

Фильтрация шумов в сигналах с помощью преобразований Фурье

06, июнь 2017

Титов К. В.

УДК: 539.3

¹Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

kvtito@mail.ru

Введение

Решение задач спектрального анализа и синтеза широко используется в механике, термодинамике, электротехнике и радиотехнике. В целом ряде случаев электрические сигналы имеют математическое описание с возможностью их моделирования в системах компьютерной математики (СКМ). Особо следует отметить ряды Фурье, которые способны описать любую периодическую зависимость [4]. Гармоники ряда Фурье имеют частоту, кратную частоте повторения сигнала и определенную амплитуду, и фазу. Непериодические функции (сигналы) также могут быть представлены, но уже интегралом Фурье. Разложение сигналов в ряд Фурье называется спектральным анализом, а воссоздание сигналов - спектральным синтезом.

Изучение и исследование рядов и преобразований Фурье, их применение в технике намного эффективнее вести в СКМ, позволяющих отображать динамические процессы в виде анимационных клипов и трёхмерной графики, а также имеющих возможность интерактивного ввода данных.

Методы Фурье разложений и преобразований с успехом применяются в решении задач теплопроводности, фильтрации и др. и входят в образовательную программу обучения в вузах. Важную роль в обучении играют компьютерные технологии (www.bmstu.ru/ps/~kvtitov), основанные на применении СКМ. Ниже будет рассмотрена фильтрация шумов в сигналах с помощью преобразований Фурье. Практически все электронные схемы "шумят" (создают случайные сигналы в виде помех), а их подавление является важной задачей.

Постановка задачи и её решение

Рассмотрим фильтрацию зашумленных сигналов с помощью дискретного преобразования Фурье [5]. Этот процесс можно рассматривать как один из методов математической обработки сложных сигналов. Он является разновидностью регрессии, когда в качестве функции регрессии выступает ряд Фурье.

Конечно, существуют и другие программы цифровой обработки данных, реализующие различные способы улучшения отношения сигнал/шум, в том числе временная фильтрация, низкочастотные фильтры, фильтры Колмогорова-Винера и др.

1. Косинус-преобразование Фурье

Напомним [1], что косинус-преобразование Фурье есть:

$$F(h) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cdot \cos(h \cdot t) dt \quad (1)$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} F(h) \cdot \cos(h \cdot t) dh \quad (2)$$

Запишем его в дискретном виде, который называется цифровым представлением любой функции в ПК. Для этого введем дискретные (или так называемые ранжированные) переменные h_i и t_j (где d - "шаг" по h или t , N - число "шагов") следующим образом:

$$d := 0.08, N := 63, i := 0, 1..N, j := 0, 1..N, h_i := d \cdot i, t_j := d \cdot j, c := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (3)$$

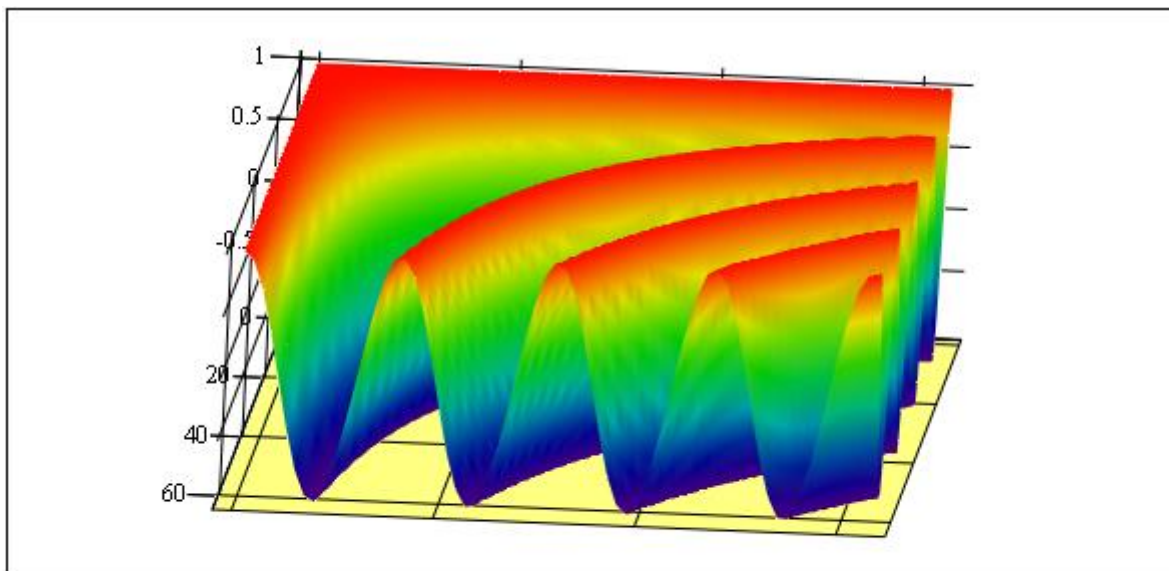
Тогда $\cos(h_i \cdot t_j)$ будет представлен матрицей M с элементами $M_{i,j}$

