электронный научно-технический журнал
ИНЖЕНЕРНЫЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51036. ISSN 2307-0595

Блочно-модульный принцип расчета динамических характеристик системы подрессоривания автомобиля

12, декабрь 2016

Лахтюхов М. Г.[1,*], Жеглов Л. Ф.[1]

УДК: 629.341

[1]Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
*motor@bmstu.ru

Введение

При исследовании систем подрессоривания нередко рассматриваются плоские линейные динамические системы, состоящие из конечного числа масс, соединенных между собой и с дорожной поверхностью с помощью безинерционных упругих и диссипативных связей [1-4]. В этом случае обычно используется два типа масс, имеющих соответственно одну или две степени свободы. В дальнейшем для удобства изложения в зависимости от числа степеней свободы соответствующие массы будем называть массами первого или второго типа. Массы обоих типов могут перемещаться в вертикальном направлении, а массы второго типа кроме того могут поворачиваться вокруг поперечной оси автомобиля, проходящей через центр массы. Произвольная i-я масса первого типа характеризуются только массой m_i, а i-я масса второго типа – и массой m_i и моментом инерции J_i.

Если в динамической модели имеется n_1 масс первого типа и n_2 масс второго типа, то общее число степеней свободы равно $n = n_1 + 2n_2$.

Расчет амплитудно-частотных характеристик плоских линейных динамических систем

Дифференциальные уравнения голономной динамической системы с сосредоточенными параметрами и стационарными связями могут быть получены с помощью дифференциальных уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i \qquad i = \overline{1, n}, \tag{1}$$

где T, Π – соответственно кинетическая и потенциальная энергии системы;

Φ – диссипативная функция системы;

Q_i – i –я обобщенная возмущающая сила;

$q_i, \dot{q}_i$ – i –е обобщенные координата и скорость;

t – время.

За обобщенные координаты для всех масс системы выберем вертикальные перемещения, отсчитываемые вверх от положения статического равновесия центров масс, а для масс второго типа, кроме того, – угловые перемещения, отсчитываемые от положения равновесия этих масс против часовой стрелки. Это позволяет исключить силы тяжести масс, так как они в положении статического равновесия уравновешиваются силами упругости пружин [5].

При малых колебаниях около положения статического равновесия кинетическая и потенциальная энергии системы, а также ее диссипативная функция могут быть выражены квадратичными формами от обобщенных координат:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j\ ,\quad \Pi=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}q_iq_j\ ,\quad \Phi=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j\ , \tag{2}$$

где a_{ij} – соответственно инерционные коэффициенты, c_{ij}, b_{ij} – коэффициенты жесткости и диссипации.

В общем случае нумерация масс может осуществляться в произвольном порядке. Однако для удобства массам первого типа будем присваивать номера от 1 до n_1, массам второго типа – от n_1+1 до n_2 (рис. 1). Тогда первые n_1+n_2 компонент вектора $\boldsymbol{q}$ представляют собой вертикальные перемещения масс первого и второго типа

$$q_i = x_i,\ i=\overline{1, n_1+n_2}\ ,$$

а последние n_2 компонент вектора $\boldsymbol{q}$ – угловые перемещения масс второго типа

$$q_{n_2+i}=\alpha_i,\ i=\overline{n_1+1, n_1+n_2}\ .$$

Кинетическая энергия системы определяется по формуле

$$T=\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n_1}m_i\dot{x}_i^2+\sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}\left(m_j\dot{x}_j^2+J_j\dot{\alpha}_j^2\right)\right]$$

или

$$T=\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n_1+n_2}m_i\dot{q}_i^2+\sum_{j=n_1+n_2+1}^{n}J_{j-n_2}\dot{q}_j^2\right]. \tag{3}$$

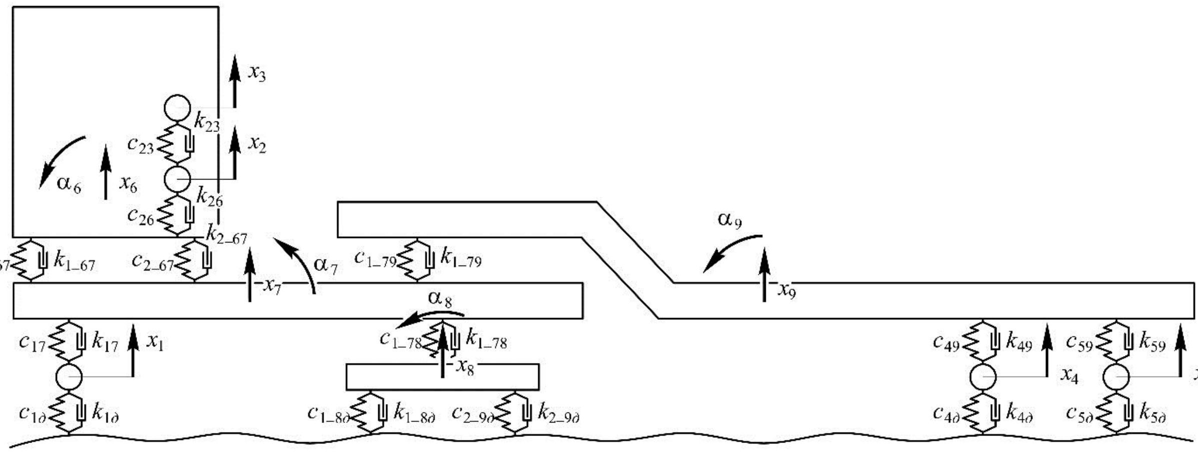

Рис. 1. Схема плоской динамической системы с 13-ю степенями свободы, эквивалентная системе подрессоривания транспортного средства

