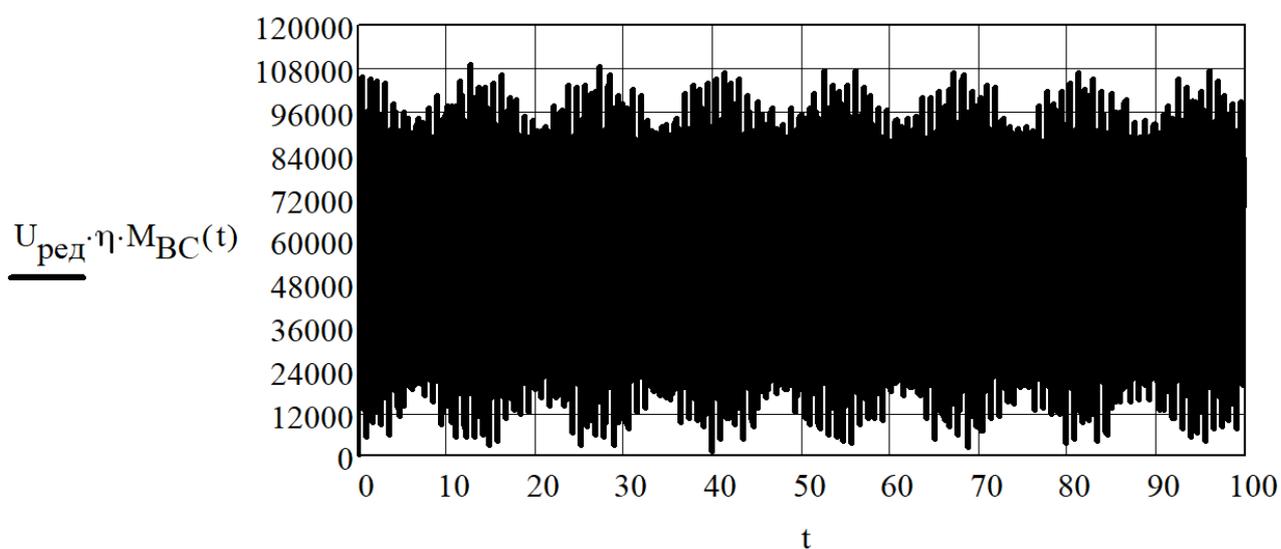
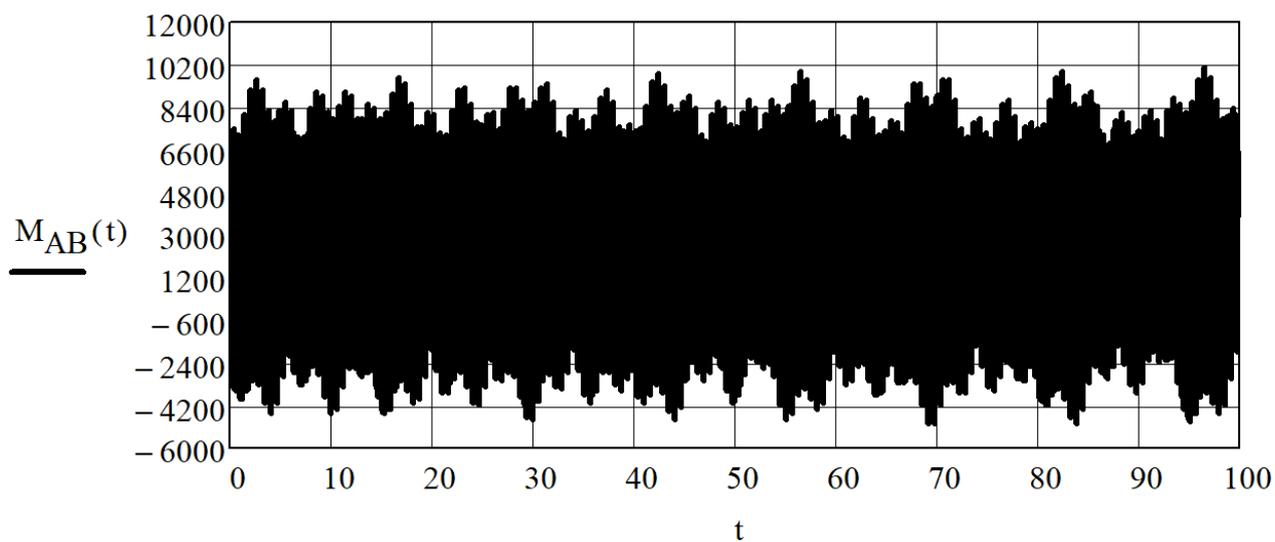


Рис.4. Компьютерные графики изменения моментов M_{AB}, M_{BC}, M_{BD} [Н · м] во времени t [с]: перманентные крутильные колебания на интервале $t \in [0, 100]$