$$M_{i,j} := \cos(h_i \cdot t_j) \quad (4)$$

$M =$

	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0.999
2	1	1	1	0.999	0.999	0.998
3	1	1	0.999	0.998	0.997	0.995
4	1	1	0.999	0.997	0.995	0.992
5	1	0.999	0.998	0.995	0.992	0.987
6	1	0.999	0.997	0.993	0.988	0.982

Графическая иллюстрация этой зависимости в трехмерном пространстве $M(h,t)$ представлена на рис.1.



М

Рис. 1. График функции $\cos(h, t)$

В качестве исследуемой функции возьмем:

$$f0_j := e^{-t_j} \quad (5)$$

Подмешаем в эту функцию (сигнал) шум с помощью генератора случайных чисел (функция *rnd*), встроенного в систему *MathCAD*, таким образом:

$$f_j := f0_j \cdot (rnd(1) + 0.5) \quad (6)$$

Это и будет смоделированный нами зашумленный сигнал, который далее мы будем пытаться очистить от шума с помощью преобразования Фурье. На рис.2 представлены графики исходного и зашумленного сигналов.

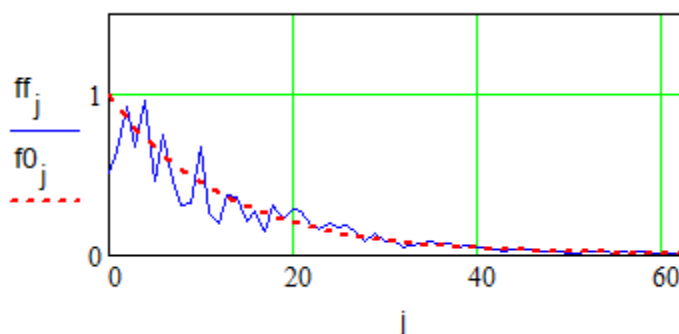


Рис. 2. Сравнение исходного и зашумленного сигналов

Запишем (1) в дискретном виде в векторно-матричной форме:

$$Fh := c \cdot d \cdot (M \cdot ff) \quad (7)$$

$$Fh^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.756	0.751	0.738	0.716	0.686	0.651	0.611	0.569	0.525	0.482

где Fh - вектор-столбец значений (1), соответствующих дискретной переменной h_j ;

ff – вектор-столбец зашумленного сигнала (6).

Обозначая через f_i - вектор-столбец дискретных значений (2), запишем также и (2) в векторно-матричной форме

$$f_i := c \cdot d \cdot M^T \cdot Fn$$

или, что одно и то же:

$$ft := c^2 \cdot d^2 \cdot (M^T \cdot M \cdot ff) \quad (8)$$

Если в формулу (7) мы подставляем зашумленный сигнал ff , то какой же сигнал должна представлять формула (8). С точки зрения теории - исходный. Однако практически за счет усреднения мы получим отфильтрованный или очищенный от шума сигнал. Графики обоих сигналов: ff_i - зашумленный и ft_j - отфильтрованный приведены на рис.3.