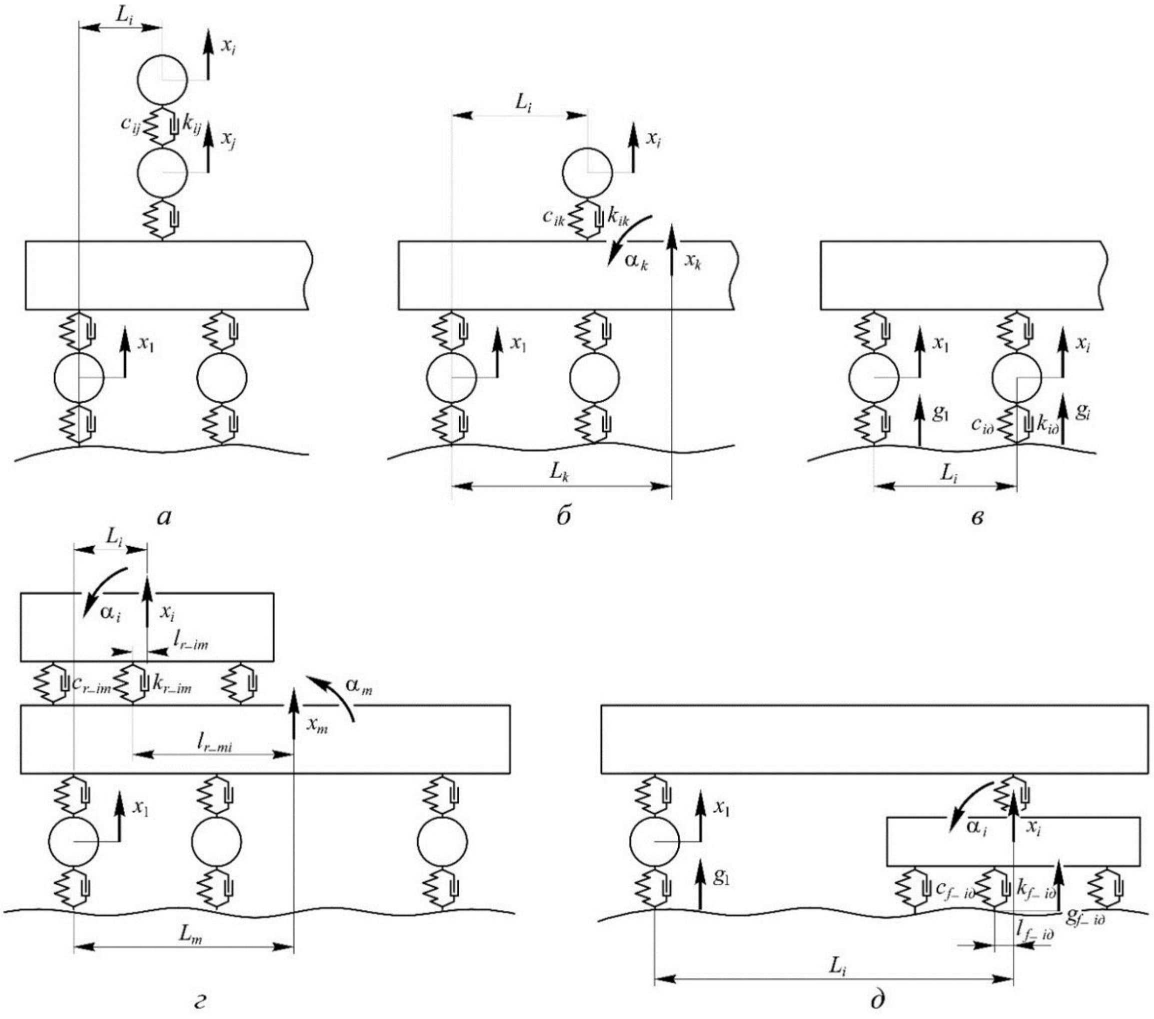

Рис. 2. Типовые динамические подсистемы

С целью упрощения последующих расчетов в исходной системе в зависимости от типа соединяемых масс целесообразно выделить ряд подсистем, для каждой из которых и потенциальная энергия, и диссипативная функция вычисляются по однотипным формулам. Таких подсистем обычно пять (рис. 2):

- две массы первого типа с упругой связью между ними;
- масса первого типа и масса второго типа с упругой связью между ними;
- масса первого типа, опирающаяся на дорожную поверхность при помощи упругой связи;
- две массы второго типа с установленными между ними несколькими упругим связями;
- масса второго типа, опирающаяся на дорожную поверхность при помощи нескольких упругих связей.

Однако при необходимости могут быть добавлены и иные подсистемы.

Тогда и потенциальную энергию, и диссипативную функцию динамической системы можно представить в виде суммы потенциальных энергий и диссипативных функций отдельных подсистем (табл. 1)

$$\Pi = \sum_{l=1}^{nl} \Pi_l^{(1-1)} + \sum_{m=1}^{nm} \Pi_m^{(1-2)} + \sum_{p=1}^{np} \Pi_p^{(1-\partial)} + \sum_{s=1}^{ns} \Pi_s^{(2-2)} + \sum_{t=1}^{nt} \Pi_t^{(2-\partial)} \quad (4)$$

и

$$\varPhi = \sum_{l=1}^{nl} \varPhi_l^{(1-1)} + \sum_{m=1}^{nm} \varPhi_m^{(1-2)} + \sum_{p=1}^{np} \varPhi_p^{(1-\partial)} + \sum_{s=1}^{ns} \varPhi_s^{(2-2)} + \sum_{t=1}^{nt} \varPhi_t^{(2-\partial)} \quad (5)$$

где nl – число пар масс первого типа, соединенных друг с другом;

nm – число пар масс первого и второго типа, соединенных друг с другом;

np и nt – соответственно число масс первого и второго типа, опирающихся на дорожную поверхность;

ns – число пар масс второго типа, соединенных друг с другом.

Таблица 1. Типовые динамические подсистемы и их потенциальная энергия и диссипативные функции

Тип подсистемы	Номер подсистемы	Номера и тип соединяемых масс	Потенциальная энергия	Диссипативная функция
$\varPi_p^{(1-1)}$	p	i-я масса первого типа и j-я масса первого типа	$\frac{1}{2}c_{ij}\left(x_i - x_j\right)^2$	$\frac{1}{2}k_{ij}\left(\dot{x}_i - \dot{x}_j\right)^2$
$\varPi_s^{(1-2)}$	s	i-я масса первого типа и k-я масса второго типа	$\frac{1}{2}c_{ik}\left[x_i - \left(x_k + \left(L_i - L_k\right)\alpha_k\right)\right]^2$	$\frac{1}{2}k_{ik}\left[\dot{x}_i - \left(\dot{x}_k + \left(L_i - L_k\right)\dot{\alpha}_k\right)\right]^2$
$\varPi_t^{(1-\partial)}$	t	i-я масса первого типа и дорожная поверхность	$\frac{1}{2}c_{i\partial}\left(x_i - g_i\right)^2$	$\frac{1}{2}k_{i\partial}\left(\dot{x}_i - \dot{g}_i\right)^2$
$\varPi_u^{(2-2)}$	u	i-я масса второго типа и m-я масса второго типа	$\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{nr_u} c_{r\_im}\left[\left(x_i + l_{r\_im}\alpha_i\right) - \left(x_m + l_{r\_mi}\alpha_m\right)\right]^2$	$\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{nr_u} k_{r\_im}\left[\left(\dot{x}_i + l_{r\_im}\dot{\alpha}_i\right) - \left(\dot{x}_m + l_{r\_mi}\dot{\alpha}_m\right)\right]^2$
$\varPi_v^{(2-\partial)}$	v	i-я масса второго типа и дорожная поверхность	$\frac{1}{2}\sum_{f=1}^{nf_v} c_{f\_i\partial}\left[\left(x_i + l_{f\_i\partial}\alpha_i\right) - g_{f\_i}\right]^2$	$\frac{1}{2}\sum_{f=1}^{nf_v} k_{f\_i\partial}\left[\left(\dot{x}_i + l_{f\_i\partial}\dot{\alpha}_i\right) - \dot{g}_{f\_i}\right]^2$