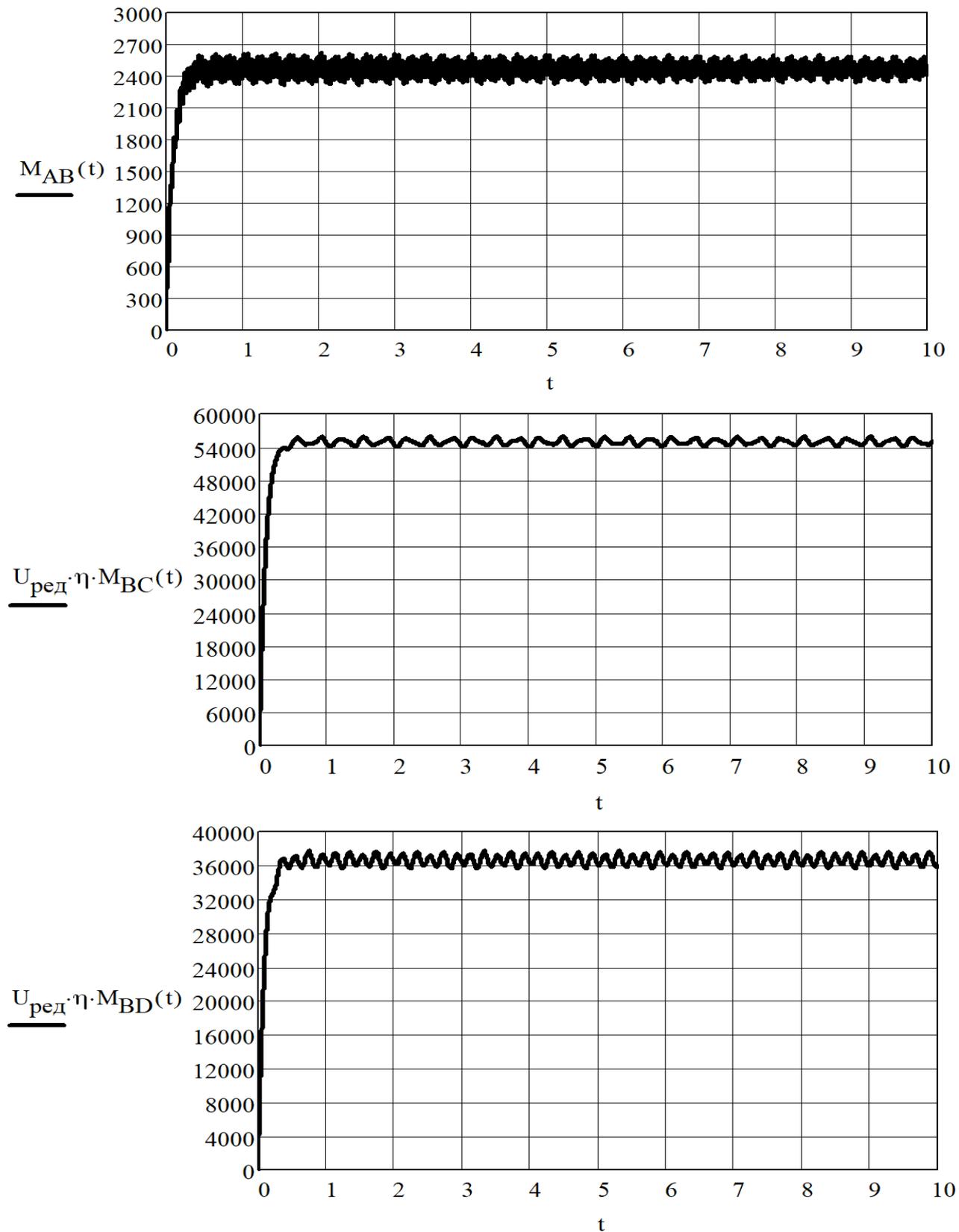


Рис.5. Компьютерные графики изменения моментов M_{AB}, M_{BC}, M_{BD} [Н·м] во времени t [с]:

$$\Delta_{AB} = \Delta_{BC} = \Delta_{BD} = 0; \beta_{AB} = 0,1; \beta_{BC} = 5,4 \cdot 10^{-5}; \beta_{BD} = 5,4 \cdot 10^{-5}; T_{зак} = 0,2 \text{ с}$$

$U_{ред} = 49,5$ — передаточное число редуктора; $\eta = 0,75$ — КПД электропривода