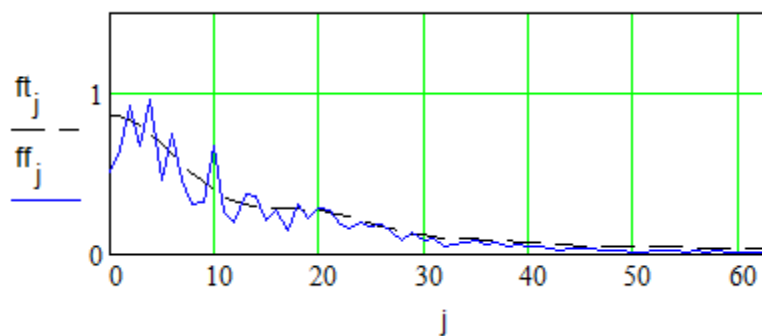


Рис. 3. Графическая интерпретация косинус-преобразования Фурье

На рис.4 приведено сравнение отфильтрованного сигнала ft и исходного сигнала $f0_j := e^{-j}$.

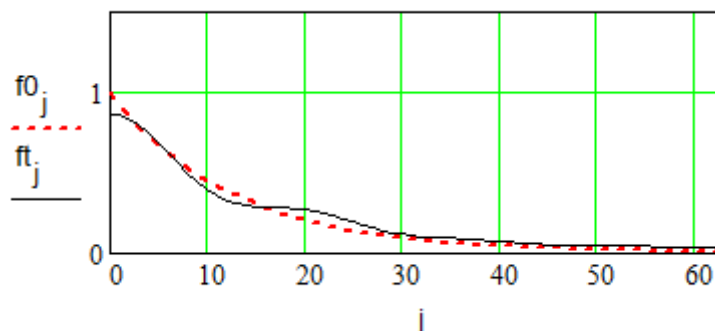


Рис. 4. Исходный и отфильтрованный сигналы

Теперь если бы в формулу (8) мы подставили исходный сигнал (5), то для этого случая аналогично получили бы

$$ft0 := c^2 \cdot d^2 \cdot M^T \cdot M \cdot f0 \quad (9)$$

Сравнение исходного сигнала $f0(t)$ и сигнала (9) с отфильтрованным сигналом (8) дано на рис. 5.

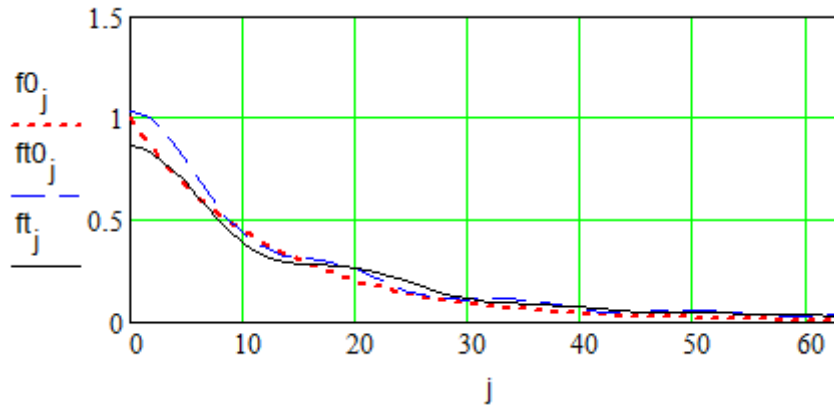


Рис. 5. Косинус-преобразование Фурье для двух разных сигналов

2. Быстрое преобразование Фурье (БПФ)

Проведем то же самое, но используя **БПФ** прямое fft и обратное $ifft$ с помощью так называемых быстрых алгоритмов [4]. В терминах *MathCAD* эта запись выглядит так:

$$P := fft(ff), \quad N1 := last(P), \quad N1 = 32, \quad z := ifft(P), \quad N2 := last(z), \quad N2 = 63,$$

где $last(P)$ - индекс последнего элемента вектора P , аналогично $last(z)$.

Полученный результат обратного преобразования Фурье, записанный в векторе z , сравним на графике рис.6 с вектором исходного зашумленного сигнала ff . Эти два графика практически совпадают, что и следовало ожидать при БПФ.

