

Математическая модель карданного шарнира для универсальных программ анализа динамических систем

11, ноябрь 2016

доцент, к.т.н. Трудоношин В. А.^{1,*}, Федорук В. Г.¹

УДК: 621.865, 681.3

¹Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

*trudonoshin@mail.ru

Введение

Для моделирования поведения сложных трехмерных механических систем в настоящее время широкое распространение получили универсальные программные комплексы, такие как ПА9 [1], Pradis [2], AMESim [3], Универсальный механизм [4], NX [5], EULER [6]. В данной статье рассматривается математическая модель (ММ) карданного шарнира, адаптированная к особенностям методики моделирования пространственных механических систем [7]. Примером модели, полученной с использованием данной методики, может служить ММ упругой балки [8].

Карданный шарнир (рис. 1) рассматривается как невесомая связь между двумя абсолютно жесткими телами.



Рис. 1. Элементы карданного шарнира

В качестве одного из тел может выступать неподвижное основание, с которым связана глобальная система координат (ГСК). Тело обладает массо-инерционными свойствами. Его состояние характеризуется значениями следующего набора переменных:

V_x, V_y, V_z - компоненты вектора линейной скорости центра масс в ГСК;

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ - компоненты вектора угловой скорости тела в ГСК;

x, y, z - координаты центра масс тела в ГСК;

q_0, q_1, q_2, q_3 - параметры Эйлера [9], определяющие угловую ориентацию тела в ГСК.

Параметрами карданного шарнира являются следующие величины:

- координаты центра шарнира в локальной системе координат (ЛСК) тела 1;
- координаты центра шарнира в ЛСК тела 2;
- направляющие косинусы первой оси крестовины шарнира в ЛСК тела 1;
- направляющие косинусы второй оси крестовины шарнира в ЛСК тела 2.

Отметим, что параметры шарнира - величины постоянные и определены в ЛСК тел. Однако все расчеты, связанные с моделированием пространственной системы, выполняются в единой ГСК. В связи с этим необходим постоянный пересчет параметров шарнира из ЛСК тел в ГСК. Такой пересчет несложен - сначала по параметрам Эйлера находится матрица поворота, которая затем умножается на вектор локальных координат или вектор направляющих косинусов. В результате имеем:

- r_x^1, r_y^1, r_z^1 - компоненты радиус-вектора из центра масс тела 1 в центр шарнира в ГСК;
- r_x^2, r_y^2, r_z^2 - компоненты радиус-вектора из центра масс тела 2 в центр шарнира в ГСК;
- c_x^1, c_y^1, c_z^1 - направляющие косинусы первой оси крестовины шарнира в ГСК;
- c_x^2, c_y^2, c_z^2 - направляющие косинусы второй оси крестовины шарнира в ГСК.

Кроме того, в расчетах требуются направляющие косинусы для перпендикуляра к плоскости крестовины, для их получения необходимо перемножить единичные векторы, определяемые направляющими косинусами осей. Полученные косинусы обозначим c_x^n, c_y^n, c_z^n .

Поведение карданного шарнира описывается следующими группами уравнений. Во-первых, относительная линейная скорость центров масс двух тел однозначно связана с их угловыми скоростями, что дает следующие три зависимости:

$$V_x^{12} = -r_z^1 \omega_y^1 + r_y^1 \omega_z^1 + r_z^2 \omega_y^2 - r_y^2 \omega_z^2,$$

$$V_y^{12} = r_z^1 \omega_x^1 - r_x^1 \omega_z^1 - r_z^2 \omega_x^2 + r_x^2 \omega_z^2,$$

$$V_z^{12} = -r_y^1 \omega_x^1 + r_x^1 \omega_y^1 + r_y^2 \omega_x^2 - r_x^2 \omega_y^2.$$