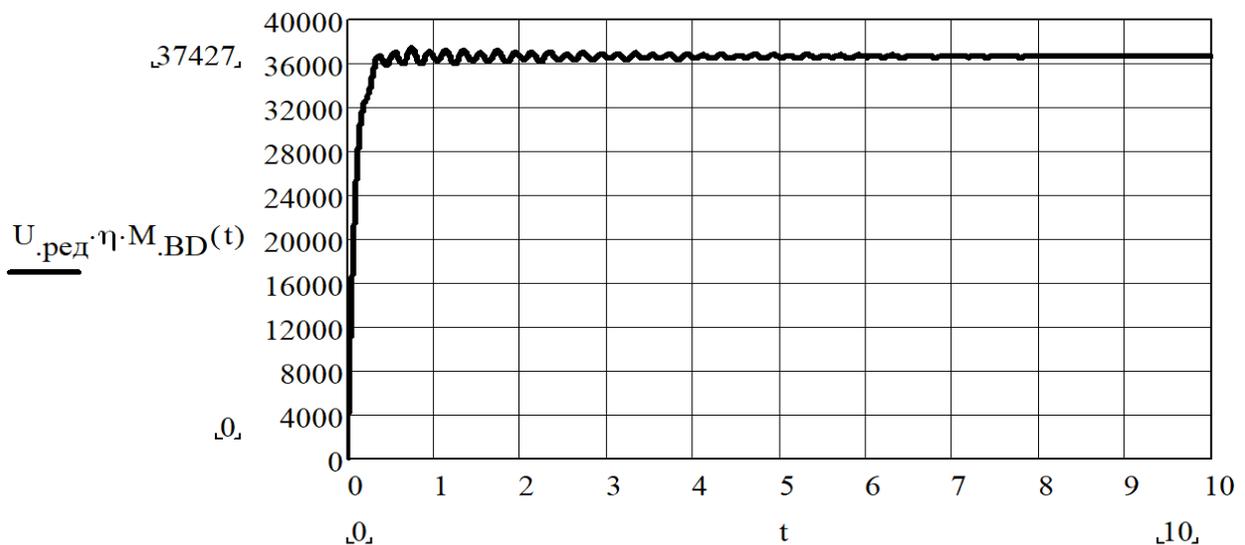
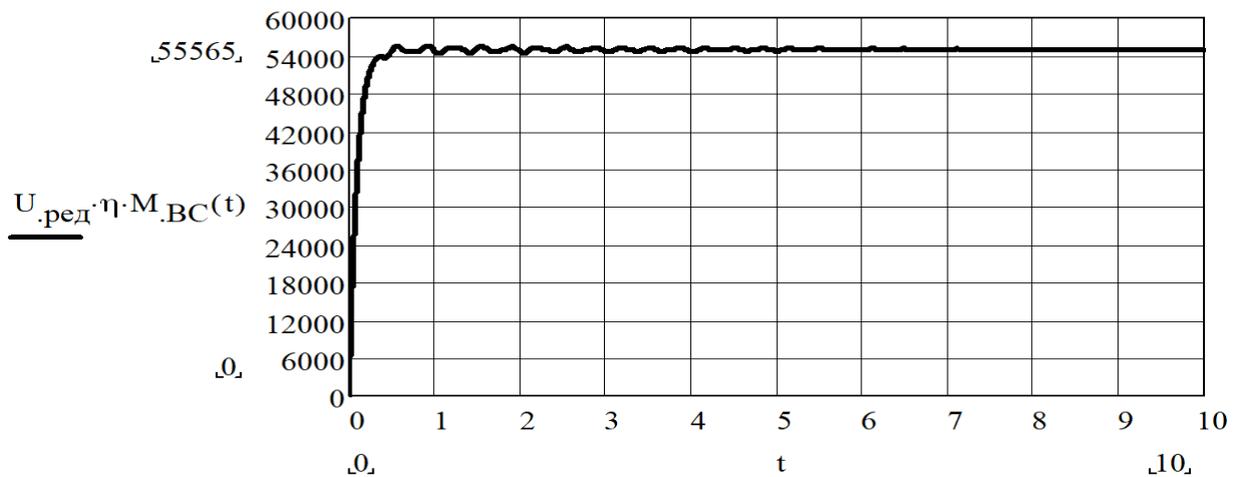
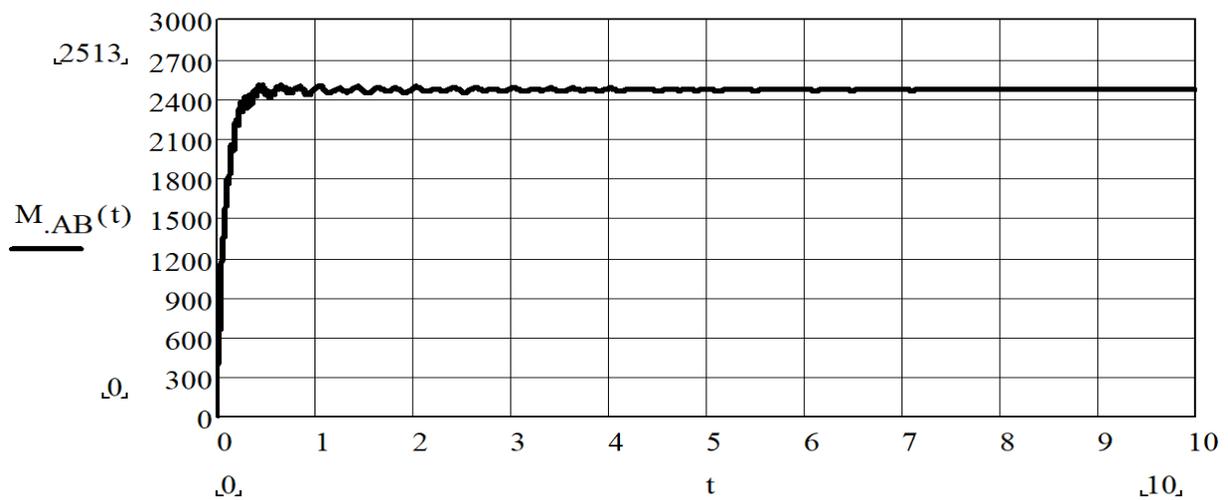