Примечание: Цифровые и буквенные индексы в верхних скобках при $\varPi$ и $\varPhi$, разделенные дефисом, обозначают тип соединяемых масс или дорожную поверхность; c_{ij} и k_{ij} – коэффициенты жесткости и демпфирования упругой связи между i–й и j–й массами; $c_{i\partial}$ и $k_{i\partial}$ – коэффициенты жесткости и демпфирования упругой связи i-й массы первого типа с дорожной поверхностью; c_{r_im} и k_{r_im} – коэффициенты жесткости и демпфирования r-й упругой связи между i-й и m-й массами второго типа; nr_u – число упругих связей между i-й и m-й массами второго типа в u-й подсистеме; $c_{f\_i\partial}$ и $k_{f\_i\partial}$ – коэффициенты жесткости и демпфирования f-й упругой связи между i–й массой второго типа и дорожной поверхностью; nf_v – число упругих связей между i–й массой второго типа и дорожной поверхностью в v-й подсистеме; L_i – расстояния от первой оси автомобиля до центра масс (ЦМ) i –й массы (расстояние берется со знаком $''-''$, если ЦМ i –й массы расположен левее передней оси автомобиля, и со знаком $''+''$, если правее передней оси автомобиля); l_{r_im} и l_{r_mi} – соответственно расстояния между r –й упругой связью и ЦМ i –й и m –й масс второго типа (расстояния берутся со знаком $''-''$, если r –я упругая связь располагается левее ЦМ массы, и со знаком $''+''$, если – правее), причем $l_{r\_mi}=L_i+l_{r\_im}-L_m$; $l_{f\_i\partial}$ – расстояние между f –й упругой связью и ЦМ i –й массы второго типа (расстояние берется со знаком $''-''$, если f –я упругая связь располагается левее ЦМ i –й массы, и со знаком $''+''$, если – правее); g_i – профиль дорожной поверхности под i -й массой первого типа; g_{f_i} – профиль дорожной поверхности под f –й упругой связью, соединяющей i –ю массу второго типа с дорожной поверхностью.

Поскольку при расчетах амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) динамическая система подвергается только кинематическому гармоническому возмущению со стороны опорной поверхности, то все обобщенные возмущающие силы в (1) равны нулю

$$Q_i=0, \qquad i=\overline{1,n}. \tag{6}$$

Используя (1) и (3-6) нетрудно получить уравнение движения любой из масс динамической системы. Например, если предположить, что произвольная i -я масса первого типа имеет упругие связи со всеми массами и с дорожной поверхностью, то дифференциальное уравнение ее движения после перегруппировки слагаемых примет вид

$$\begin{aligned}
&m_i\ddot{x}_i+\overbrace{\left(\sum_{j=1}^{n_1}k_{ij}\right)\dot{x}_i}^{1-1}+\overbrace{\left(\sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2}k_{ik}\right)\dot{x}_i}^{1-2}+\overbrace{k_{i\partial}\dot{x}_i}^{1-\partial}-\overbrace{\sum_{j=1}^{n_1}\left(k_{ij}\dot{x}_j\right)}^{1-1}-\overbrace{\sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2}\left(k_{ik}\dot{x}_k\right)}^{1-2}-\overbrace{\sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2}\left(k_{ik}\left(L_i-L_k\right)\dot{\alpha}_k\right)}^{1-2}+\\
&+\overbrace{\left(\sum_{j=1}^{n_1}c_{ij}\right)x_i}^{1-1}+\overbrace{\left(\sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2}c_{ik}\right)x_i}^{1-2}+\overbrace{c_{i\partial}x_i}^{1-\partial}-\overbrace{\sum_{j=1}^{n_1}\left(c_{ij}x_j\right)}^{1-1}-\overbrace{\sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2}\left(c_{ik}x_k\right)}^{1-2}-\overbrace{\sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2}\left(c_{ik}\left(L_i-L_k\right)\alpha_k\right)}^{1-2}=\overbrace{k_{i\partial}\dot{g}_i}^{1-\partial}+\overbrace{c_{i\partial}g_i}^{1-\partial}\ .
\end{aligned} \tag{7}$$

Дифференциальное уравнение движения i -й массы второго типа, соответствующее линейным перемещениям ее ЦМ массы, имеет вид

$$\begin{aligned}
&m_i\ddot{x}_i+\overbrace{\left(\sum_{k=1}^{n}k_{ik}\right)\dot{x}_i}^{1-2}+\overbrace{\left(\sum_{m=1}^{n_2}\sum_{r=1}^{nr_m}k_{r_im}\right)\dot{x}_i}^{2-2}+\overbrace{\left(\sum_{f=1}^{nf_i}k_{f_i\partial}\right)\dot{x}_i}^{2-\partial}-\overbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(k_{ik}\dot{x}_k\right)}^{1-2}-\overbrace{\sum_{m=1}^{n_2}\left[\left(\sum_{r=1}^{nr_m}k_{r_im}\right)\dot{x}_m\right]}^{2-2}+\\
&+\overbrace{\left(\sum_{k=1}^{n}k_{ik}\left(L_k-L_i\right)\right)\dot{\alpha}_i}^{1-2}+\overbrace{\left(\sum_{m=1}^{n_2}\sum_{r=1}^{nr_m}k_{r_im}l_{r_im}\right)\dot{\alpha}_i}^{2-2}+\overbrace{\left(\sum_{f=1}^{nf_i}k_{f_i\partial}l_{f_i\partial}\right)\dot{\alpha}_i}^{2-\partial}-\overbrace{\sum_{m=1}^{n_2}\left[\left(\sum_{r=1}^{nr_m}k_{r_im}l_{r_im}\right)\dot{\alpha}_m\right]}^{2-2}+\\
&+\overbrace{\left(\sum_{k=1}^{n}c_{ik}\right)x_i}^{1-2}+\overbrace{\left(\sum_{m=1}^{n_2}\sum_{r=1}^{nr_m}c_{r_im}\right)x_i}^{2-2}+\overbrace{\left(\sum_{f=1}^{nf_i}c_{f_i\partial}\right)x_i}^{2-\partial}-\overbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(c_{ik}x_k\right)}^{1-2}-\overbrace{\sum_{m=1}^{n_2}\left[\left(\sum_{r=1}^{nr_m}c_{r_im}\right)x_m\right]}^{2-2}+\\
&+\overbrace{\left(\sum_{k=1}^{n}c_{ik}\left(L_k-L_i\right)\right)\alpha_i}^{1-2}+\overbrace{\left(\sum_{m=1}^{n_2}\sum_{r=1}^{nr_m}c_{r_im}l_{r_im}\right)\alpha_i}^{2-2}+\overbrace{\left(\sum_{f=1}^{nf}c_{f_i\partial}l_{f_i\partial}\right)\alpha_i}^{2-\partial}-\overbrace{\sum_{m=1}^{n_2}\left[\left(\sum_{r=1}^{nr_m}c_{r_im}l_{r_im}\right)\alpha_m\right]}^{2-2}=\\
&=\overbrace{\sum_{f=1}^{nf_i}\left(k_{f_i\partial}\dot{g}_{f_i}\right)}^{2-\partial}+\overbrace{\sum_{f=1}^{nf_i}\left(c_{f_i\partial}g_{f_i}\right)}^{2-\partial}\ .
\end{aligned} \tag{8}$$