Во-вторых, силы реакции в шарнире создаёт моменты, действующие на связываемые шарниром тела. Это еще шесть зависимостей:

$$M_x^1 = r_z^1 F_y^{12} - r_y^1 F_z^{12},$$

$$M_y^1 = -r_z^1 F_x^{12} + r_x^1 F_z^{12},$$

$$M_z^1 = r_y^1 F_x^{12} - r_x^1 F_y^{12},$$

$$M_x^2 = -r_z^2 F_y^{12} + r_y^2 F_z^{12},$$

$$M_y^2 = r_z^2 F_x^{12} - r_x^2 F_z^{12},$$

$$M_z^2 = -r_y^2 F_x^{12} + r_x^2 F_y^{12}.$$

В-третьих, относительная угловая скорость двух связанных шарниром тел вокруг перпендикуляра к плоскости крестовины равна нулю, что дает

$$c_x^n (\omega_x^1 - \omega_x^2) + c_y^n (\omega_y^1 - \omega_y^2) + c_z^n (\omega_z^1 - \omega_z^2) = 0$$

или

$$\omega_x^{12} = (c_y^n (\omega_y^2 - \omega_y^1) + c_z^n (\omega_z^2 - \omega_z^1)) / c_x^n$$

В-четвёртых, вектор момента силы реакции в шарнире перпендикулярен плоскости крестовины, что выражается еще двумя соотношениями:

$$M_y^{12} = M_x^{12} c_y^n / c_x^n,$$

$$M_z^{12} = M_x^{12} c_z^n / c_x^n.$$

Как следствие вышесказанного, эквивалентная схема ММ карданного шарнира может быть представлена, как это показано на рис. 2.