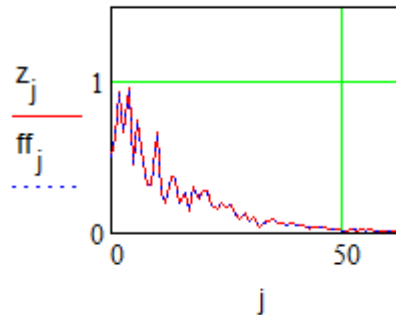


Рис. 6. Быстрое преобразование Фурье

Но нам надо отфильтровать шум. Для этого запишем простую процедуру фильтрации на базе применения обратного дискретного преобразования Фурье (ДПФ):

$$m := 0..N1, \quad r := 0.3$$

$$g_m := \begin{cases} P_m & \text{if } |P_m| > r \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad z1 := ifft(g)$$

Смысл этой фильтрации в выделении определенной части спектра сигнала рис.7 и его обратном преобразовании Фурье, результат которого записывается в вектор $z1$. На рис.8 сравниваются два сигнала: зашумленный ff и отфильтрованный $z1$.

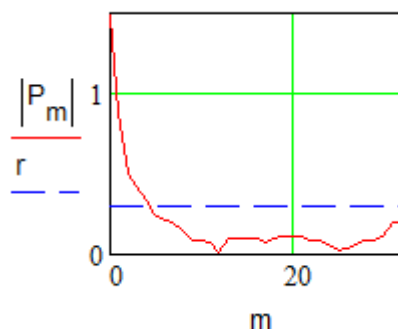


Рис. 7.

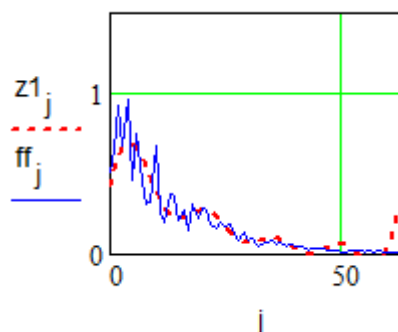


Рис. 8.

Как видно из этих рисунков фильтрация прошла успешно.

Приведем еще один пример фильтрации сигнала $\sin(ax) + \cos(bx)$. Пусть:

$$i := 0..127, \quad a := 15, b := 19, h := 0.03.$$

Запишем в дискретном виде исходный сигнал (рис.9):

$$f_i := (\sin(a \cdot h \cdot i)) + \cos(b \cdot h \cdot i).$$

Зашумленный сигнал (рис.10): $S_i := f_i + \text{rnd}(2) - 1$

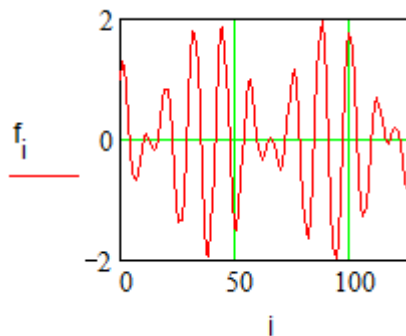


Рис. 9.

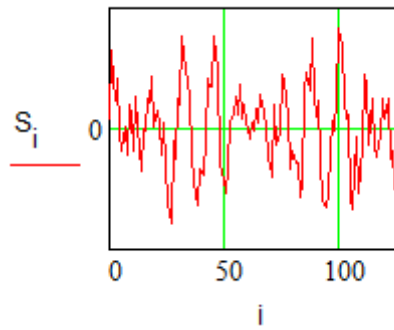


Рис. 10.

Проведем прямое преобразование Фурье сигнала S , а результат запишем в вектор $C1$

$$C1 := \text{fft}(S), N3 := \text{last}(C1), N3 = 64, u := 1.5 + \frac{1}{10} \cdot \text{FRAME}$$

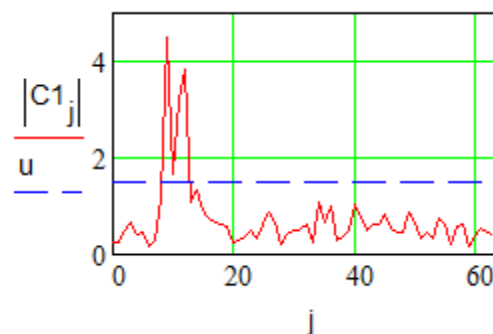


Рис. 11.