В обоих приведенных уравнениях над фигурными скобками указаны типы упомянутых выше подсистем, а под скобками – соответствующие слагаемые.

Поскольку в общем случае дифференциальные уравнения являются довольно громоздкими, то на практике удобнее иметь дело не с отдельными уравнениями, а с матричным уравнением, описывающим движение линейной динамической модели системы подрессоривания с n степенями свободы

$$A\ddot{\boldsymbol{q}} + B\dot{\boldsymbol{q}} + S\boldsymbol{q} = \boldsymbol{f} \ , \qquad (9)$$

где A - матрица инерционных коэффициентов (размерности $n \times n$),

$S,\ B$ - матрицы коэффициентов жесткости и диссипации (демпфирования) ($n \times n$),

$\boldsymbol{q}$ - n-мерный вектор обобщенных координат,

$\boldsymbol{f}$ - n-мерный вектор внешних сил.

Рассмотрим более подробно вид правых частей дифференциальных уравнений, обусловленных наличием упругой связи масс с дорожной поверхностью.

Обозначим правую часть i –о дифференциального уравнения через f_i . Если i -я масса является массой первого типа, то

$$f_i = k_{i\partial}\dot{g}_i + c_{i\partial}g_i \, . \qquad (10)$$

При расчетах АЧХ максимальная высота неровности, изменяющейся по гармоническому закону, принимается равной единице. Если под первым колесом автомобиля профиль дороги изменяется по закону

$$g_1 = \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где ω – круговая частота возмущения, φ_0 – начальный фазовый угол,

то под i –й массой первого типа, опирающейся на дорожную поверхность и расположенной на расстоянии L_i от первого колеса, – по закону

$$g_i = \sin\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{L_i}{V}\omega\right) = g_{1i}\cos\omega t + g_{2i}\sin\omega t \, ,$$

где V – скорость движения автомобиля, $g_{1i} = \sin\left(\varphi_0 - \frac{L_i}{V}\omega\right)$, $g_{2i} = \cos\left(\varphi_0 - \frac{L_i}{V}\omega\right)$.

Тогда уравнение (10) можно записать в следующем виде

$$f_i = f_{1\_i}\cos\omega t + f_{2\_i}\sin\omega t \, . \qquad (11)$$

Коэффициенты f_{1i} и f_{2i} в (11) рассчитываются по формулам

$$f_{1\_i} = \omega k_{i\partial}\cos\left(\varphi_0 - \frac{L_i}{V}\omega\right) + c_{i\partial}\sin\left(\varphi_0 - \frac{L_i}{V}\omega\right), \qquad (12)$$

$$f_{2\_i} = -\omega k_{i\partial}\sin\left(\varphi_0 - \frac{L_i}{V}\omega\right) + c_{i\partial}\cos\left(\varphi_0 - \frac{L_i}{V}\omega\right). \qquad (13)$$

Нетрудно убедиться, что правые части i-о дифференциального уравнения, описывающего движение массы второго типа, опирающейся на дорожную поверхность, также могут быть представлены в виде (11), однако коэффициенты f_{1i} и f_{2i} вычисляются иначе. Так для i –о дифференциального уравнения, соответствующего линейным перемещениям ЦМ массы второго типа, коэффициенты f_{1i} и f_{2i} рассчитываются по формулам

$$f_{1\_i} = \omega \sum_{f=1}^{nf_v} k_{f\_i\partial} \cos\left(\varphi_0 - \frac{L_i + l_{f\_i\partial}}{V}\omega\right) + \sum_{f=1}^{nf_v} c_{f\_i\partial} \sin\left(\varphi_0 - \frac{L_i + l_{f\_i\partial}}{V}\omega\right) \quad (14)$$

и

$$f_{2\_i} = -\omega \sum_{f=1}^{nf_v} k_{f\_i\partial} \sin\left(\varphi_0 - \frac{L_i + l_{f\_i\partial}}{V}\omega\right) + \sum_{f=1}^{nf_v} c_{f\_i\partial} \cos\left(\varphi_0 - \frac{L_i + l_{f\_i\partial}}{V}\omega\right), \quad (15)$$

а для $i + n_2$-о уравнения, описывающего угловые перемещения массы второго типа,

$$\begin{aligned} f_{1\_i+n_2} = \omega \sum_{f=1}^{nf_v} k_{f\_i\partial} l_{f\_i\partial} \cos\left(\varphi_0 - \frac{L_i + l_{f\_i\partial}}{V}\omega\right) + \\ + \sum_{f=1}^{nf_v} c_{f\_i\partial} l_{f\_i\partial} \sin\left(\varphi_0 - \frac{L_i + l_{f\_i\partial}}{V}\omega\right) \end{aligned} \quad (16)$$

и

$$\begin{aligned} f_{2\_i+n_2} = -\omega \sum_{f=1}^{nf_v} k_{f\_i\partial} l_{f\_i\partial} \sin\left(\varphi_0 - \frac{L_i + l_{f\_i\partial}}{V}\omega\right) + \\ + \sum_{f=1}^{nf_v} c_{f\_i\partial} l_{f\_i\partial} \cos\left(\varphi_0 - \frac{L_i + l_{f\_i\partial}}{V}\omega\right). \end{aligned} \quad (17)$$

Если связи i –й массы любого типа с дорожной поверхностью нет, то $f_i = f_{1\_i} = f_{2\_i} = 0$.