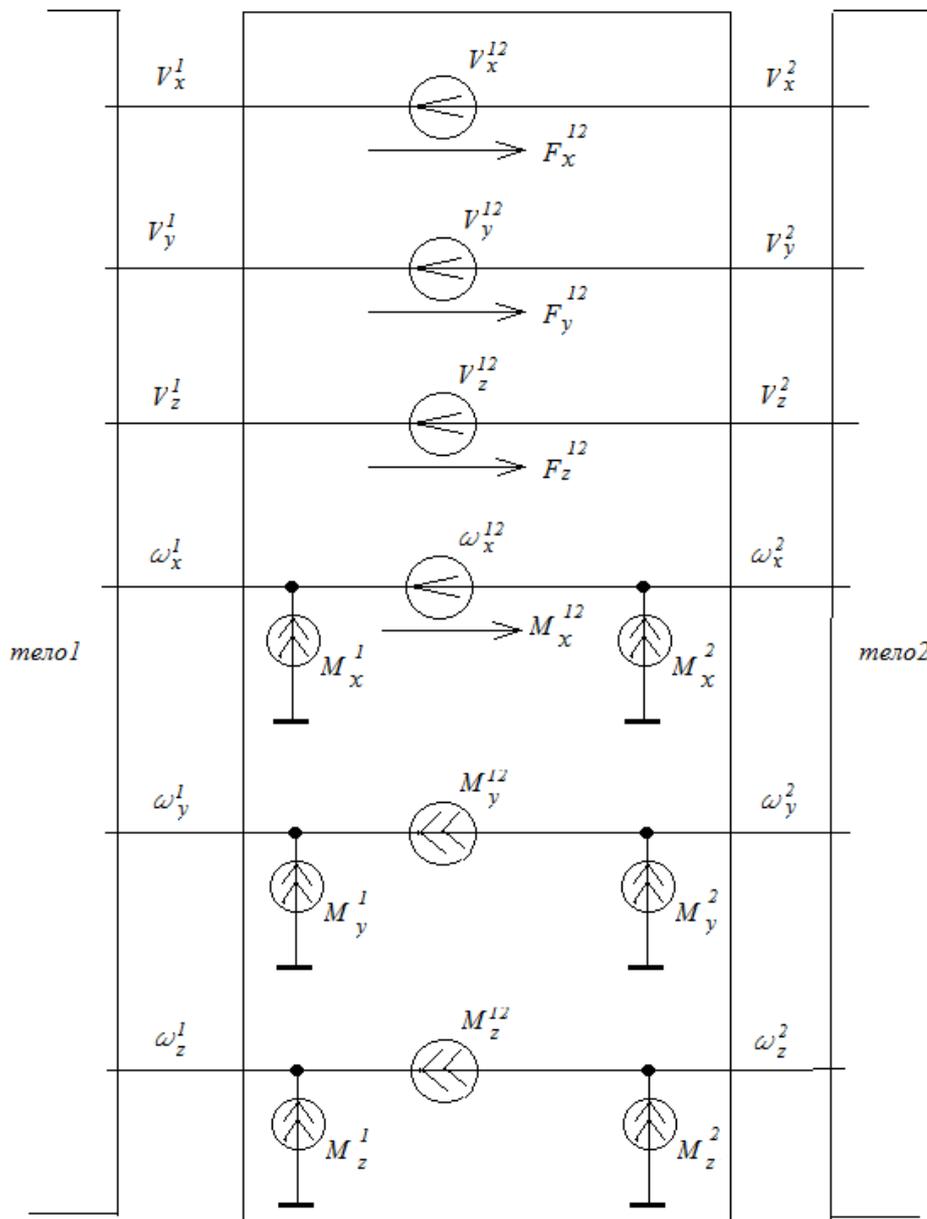


Рис. 2. Эквивалентная схема ММ карданного шарнира

Следует отметить два недостатка данной модели.

1. В некоторых выражениях ММ присутствует деление на направляющий косинус c_x^n перпендикуляра к плоскости крестовины. Это обстоятельство приведет к исключению "деление на ноль" в ситуации, когда плоскость крестовины окажется параллельной оси x .

2. В модели не фигурируют координаты центров масс тел, соединяемых шарниром. Это может привести к значительному "рассогласованию" в положении тел в ходе моделирования многопериодических переходных процессов. Однако, указанный недостаток можно устранить, дополнив ММ шарнира упругой связью.

Для проверки, предложенной ММ были выполнены численные эксперименты средствами программного комплекса ПА-8, связанные с моделированием поведения механической системы, структура которой представлена на рис. 3.

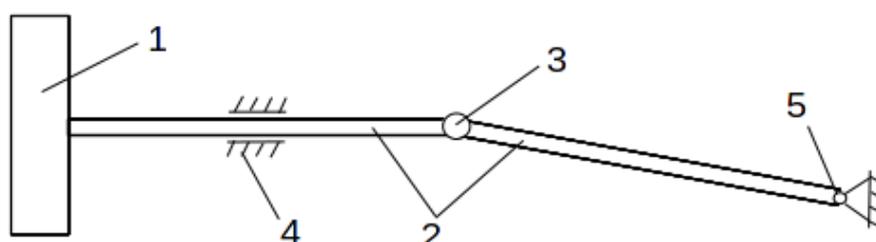


Рис. 3. Тестовая механическая система:

1 - маховик, 2 - упругие валы, 3 - карданный шарнир, 4 - подшипник, 5 - сферический шарнир

Элементы системы характеризуются следующими параметрами. Маховик: масса - 5 кг, момент инерции по оси X - $0,2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, моменты инерции по осям Y и Z - $0,1 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. Валы: длина - 1 м, масса - 1 кг, момент инерции по оси X - $0,5\text{e-}4 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, моменты инерции по осям Y и Z - $0,084 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, модуль Юнга - $2\text{e}11 \text{ Па}$, модуль сдвига - $8\text{e}10 \text{ Па}$, площадь поперечного сечения - $3.14\text{e-}4 \text{ м}^2$, полярный момент инерции сечения по X - $15.6\text{e-}9 \text{ м}^4$, геометрические моменты инерции сечений по Y и Z - $7.8\text{e-}9 \text{ м}^4$. Правый вал отклонен от горизонтали на 15 градусов.