Рис.6. Компьютерные графики изменения моментов M_{AB}, M_{BC}, M_{BD} [Н·м] во времени t [с]:

$$\Delta_{AB} = \Delta_{BC} = \Delta_{BD} = 0; \beta_{AB} = 10; \beta_{BC} = 5,4 \cdot 10^{-3}; \beta_{BD} = 5,4 \cdot 10^{-3};$$

$$T_{\text{зах}} = 0,2 \text{ с}; T_{AB} \approx 7 \text{ с}; T_{BC} \approx 7 \text{ с}; T_{BD} \approx 8 \text{ с};$$

$$K_{AB} = 2513/2467 \approx 1; K_{BC} = 55565/55200 \approx 1; K_{BD} = 37427/36800 \approx 1$$

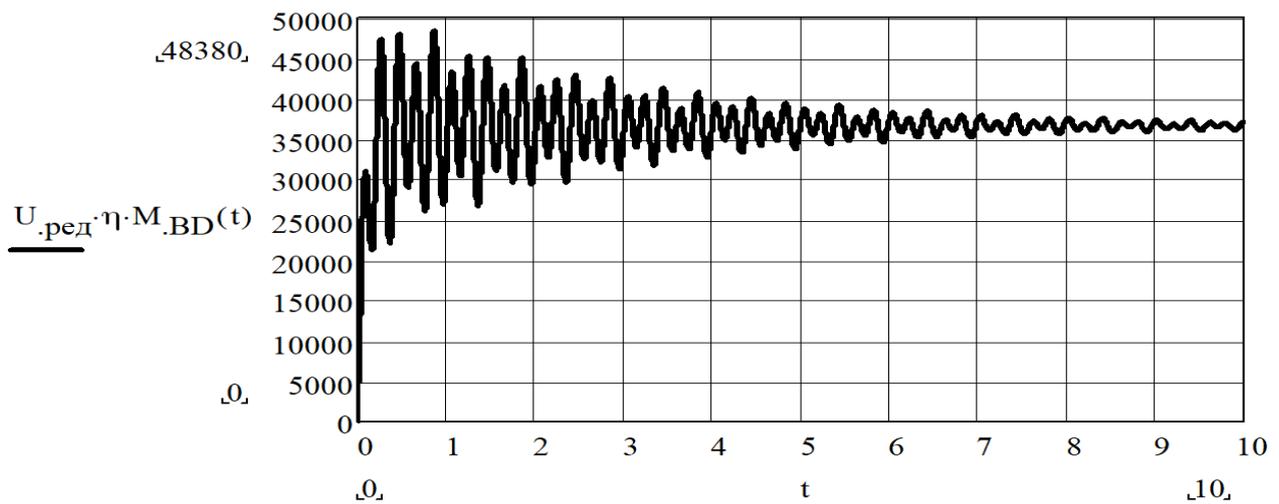
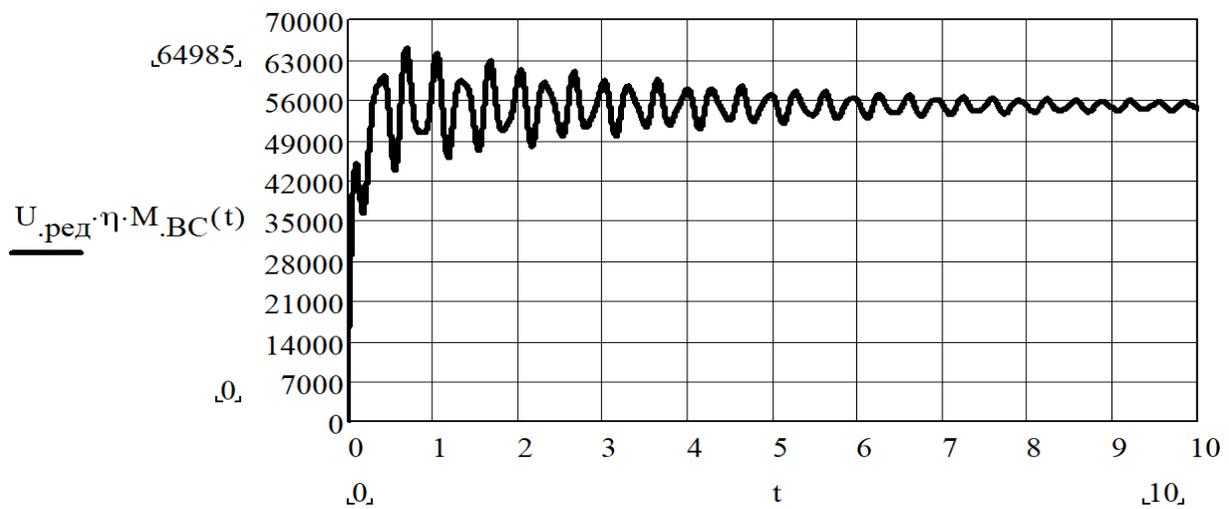
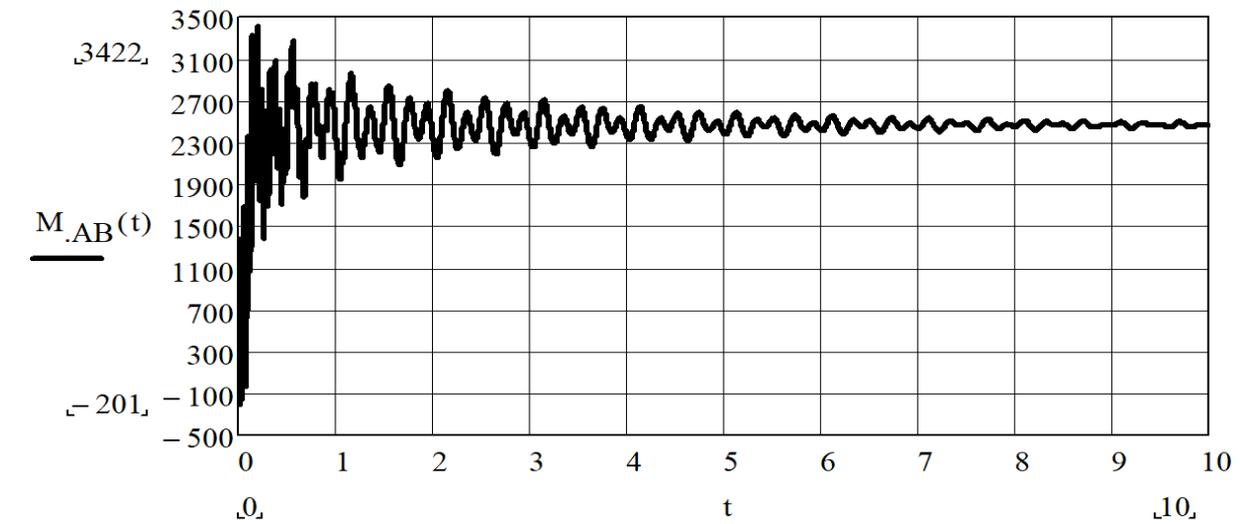