Построим график спектральной плотности сигнала, который поясняет суть фильтрации и представлен на рис.11

Для данного сигнала повторим выше описанную процедуру фильтрации

$$j := 0..N3$$

$$g_j := \begin{cases} C1_j & \text{if } |C1_j| > u \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Т.о., фильтр выделяет лишь те области частот (см. рис.11), которые близки к гармоническим составляющим исходного сигнала и отсеивает прочие. Проведем обратное преобразование Фурье:

$$zf := \text{ifft}(q)$$

На рис.12 изображен сигнал после цифровой фильтрации с помощью дискретного преобразования Фурье.

$$N4 := \text{last}(zf), N4 = 127, i := 0..N4$$

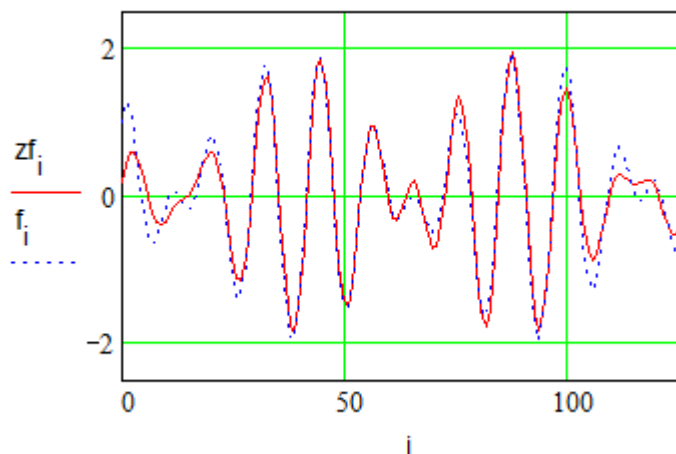


Рис. 12.

Картина фильтрации в этом примере упрощена, но хорошо отражает математическую сторону этого сложного процесса. В режиме анимации можно выбрать значение u , которое задаст оптимальный параметр фильтрации.

Заключение

Учёт свойств и особенностей информативного сигнала и помехи указывает выбор способа борьбы с шумами. Причём, чем известнее свойства сигнала и шума, тем эффективнее будет их цифровая обработка. При этом, несмотря на обилие стандартных программ фильтрации, априорное знание свойств сигнала и шума позволяет создавать новые методы и алгоритмы борьбы с шумами.

Для фильтрации высокочастотного шума может быть применён фильтр низких частот. Можно сделать вывод о том, что фильтры низкой частоты, высокой частоты и полосовые фильтры эффективны в том случае, когда частотные спектры сигнала и шума не перекрываются. Наилучшее разделение сигнала и шума обеспечивает фильтр Колмогорова-Винера. Проведенное исследование отношения сигнал/шум и уменьшения погрешности обработанного сигнала в сравнении с исходным, используя БПФ-ОБПФ, позволило найти оптимальную полосу пропускания фильтра.

Таким образом, решение поставленной задачи в среде *MathCAD* имеет не только практический результат, но и лучше раскрывает методы преобразований Фурье и возможности их применения в технике. Процесс решения сопровождается наглядной "живой" графикой, в том числе трёхмерной. Иллюстрация динамики фильтрации дана в виде анимационного клипа, позволяющего выбрать оптимальные параметры фильтра.

Список литературы

- [1]. Титов К.В., Горелов Н.Д. Функции комплексной переменной, ряды и операционное исчисление в задачах и примерах: Компьютерные технологии решения задач в Wolfram Mathematica: учеб. пособие. М.: ИЦ РИОР, НИЦ ИНФРА-М. 2017. 238 с. DOI: <https://doi.org/10.12737/25089>.

- [2]. Титов К.В. Компьютерная математика: Учеб. пособие. М.: ИЦ РИОР, НИЦ ИН-ФРА-М. 2016. 261 с. Режим доступа: <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=523231> (дата обращения: 3.05.2017). DOI: www.dx.doi.org/10.12737/5954.
- [3]. Дьяконов В.П., Абраменкова И.В. MathCAD 7.0 в математике, физике и в Internet. М.: Нолидж. 1998. 345 с.
- [4]. Смирнов В.И. Курс высшей математики. В 5-ти т. Т.4. Ч.1. 6-е изд. М.: Изд-во «Наука». 1974. 336 с.
- [5]. Титов К.В. Компьютерные технологии в вопросах изучения и решения задач интегральных преобразований и операционного исчисления: Учебное пособие по курсу "Спецглавы высшей математики". М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2001г. 27 с.