Воздействие на систему обеспечивается вращением с постоянной угловой скоростью 10 рад/с правого конца правой балки. Начальные значения угловых скоростей всех элементов объекта согласованы с этим воздействием.

В первом эксперименте в начальный момент ось крестовины шарнира, связанная с левым валом, ориентирована строго вертикально, а ось, связанная с правым валом, - строго горизонтально. Графики зависимостей угловых скоростей (в рад/с) некоторых точек объекта от модельного времени (на протяжении одной секунды) представлены на рис. 4.

Здесь коричневый график - угловая скорость левого конца правого вала, синий - угловая скорость правого конца левого вала, красный - угловая скорость маховика. Пределы построения всех графиков - от 9 до 11 рад/с.

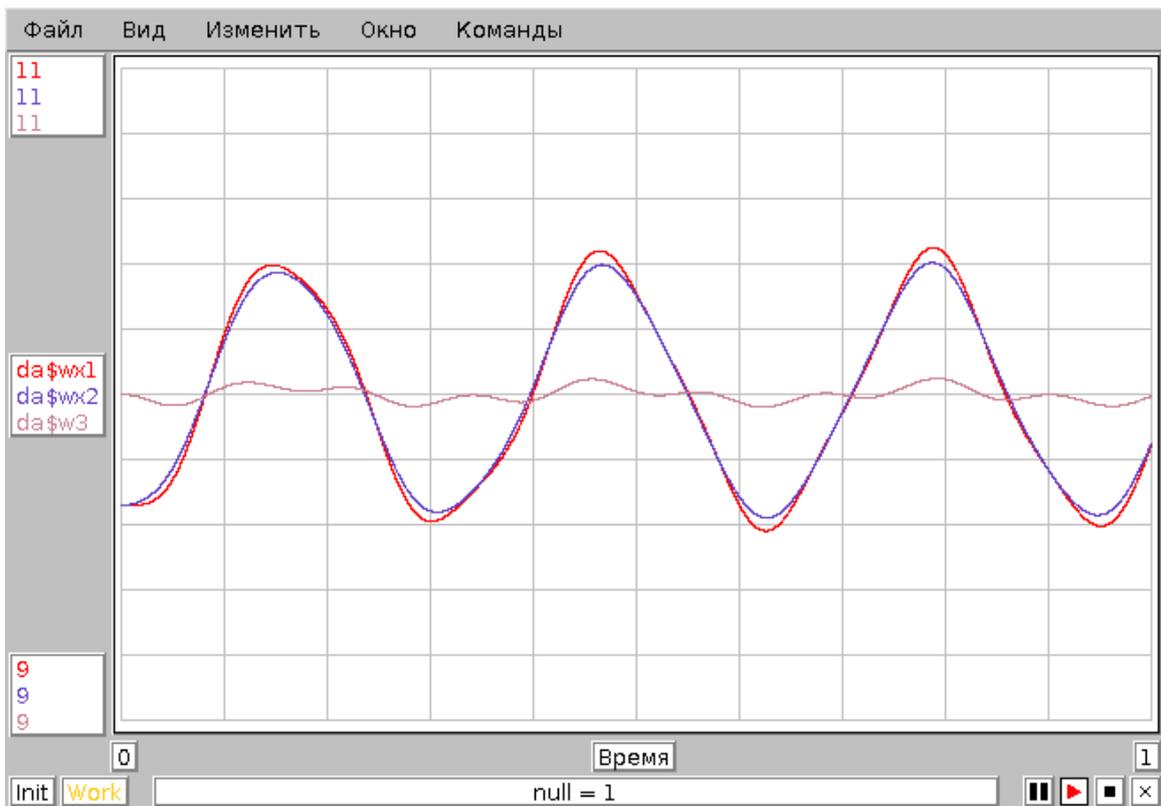


Рис. 4. Результаты первого эксперимента во временной области

На рис. 5 показана частотная характеристика механизма.