Рис.7. Компьютерные графики изменения моментов M_{AB}, M_{BC}, M_{BD} [Н · м] во времени t [с]:

$$\Delta_{AB} = 0,005; \Delta_{BC} = 0,25; \Delta_{BD} = 0,25; \beta_{AB} = 10; \beta_{BC} = 5,4 \cdot 10^{-3}; \beta_{BD} = 5,4 \cdot 10^{-3};$$

$$T_{\text{зах}} = 0,2 \text{ с}; T_{AB} \approx 10 \text{ с}; T_{BC} \approx 10 \text{ с}; T_{BD} \approx 10 \text{ с};$$

$$K_{AB} = 3422/2467 \approx 1,4; K_{BC} = 64985/55200 \approx 1,2; K_{BD} = 48380/36800 \approx 1,3$$

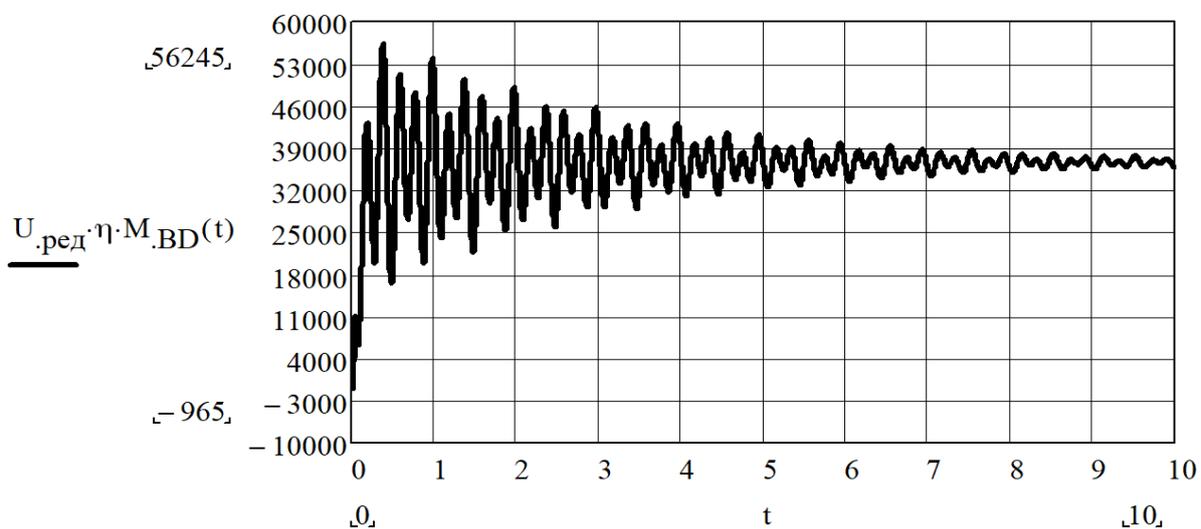
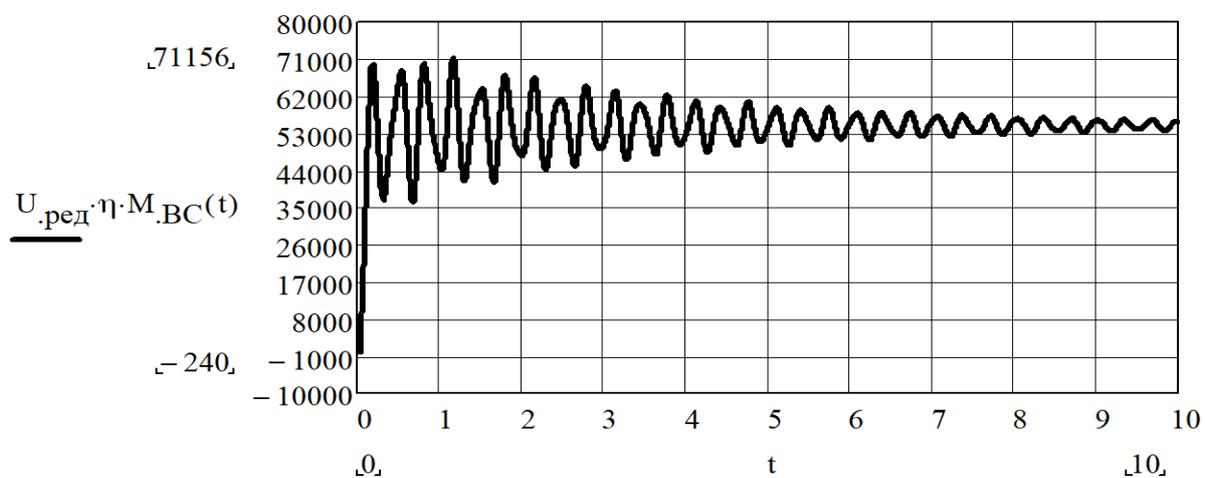
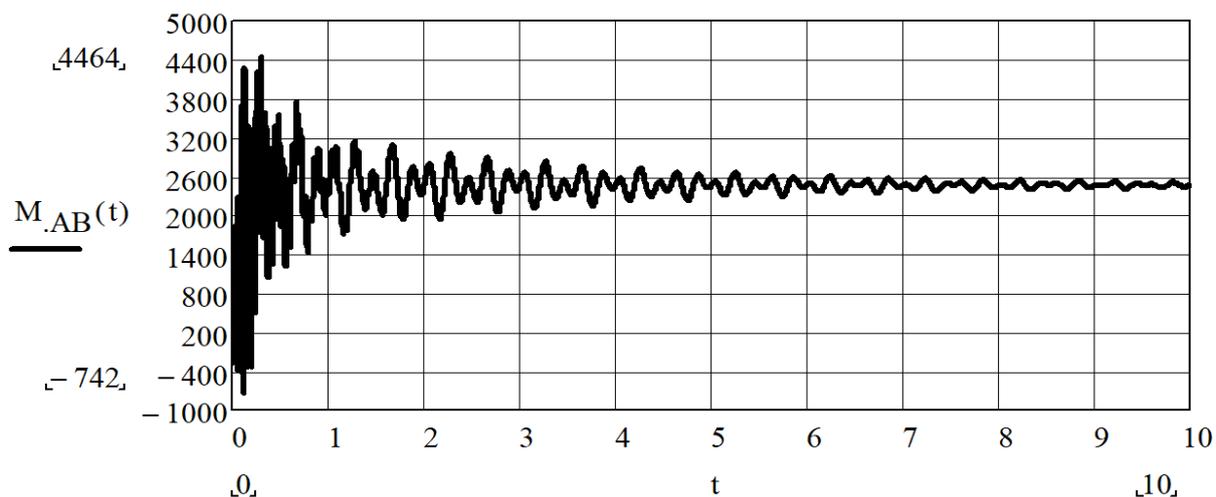