Ввиду наличия диссипации энергии свободные колебания с частотами отличными от частоты возмущения ω со временем затухают и устанавливаются независящие от начальных условий стационарные колебания с частотой ω. Решение уравнения (9), отвечающее таким стационарным колебаниям, представим в виде

$$q_i = q_{\text{M}i} \sin(\omega t + \alpha_{\text{M}i})$$

или

$$q_i = q_{1i} \cos\omega t + q_{2i} \sin\omega t, \quad (18)$$

где $q_{\text{M}i}$ и $\alpha_{\text{M}i}$ – амплитуда и фазовый угол i-й обобщенной координаты, $q_{1i} = q_{\text{M}i} \sin\alpha_{\text{M}i}$, $q_{2i} = q_{\text{M}i} \cos\alpha_{\text{M}i}$.

В результате подстановки (10) и (18) в (9) и разделения переменных, содержащих синусы и косинусы, исходная система n дифференциальных уравнений преобразуется к системе $2n$ линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \left(S-\omega^2 A\right)\boldsymbol{q}_1+\omega B\boldsymbol{q}_2=\boldsymbol{f}_1 \\ -\omega B\boldsymbol{q}_1+\left(S-\omega^2 A\right)\boldsymbol{q}_2=\boldsymbol{f}_2 \end{cases}, \tag{19}$$

где $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2$ – векторы длиной n, содержащие соответственно q_{1i} и q_{2i}, $i=\overline{1,n}$.

$\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ – векторы длиной n, содержащие соответственно f_{1_i} и f_{2_i}, $i=\overline{1,n}$.

Уравнение (19) можно записать иначе

$$D\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{h}, \tag{20}$$

где

$D=\begin{bmatrix} S-\omega^2 A & \omega B \\ -\omega B & S-\omega^2 A \end{bmatrix}$ – матрица размерности $2n\times 2n$;

$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \boldsymbol{q}_2 \end{bmatrix}$ – вектор длиной $2n$;

$\boldsymbol{h}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1 \\ \boldsymbol{f}_2 \end{bmatrix}$ – вектор длиной $2n$.

Полученные в результате решения системы линейных уравнений (20) элементы вектора $\boldsymbol{Q}$ могут быть использованы для нахождения амплитуд и фаз всех обобщенных координат. В самом деле, в соответствии с (18) амплитуда и фазовый угол произвольной i-й обобщенной координаты ($i=\overline{1,n}$) могут быть найдены по формулам

$$q_{\text{M}i}=\sqrt{q_{1i}^2+q_{2i}^2} \tag{21}$$

и

$$\alpha_{\text{M}i}=\operatorname{arctg}\frac{q_{1i}}{q_{2i}}. \tag{22}$$

Таким образом, для нахождения амплитуд и фаз обобщенных координат динамической системы с n степенями свободы при кинематическом гармоническом возмущении требуется решение системы $2n$ линейных алгебраических уравнений. Соответственно возможность расчета АЧХ произвольной динамической системы с n степенями свободы при заданных скорости движения автомобиля V и частоте возбуждения ω зависит от умения формирования матриц A, B, S и вектора $\boldsymbol{h}$ в (9).

С целью выявления основных закономерностей, связанных с расчетом элементов матриц A, B, S и вектора $\boldsymbol{h}$ в (9), для каждой из подсистем (рис. 2) составим дифференциальные уравнения, описывающие движение их масс, и рассмотрим только те слагаемые, которые обусловлены наличием упругих связей между этими массами (табл. 2).

В приведенных уравнениях сомножители перед x_i, $\dot{x}_i$, α_i и $\dot{\alpha}_i$ выделены фигурными скобками с указанием их обозначений sk_j и sc_j ($j=\overline{1,14}$), под которыми эти сомножители подставляются в матрицы B и S в (9).

Схемы заполнения матрицы S коэффициентами sc_j $(j=\overline{1,14})$ в зависимости от типа соединяемых масс представлены на рис. 3. Анализ приведенных в табл. 2 формул и схем на рис. 2 показывает, что при отсутствии упругих связей между i-й и j-й массами соответствующие внедиагональные элементы матрицы S равны нулю. В то же время все ненулевые внедиагональные элементы каждой из подсистем, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны между собой $s_{ij}=s_{ji}$ $(i \neq j)$. Каждый из диагональных элементов s_{ii} представляет собой сумму коэффициентов sc_j, число которых определяется числом упругих связей у соответствующей массы, а формулы для расчета этих коэффициентов зависят от типа соединяемых масс (табл. 2).

Таблица 2. Слагаемые дифференциальных уравнений, обусловленные наличием упругих связей между массами или между массой и дорожной поверхностью.