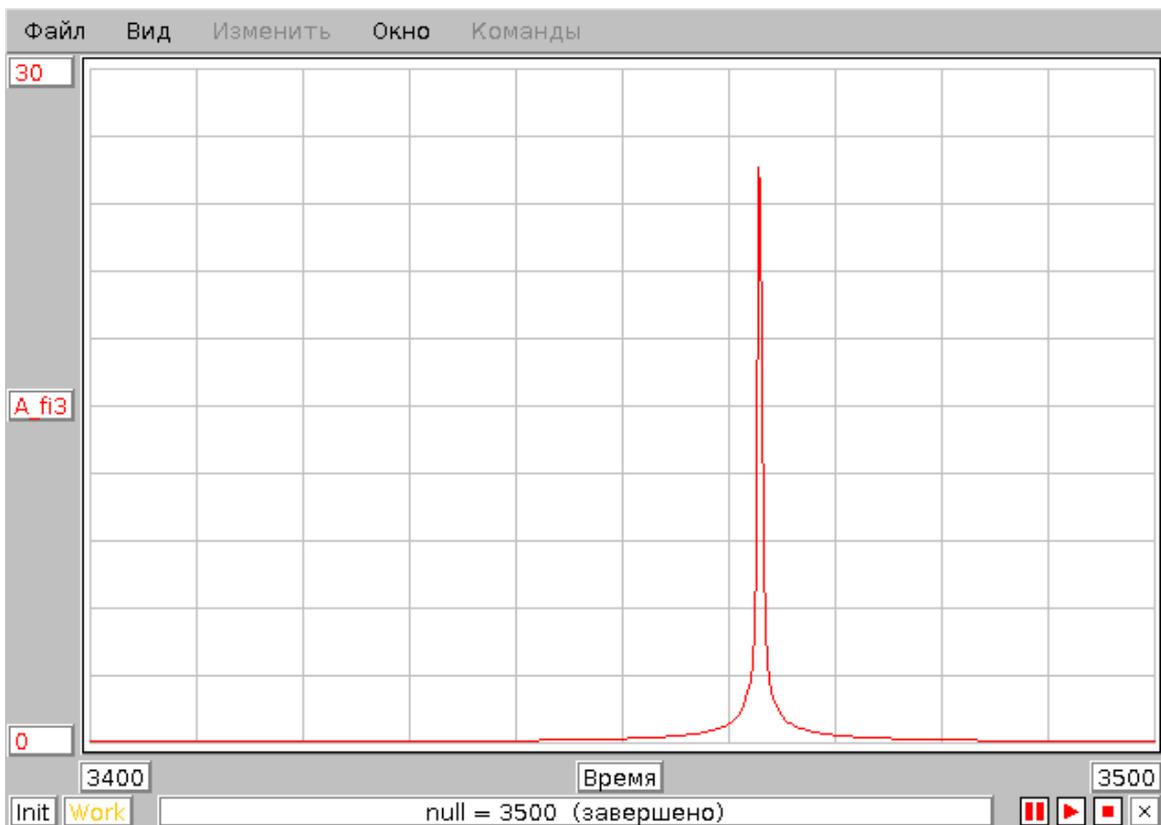


Рис. 5. Частотная характеристика в первом эксперименте

Во втором эксперименте в начальный момент ось крестовины шарнира, связанная с левым валом, ориентирована строго горизонтально, а ось, связанная с правым валом, отклонена на 15 градусов вправо от оси Y в плоскости XY. Результаты этого эксперимента представлены на рис. 6.