Рис.8. Компьютерные графики изменения моментов M_{AB}, M_{BC}, M_{BD} [Н·м] во времени t [с]:

$$\Delta_{AB} = 0,01; \Delta_{BC} = 0,5; \Delta_{BD} = 0,5; \beta_{AB} = 10; \beta_{BC} = 5,4 \cdot 10^{-3}; \beta_{BD} = 5,4 \cdot 10^{-3};$$

$$T_{\text{зах}} = 0,2 \text{ с}; T_{AB} \approx 10 \text{ с}; T_{BC} \approx 10 \text{ с}; T_{BD} \approx 10 \text{ с};$$

$$K_{AB} = 4464/2467 \approx 1,8; K_{BC} = 71156/55200 \approx 1,3; K_{BD} = 56245/36800 \approx 1,5$$

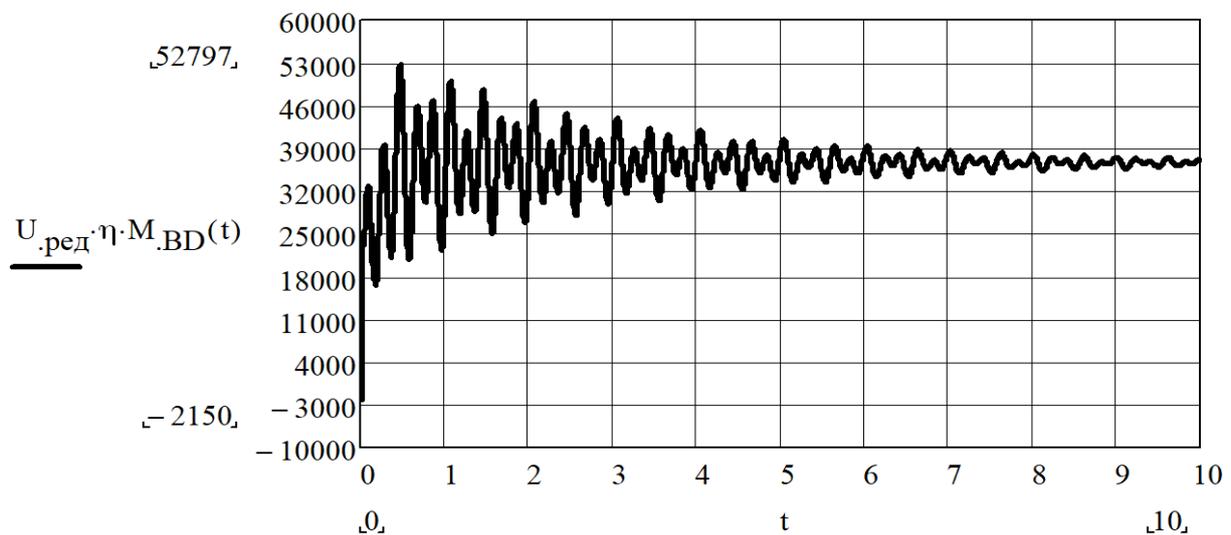
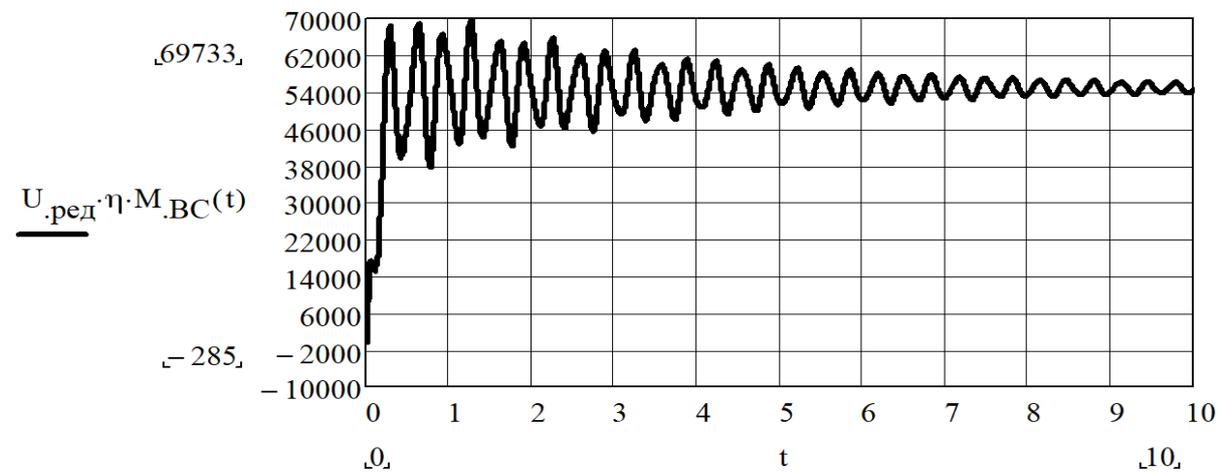
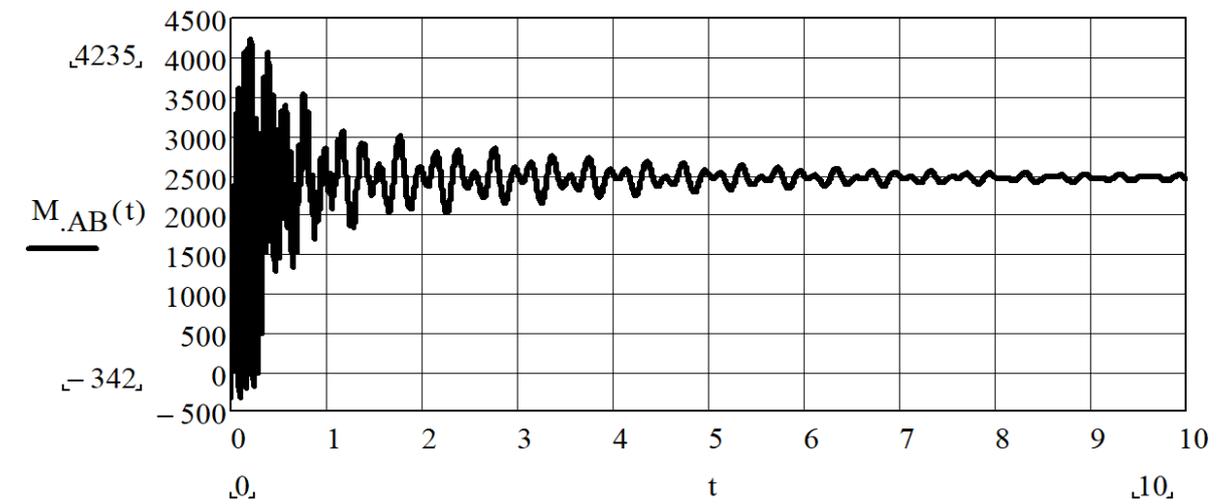