Соединяемые массы	Слагаемые дифференциальных уравнений, обусловленные наличием упругих связей между массами или между массой и дорожной поверхностью
i–я и j–я массы первого типа	$m_i\ddot{x}_i+\ldots+\overbrace{k_{ij}}^{sk_1}\dot{x}_i-\overbrace{k_{ij}}^{sk_1}\dot{x}_j+\overbrace{c_{ij}}^{sc_1}x_i-\overbrace{c_{ij}}^{sc_1}x_j+\ldots=\ldots$ (23) $m_j\ddot{x}_j+\ldots+\overbrace{k_{ij}}^{sk_1}\dot{x}_j-\overbrace{k_{ij}}^{sk_1}\dot{x}_i+\overbrace{c_{ij}}^{sc_1}x_j-\overbrace{c_{ij}}^{sc_1}x_i+\ldots=\ldots$ (24)
i–я масса первого типа и k–я масса второго типа	$m_i\ddot{x}_i+\ldots+\overbrace{k_{ik}}^{sk_2}\dot{x}_i-\overbrace{k_{ik}}^{sk_2}\dot{x}_k-\overbrace{k_{ik}(L_i-L_k)}^{sk_3}\dot{\alpha}_k+\overbrace{c_{ik}}^{sc_2}x_i-\overbrace{c_{ik}}^{sc_2}x_k-\overbrace{c_{ik}(L_i-L_k)}^{sc_3}\alpha_k+\ldots=\ldots$ (25) $m_k\ddot{x}_k+\ldots+\overbrace{k_{ik}}^{sk_2}\dot{x}_k-\overbrace{k_{ik}}^{sk_2}\dot{x}_i+\overbrace{k_{ik}(L_i-L_k)}^{sk_3}\dot{\alpha}_k+\overbrace{c_{ik}}^{sc_2}x_k-\overbrace{c_{ik}}^{sc_2}x_i+\overbrace{c_{ik}(L_i-L_k)}^{sc_3}\alpha_k+\ldots=\ldots$ (26) $J_k\ddot{\alpha}_k+\ldots+\overbrace{k_{ik}(L_i-L_k)}^{sk_3}\dot{x}_k+\overbrace{k_{ik}(L_i-L_k)^2}^{sk_4}\dot{\alpha}_k-\overbrace{k_{ik}(L_i-L_k)}^{sk_3}\dot{x}_i+$ $+\overbrace{c_{ik}(L_i-L_k)}^{sc_3}x_k+\overbrace{c_{ik}(L_i-L_k)^2}^{sc_4}\alpha_k-\overbrace{c_{ik}(L_i-L_k)}^{sc_3}x_i+\ldots=\ldots$ (27)
i–я масса первого типа и дорожная поверхность	$m_i\ddot{x}_i+\ldots+\overbrace{k_{i\partial}}^{sk_5}\dot{x}_i+\overbrace{c_{i\partial}}^{sc_5}x_{ij}+\ldots=k_{i\partial}\dot{q}_i+c_{i\partial}q_i$ (28)
i–я и m–я массы второго типа	$m_i\ddot{x}_i+\ldots+\overbrace{\sum_{r=1}^{nr\_im}k_{r\_im}}^{sk_6}\dot{x}_i-\overbrace{\sum_{r=1}^{nr\_im}k_{r\_im}}^{sk_6}\dot{x}_m+\overbrace{\sum_{r=1}^{nr\_im}k_{r\_im}l_{r\_im}}^{sk_7}\dot{\alpha}_i-\overbrace{\sum_{r=1}^{nr\_im}k_{r\_im}l_{r\_mi}}^{sk_8}\dot{\alpha}_m+$ $+\overbrace{\sum_{r=1}^{nr\_im}c_{r\_im}}^{sc_6}x_i-\overbrace{\sum_{r=1}^{nr\_im}c_{r\_im}}^{sc_6}x_m+\overbrace{\sum_{r=1}^{nr\_im}c_{r\_im}l_{r\_im}}^{sc_7}\alpha_i-\overbrace{\sum_{r=1}^{nr\_im}c_{r\_im}l_{r\_mi}}^{sc_8}\alpha_m+\ldots=\ldots$ (29) $m_m\ddot{x}_m+\ldots+\overbrace{\sum_{r=1}^{nr\_im}k_{r\_im}}^{sk_6}\dot{x}_m-\overbrace{\sum_{r=1}^{nr\_im}k_{r\_im}}^{sk_6}\dot{x}_i+\overbrace{\sum_{r=1}^{nr\_im}k_{r\_im}l_{r\_mi}}^{sk_8}\dot{\alpha}_m-\overbrace{\sum_{r=1}^{nr\_im}k_{r\_im}l_{r\_im}}^{sk_7}\dot{\alpha}_i+$ $+\overbrace{\sum_{r=1}^{nr\_im}c_{r\_im}}^{sc_6}x_m-\overbrace{\sum_{r=1}^{nr\_im}c_{r\_im}}^{sc_6}x_i+\overbrace{\sum_{r=1}^{nr\_im}c_{r\_im}l_{r\_mi}}^{sc_8}\alpha_m-\overbrace{\sum_{r=1}^{nr\_im}c_{r\_im}l_{r\_im}}^{sc_7}\alpha_i+\ldots=\ldots$ (30)

	$J_i\ddot{\alpha}_i + \ldots + \overbrace{\sum_{r=1}^{nr\_im} k_{r\_im} l_{r\_im}}^{sk_7} \dot{x}_i - \overbrace{\sum_{r=1}^{nr\_im} k_{r\_im} l_{r\_im}}^{sk_7} \dot{x}_m + \overbrace{\sum_{r=1}^{nr\_im} k_{r\_im} l_{r\_im}^2}^{sk_9} \dot{\alpha}_i - \overbrace{\sum_{r=1}^{nr\_im} k_{r\_im} l_{r\_im} l_{r\_mi}}^{sk_{10}} \dot{\alpha}_m + \overbrace{\sum_{r=1}^{nr\_im} c_{r\_im} l_{r\_im}}^{sc_7} x_i - \overbrace{\sum_{r=1}^{nr\_im} c_{r\_im} l_{r\_im}}^{sc_7} x_m + \overbrace{\sum_{r=1}^{nr\_im} c_{r\_im} l_{r\_im}^2}^{sc_9} \alpha_i - \overbrace{\sum_{r=1}^{nr\_im} c_{r\_im} l_{r\_im} l_{r\_mi}}^{sc_{10}} \alpha_m + \ldots = \ldots \quad (31)$ $J_m\ddot{\alpha}_m + \ldots + \overbrace{\sum_{r=1}^{nr\_im} k_{r\_im} l_{r\_mi}}^{sk_8} \dot{x}_m - \overbrace{\sum_{r=1}^{nr\_im} k_{r\_im} l_{r\_mi}}^{sk_8} \dot{x}_i + \overbrace{\sum_{r=1}^{nr\_im} k_{r\_im} l_{r\_mi}^2}^{sk_{11}} \dot{\alpha}_m - \overbrace{\sum_{r=1}^{nr\_im} k_{r\_im} l_{r\_im} l_{r\_mi}}^{sk_{10}} \dot{\alpha}_i + \overbrace{\sum_{r=1}^{nr\_im} c_{r\_im} l_{r\_mi}}^{sc_8} x_m - \overbrace{\sum_{r=1}^{nr\_im} c_{r\_im} l_{r\_mi}}^{sc_8} x_i + \overbrace{\sum_{r=1}^{nr\_im} c_{r\_im} l_{r\_mi}^2}^{sc_{11}} \alpha_m - \overbrace{\sum_{r=1}^{nr\_im} c_{r\_im} l_{r\_im} l_{r\_mi}}^{sc_{10}} \alpha_i + \ldots = \ldots \quad (32)$
i –я масса второго типа и дорожная поверхность	$m_i\ddot{x}_i + \ldots + \overbrace{\sum_{t=1}^{nt\_i\text{д}} k_{t\_i\text{д}}}^{sk_{12}} \dot{x}_i + \overbrace{\sum_{t=1}^{nt\_i\text{д}} k_{t\_i\text{д}} l_{t\_i\text{д}}}^{sk_{13}} \dot{\alpha}_i + \overbrace{\sum_{t=1}^{nt\_i\text{д}} c_{t\_i\text{д}}}^{sc_{12}} x_i + \overbrace{\sum_{t=1}^{nt\_i\text{д}} c_{t\_i\text{д}} l_{t\_i\text{д}}}^{sc_{13}} \alpha_i + \ldots = \sum_{t=1}^{nt\_i\text{д}} k_{t\_i\text{д}} \dot{q}_{t\_i\text{д}} + \sum_{t=1}^{nt\_i\text{д}} c_{t\_i\text{д}} q_{t\_i\text{д}} \quad (33)$ $J_i\ddot{\alpha}_i + \ldots + \overbrace{\sum_{t=1}^{nt\_i\text{д}} k_{t\_i\text{д}} l_{t\_i\text{д}}}^{sk_{13}} \dot{x}_i + \overbrace{\sum_{t=1}^{nt\_i\text{д}} k_{t\_i\text{д}} l_{t\_i\text{д}}^2}^{sk_{14}} \dot{\alpha}_i + \overbrace{\sum_{t=1}^{nt\_i\text{д}} c_{t\_i\text{д}} l_{t\_i\text{д}}}^{sc_{13}} x_i + \overbrace{\sum_{t=1}^{nt\_i\text{д}} c_{t\_i\text{д}} l_{t\_i\text{д}}^2}^{sc_{14}} \alpha_i + \ldots = \sum_{t=1}^{nt\_i\text{д}} k_{t\_i\text{д}} l_{t\_i\text{д}} \dot{q}_{t\_i\text{д}} + \sum_{t=1}^{nt\_i\text{д}} c_{t\_i\text{д}} l_{t\_i\text{д}} q_{t\_i\text{д}} \quad (34)$