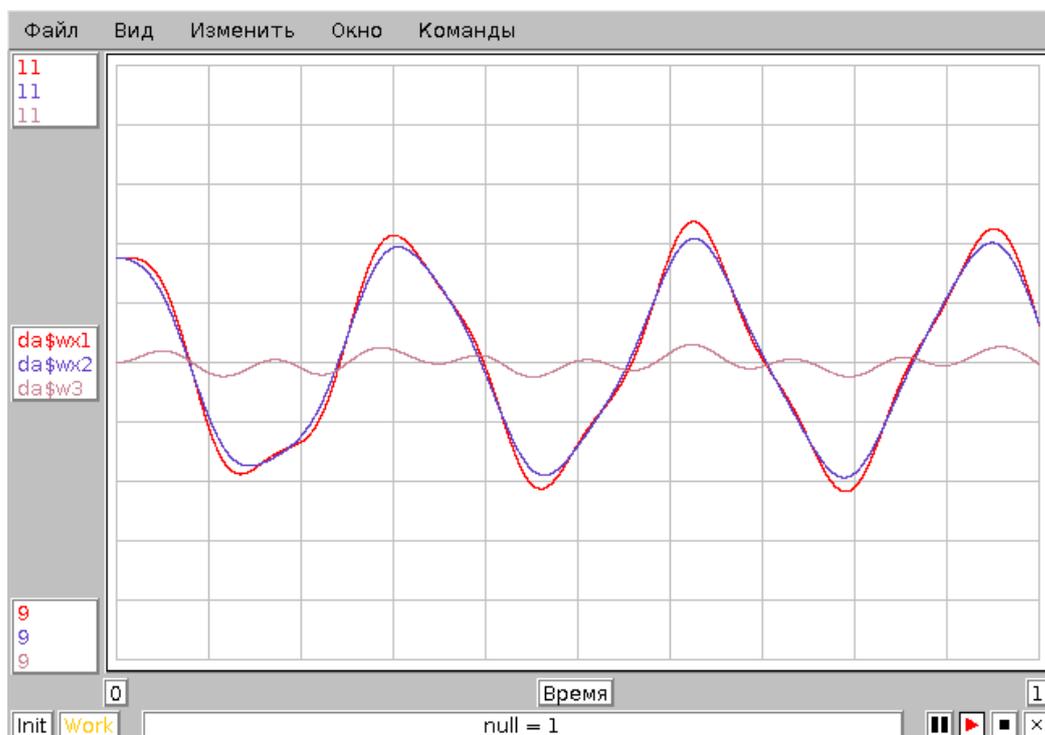


Рис. 6. Результаты второго эксперимента во временной области

На рис. 7 показана частотная характеристика механизма.