Рис.9. Компьютерные графики изменения моментов M_{AB}, M_{BC}, M_{BD} [Н · м] во времени t [с]:

$$\Delta_{AB} = 0,01; \Delta_{BC} = 0,5; \Delta_{BD} = 0,5; \beta_{AB} = 10; \beta_{BC} = 5,4 \cdot 10^{-3}; \beta_{BD} = 5,4 \cdot 10^{-3};$$

$$T_{\text{зах}} = 0,3 \text{ с}; T_{AB} \approx 10 \text{ с}; T_{BC} \approx 10 \text{ с}; T_{BD} \approx 10 \text{ с};$$

$$K_{AB} = 4235/2467 \approx 1,7; K_{BC} = 69733/55200 \approx 1,26; K_{BD} = 52797/36800 \approx 1,4$$

Заключение

В результате исследования на интервалах времени интегрирования $t \in [0,1]$ и $t \in [0,100]$ свободных крутильных колебаний, возникших после внезапного ступенчатого приложения нагрузки M_A, M_C, M_D , обнаружено, что эти колебания перманентны (не затухают) на участках AB, BC и BD , имеют сложную форму (наблюдаются высшие гармоники и биения), что затрудняет графическое определение собственных частот (см. рис. 3, 4).

Увеличение значений коэффициентов демпфирования $\beta_{AB}, \beta_{BC}, \beta_{BD}$ в 10 раз привело крутильные колебания, практически перманентные на интервале времени интегрирования $t \in [0, 10]$, к затуханию за 7...8 секунд (см. рис. 5, 6).

Увеличение люфтов $\Delta_{AB}, \Delta_{BC}, \Delta_{BD}$ в 2 раза привело к незначительному возрастанию коэффициентов динамичности K_{AB}, K_{BC}, K_{BD} (см. рис. 7, 8).

Изменение времени захвата заготовки $T_{зах}$ от 0,2 до 0,3 с вызвало снижение коэффициентов динамичности K_{AB}, K_{BC}, K_{BD} (см. рис. 8, 9).

Список литературы

- [1]. Мальцев А.А. Идентификация параметров крутильно-колебательной модели электропривода клетки дуо-450 // Инженерный вестник. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2017. № 07. Режим доступа: <http://engsi.ru/doc/860317.html> (дата обращения 27.08.2017).
- [2]. Теория механизмов и машин. Курсовое проектирование: Учеб. пособие / Под ред. Г.А. Тимофеева, Н.В. Умнова. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2012. 169 с.
- [3]. Мальцев А. А., Соболев В. А., Кожевников И. В. Исследование в среде MathCAD крутильных колебаний электропривода стана дуо-160 // Инженерный вестник. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 09. Режим доступа: <http://engbul.bmstu.ru/doc/738290.html> (дата обращения 27.08.2017).
- [4]. MATHCAD // Образовательный математический сайт Exponenta.ru [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.exponenta.ru/soft/Mathcad/Mathcad.asp> (дата обращения: 27.08.2017).