С учетом сказанного, формирование матрицы S можно осуществлять в следующем порядке:

1. Все элементы матрицы S приравниваются к нулю.
2. Последовательно рассматриваются все имеющиеся подсистемы:
   - для каждой их подсистем рассчитываются коэффициенты sc_j;
   - полученные коэффициенты sc_j со знаком "+" или "–" согласно типу соединяемых масс и рис. 2 прибавляются к соответствующим элементам матрицы S.

Таким образом, матрица S получается из матрицы с нулевыми коэффициентами последовательным прибавлением к ней нескольких симметричных матриц. Поскольку исходная матрица с нулевыми коэффициентами является симметричной, а сложение симметричных матриц не приводит к нарушению симметрии матрицы, то результирующая матрица S также симметрична.

Выражения для потенциальной энергии и диссипативной функции в табл. 1, как и сомножители при x_i, $\dot{x}_i$, α_i и $\dot{\alpha}_i$ в табл. 2, одинаковы по структуре. Поэтому матрицы B и S также имеют сходную структуру, и, следовательно, матрица B также является симметричной. Поскольку формирование матриц B и S подчиняется одним и тем же правилам, то и заполнение этих матриц целесообразно производить одновременно.

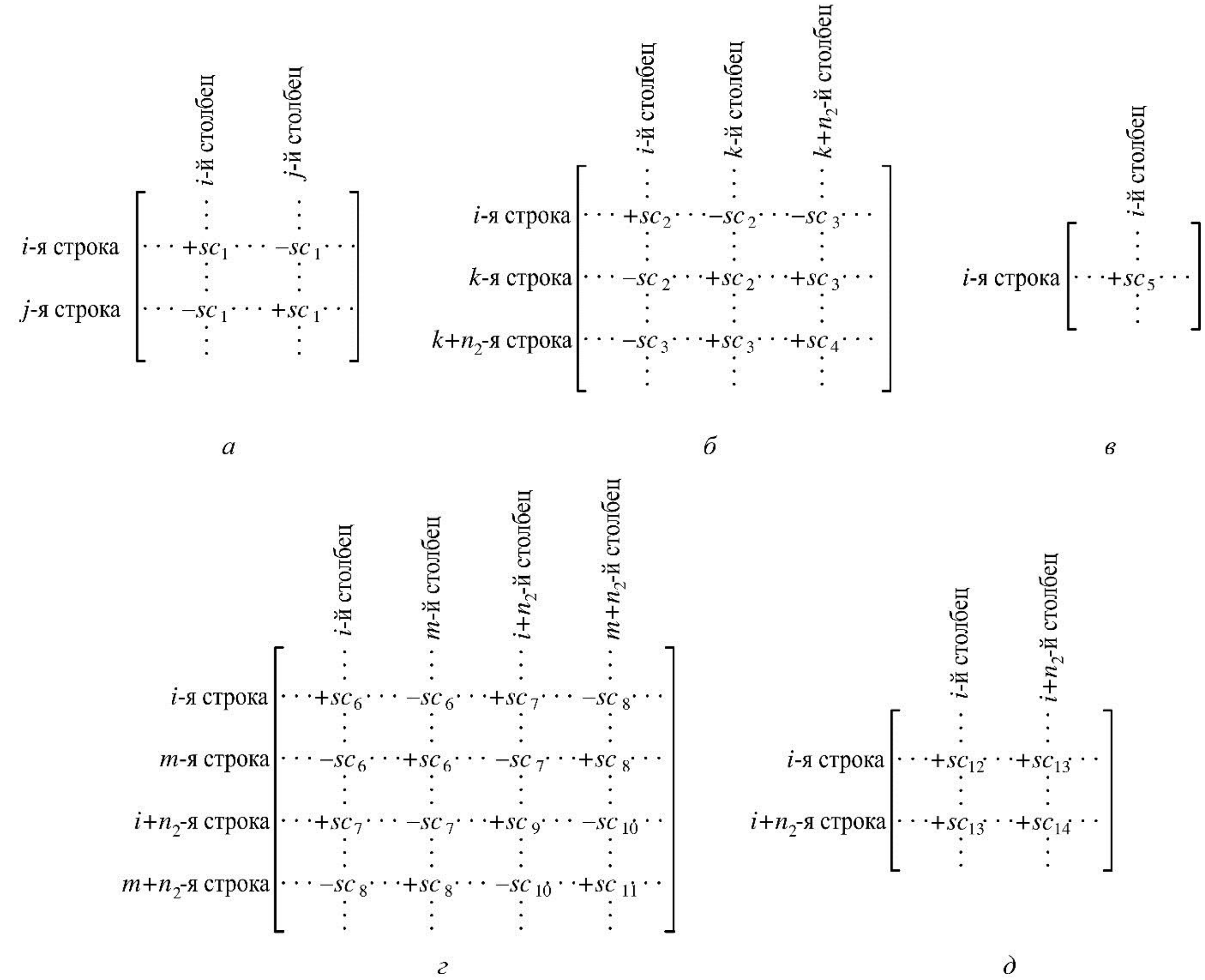

Рис. 3. Схема заполнения матрицы коэффициентов жесткости S коэффициентами sc_j ($j=\overline{1,14}$) для подсистем, образованных: *а* – двумя массами первого типа с упругой связью между ними; *б* – массой первого типа и массой второго типа с упругой связью между ними; *в* – массой первого типа, опирающаяся на дорожную поверхность при помощи упругой связи; *г* – двумя массами второго типа с установленными между ними несколькими упругим связями; *д* – массой второго типа, опирающаяся на дорожную поверхность при помощи нескольких упругих связей.