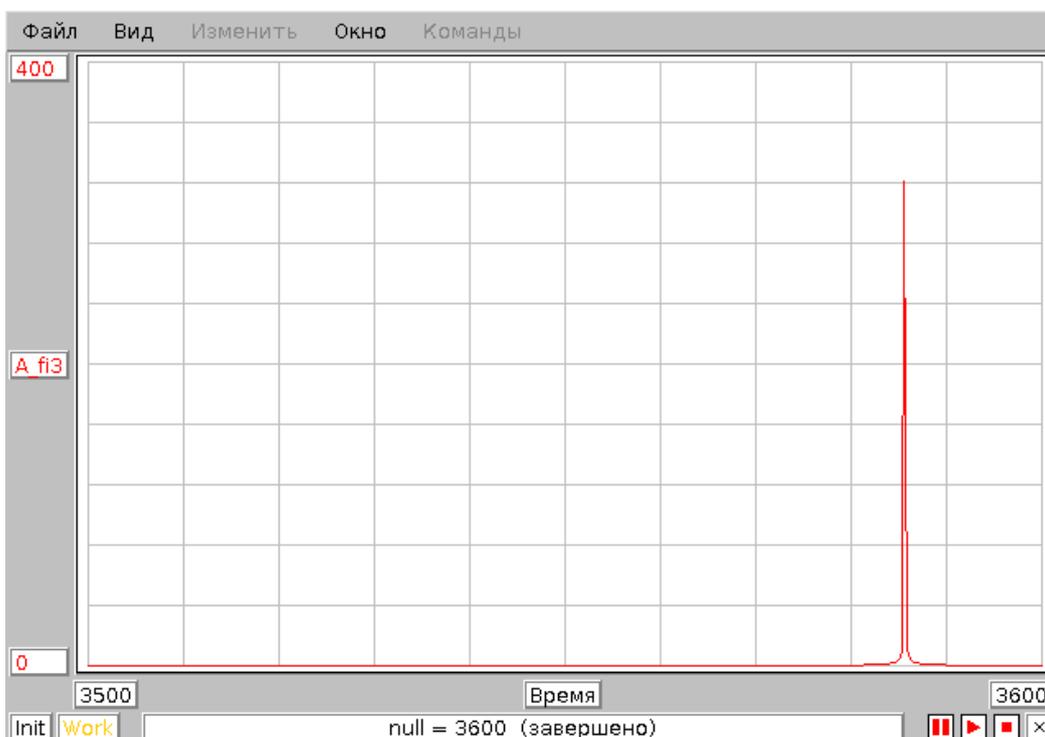


Рис. 7. Частотная характеристика во втором эксперименте

Аналитические модели карданного шарнира показывают колебания частоты выходного вала равные – максимум 10,35 рад/с, минимум 9,66 рад/с, что хорошо согласуется с вычислительным экспериментом (различия обусловлены упругостями валов). Различия в частотных характеристиках (резонансные частоты 3463 рад/с и 3586 рад/с) обусловлены различным передаточным числом кардана в двух положениях.

Заключение

Результаты проведенных численных экспериментов показали применимость разработанной математической модели карданного шарнира для исследования поведения сложных механических объектов с помощью универсальных программ анализа динамических систем.

Список литературы

- [1]. Применение комплекса ПА9 для проектирования объектов машиностроения // Центр дистанционного обучения МГТУ им. Н.Э. Баумана: сайт. Режим доступа: <http://wwwcdl.bmstu.ru/Press/Press.html> (дата обращения 28.08.2016).
- [2]. PRADIS - программный комплекс для анализа динамики систем различной физической природы // Ладуга. Инженерные услуги: сайт компании. Режим доступа: <http://www.laduga.ru/pradis/pradis.shtml> (дата обращения 28.08.2016).
- [3]. Решения LMS для моделирования и проведения испытаний // Siemens PLM Software: сайт компании. Режим доступа: http://www.plm.automation.siemens.com/ru_ru/products/lms/index.shtml (дата обращения 28.08.2016).
- [4]. Универсальный механизм // Software lab Universal mechanism: сайт компании. Режим доступа: <http://www.umlab.ru/> (дата обращения 16.10.2016).
- [5]. Гончаров П.С., Ельцов М.Ю., Коршиков С.Б., Лаптев И.В., Осюк В.А. NX для конструктора – машиностроителя. М.: Изд-во ДМК. 2010. 498 с.
- [6]. EULER. Программный комплекс автоматизированного динамического анализа многокомпонентных механических систем: сайт компании. Режим доступа: <http://www.euler.ru/index.php/euler> (дата обращения 20.11.2015).
- [7]. Трудоношин В.А., Федорук В.Г. Методология моделирования трехмерных механических систем с помощью универсальных программных комплексов анализа // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 09. С.225–236. DOI: [10.7463/0915.0810599](https://doi.org/10.7463/0915.0810599)
- [8]. Трудоношин В.А., Федорук В.Г. Математические модели балки и направляющих на ее основе для программ моделирования // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 12. С. 215–225. DOI: [10.7463/1215.0824860](https://doi.org/10.7463/1215.0824860)
- [9]. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел: пер. с англ. М.: Мир. 1980. 292 с.