Нетрудно убедиться, что матрица A является диагональной, на главной диагонали которой располагаются значения масс

$$a_{ii}=m_i,\quad i=\overline{1,n_1+n_2} \tag{35}$$

и моментов инерции

$$a_{jj}=J_j,\quad j=\overline{n_1+n_2+1,n}, \tag{36}$$

и, следовательно, симметричной, а матрица D, составленная из симметричных матриц A, B и S, в соответствии с (19), – несимметричной.

На элементы матриц A, B и S в (9) не влияют ни скорость движения автомобиля V, ни круговая частота возмущения ω. Однако некоторые из элементов матрицы D и ненулевые элементы вектора $\boldsymbol{h}$ в (20) зависят от круговой частоты возмущения ω. На элементы вектора $\boldsymbol{h}$, кроме того, в соответствии с (12) – (17) оказывает влияние скорость движения автомобиля V.

Формирование матрицы D можно осуществлять с использованием ранее полученных матриц A, B и S. Однако на практике удобнее производить непосредственное заполнение матрицы D без предварительного формирования матриц A, B и S. В этом случае расчет АЧХ при заданных скорости движения автомобиля V и круговой частоте возбуждения ω осуществляется в следующей последовательности:

1. Все элементы матрицы D (размерности $2n \times 2n$) и вектора $\boldsymbol{h}$ (длиной $2n$) приравниваются к нулю.

2. Значения всех масс и моментов инерции умножаются на квадрат круговой частоты ω^2 возмущения, получившиеся произведения вычитаются из соответствующих элементов главной диагонали матрицы D.

3. Последовательно рассматриваются все имеющиеся подсистемы:
   - для каждой из подсистем рассчитываются коэффициенты sk_j, sc_j, f_{1_i}, f_{2_i} и произведения $\omega \cdot sk_j$;
   - полученные коэффициенты sc_j и произведения $\omega \cdot sk_j$ со знаком "+" или "–" согласно типу соединяемых масс, рис. 3 и (20) прибавляются к соответствующим элементам матрицы D;
   - полученные коэффициенты f_{1_i} и f_{2_i} прибавляются к соответствующим элементам вектора $\boldsymbol{h}$.

4. Решается система линейных уравнений (20).

5. Рассчитываются амплитуды и фазовые углы всех обобщенных координат.

В заключении отметим следующую возможность снижения вычислительных затрат при расчетах АЧХ.

Решение системы линейных уравнений (20) с несимметричной матрицей D основано на ее представлении в виде произведения матриц LU, где L – нижняя треугольная и U – верхняя треугольная с единичной диагональю. Ранее отмечалось, что элементы матрицы D зависят от параметров системы и круговой частоты возмущения ω, а элементы вектора $\boldsymbol{h}$ – от геометрических параметров системы, круговой частоты возмущения ω и скорости движения автомобиля V. С учетом того, что расчет АЧХ обычно производится для нескольких скоростей движения V_i ($i = \overline{1, n_v}$, где n_v – число расчетных скоростных режимов), то при заданной круговой частоте возмущения ω решение n_v систем линейных уравнений

$$D\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{h}_i, \qquad (i = \overline{1, n_v}) \tag{37}$$

может быть заменено решением системы линейных уравнений с n_v правыми частями

$$D\boldsymbol{Q} = H, \tag{38}$$

где $H = \left[\boldsymbol{h}_1; \boldsymbol{h}_2; \ldots; \boldsymbol{h}_{n_v}\right]$ – матрица ($n \times n_v$), где, в свою очередь, $\boldsymbol{h}_i$ – вектор правых частей в (20), рассчитанный для i –о расчетного скоростного режима. Снижение вычислительных затрат достигается за счет того, что при решении системы (38) представление матрицы D в виде произведения матриц L и U осуществляется только один раз, в то время как при решении n_v систем (37) – n_v раз [6, 7].

Заключение

1. Разработана методика автоматизированного расчета АЧХ подвески для плоской линейной динамической системы с n степенями свободы и произвольными связями.
2. Показано, что в случае выбора в качестве обобщенных координат вертикальных и угловых смещений центров тяжести масс матрица инерционных коэффициентов и матрицы коэффициентов жесткости и диссипации в матричном уравнении, описывающим движение линейной динамической модели, эквивалентной системе подрессоривания с n степенями свободы, являются симметричными, а матрица инерционных коэффициентов, кроме того, – диагональной.
3. Показано, что для нахождения амплитуд и фаз обобщенных координат плоской линейной динамической модели с n степенями свободы при кинематическом гармоническом возмущения со стороны дорожной поверхности требуется решение системы $2n$ линейных алгебраических уравнений.
4. Показано, что при расчетах АЧХ для нескольких расчетных скоростных режимов при заданной круговой частоте возмущения ω снижение вычислительных затрат может быть достигнуто за счет использования матричных методов линейной алгебры, предназначенных для решения систем линейных уравнений с несколькими правыми частями.

Список литературы

[1]. Динамика системы дорога-шина-автомобиль-водитель / А.А. Хачатуров, В.Л. Афанасьев, В.С. Васильев и др.; Под ред. А.А. Хачатурова. М.: Машиностроение. 1976. 535 с.

[2]. Белоусов Б.Н., Попов С.Д. Колесные транспортные средства особо большой грузоподъемности. Конструкция. Теория. Расчет. / Под общ. ред. Б.Н. Белоусова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2006. 728 с.

[3]. Белоусов Б.Н., Шухман С.Б. Прикладная механика наземных тягово-транспортных средств с мехатронными системами: [монография]. М.: Агроконсалт. 2013. 612 с.

[4]. Жеглов Л.Ф. Спектральный метод расчета систем подрессоривания колесных машин. 2-е изд., испр. и доп. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2013. 210 с.

[5]. Добронравов В.В., Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. Учебник. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. школа. 1983. 575 с.

[6]. Уилкинсон Дж.Х., Райнш Ц. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. / Пер. с англ. С.П. Забродина, В.Г. Потемкина, П.И. Рудакова / Под ред. д-ра техн. наук проф. Ю.И. Топчеева. М.: Машиностроение. 1976. 389 с. [J.H. Wilkinson, C. Reinsch. Handbook for Automatic Computation Linear Algebra. Heidelberg New York Springer-Verlag Berlin.]

[7]. Курош А.Г. Курс высшей алгебры: Учебник для университетов. 10-е изд., стерео-тип. М.: Наука. 1971. 432 с.