электронный научно-технический журнал
ИНЖЕНЕРНЫЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51036. ISSN 2307-0595

Расчет на устойчивость стержней, нагруженных продольными разнонаправленными силами

11, ноябрь 2016

Семенов-Ежов И. Е.[1], Ширшов А. А.[1,*]

УДК: 539.3

[1]Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
*chirchovaa@mail.ru

Введение

В некоторых рычажных системах управления отдаленными от оператора агрегатами, а также в статически неопределимых стержневых системах встречаются стержни, нагруженные продольными разнонаправленными силами. В работах, посвященных решению задач устойчивости стержней [1 – 4], в справочной литературе [5], а также в работах, посвященных расчету устойчивости элементов ферм и рам [6 – 8] недостаточно данных для определения критической силы для таких стержней. Частный случай устойчивости статически неопределимого стержня, нагруженного одной силой в середине пролета, рассмотрен в работе [9], а в работе [10] рассмотрено влияние устойчивости на предельное состояние сжато-растянутого шарнирно закрепленного стержня.

* * *

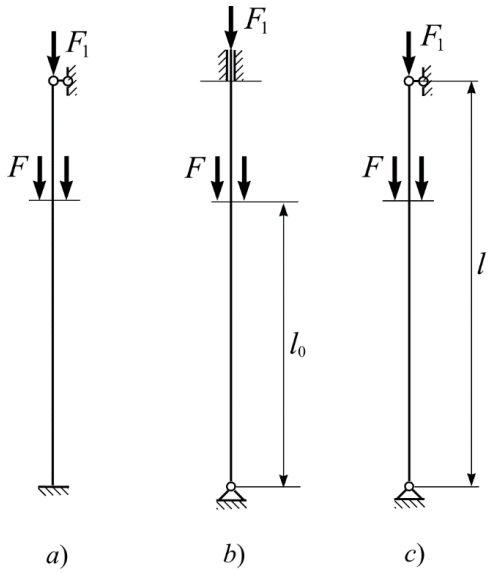

Рис.1. Схемы нагружения стержней: a) стержень, заделанный в нижнем сечении; b) закреплен верхний конец стержня; c) шарнирно опертый по концам стержень

Под критической силой понимают такое значение сжимающей силы, при котором возможен переход стержня из прямолинейной формы равновесия в криволинейную – т.е. потеря устойчивости. В настоящей работе рассмотрена задача для стержня, нагруженного двумя силами, одна из которых F приложена в пролете и вторая F_1 на торце, при различных условиях закрепления (рис.1). При этом сила F_1 может иметь как одинаковое направление с силой F, так и противоположное ей. Более интересен тот случай, когда сила F_1 - растягивающая.

Решение будем искать в постановке Эйлера (далее «точное решение»). Как известно, для этого необходимо рассмотреть равновесие стрежня в деформированном состоянии сразу после потери устойчивости, т.е. при малых перемещениях, при которых справедливо приближенное выражение для кривизны деформированной оси стержня

$$\frac{1}{\rho} = v'' = \frac{M_x}{EI_{\min}}, \tag{1}$$

где ρ – радиус кривизны, а v – прогиб стержня в текущем сечении, M_x – изгибающий момент, E – модуль упругости, $I_{\min}$ – минимальный момент инерции поперечного сечения стержня.

У всех стержней сила F приложена в пролете, поэтому для каждой из частей стержня будем иметь два различных выражения для изгибающих моментов. Рассмотрим стержень, заделанный в нижнем сечении (рис.1а). Начало координат поместим в точке О. Используя метод сечений, получаем выражения для изгибающих моментов в текущем сечении M_{x1} и M_{x2} для первого и второго участков соответственно (рис.2*a* и 2*b*):

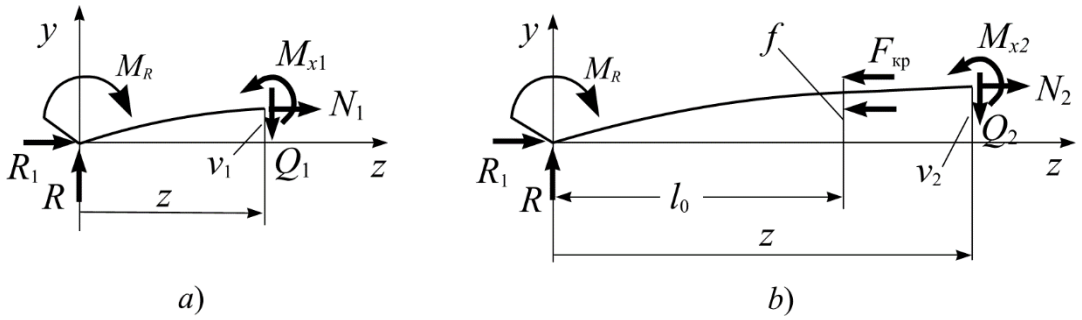

Рис.2. Изгибающие моменты в текущем сечении M_{x1} и M_{x2} для первого и второго участков

$$\begin{aligned} M_{x1} &= M_R + R \cdot z - R_1 \cdot v_1, \\ M_{x2} &= M_R + R \cdot z - R_1 \cdot v_2 + F \cdot (v_2 - f). \end{aligned} \tag{2}$$

Рассмотрим сначала случай, когда силы F и F_1 имеют одинаковое направление (обе сжимают стержень). Тогда реакция $R_1 = F + F_1$ (рис.1). Подставив в (1) выражения для изгибающих моментов (2), получаем два линейных дифференциальных уравнения второго порядка для первого и второго участков соответственно:

$$v_1'' + (1+\alpha)k^2 v_1 = k^2 ml + k^2 rz, \qquad (\text{при } z < l_0) \qquad (3.1)$$

$$v_2'' + \alpha k^2 v_1 = k^2 ml + k^2 (rz - f), \qquad (\text{при } z > l_0) \qquad (3.2)$$

где $k^2 = F/EI_{\min}$, $m = M_R/Fl$ – безразмерный момент в заделке, $r = R/F$ – безразмерная реакция в шарнирной опоре. Решение дифференциальных уравнений представим в безразмерной форме:

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= C_1 \sin\left(\sqrt{1+\alpha}\, kl\bar{z}\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{1+\alpha}\, kl\bar{z}\right) + \frac{1}{1+\alpha} m + \frac{\bar{z}}{1+\alpha} r, \\ \bar{v}_2 &= C_3 \sin\left(\sqrt{\alpha}\, kl\bar{z}\right) + C_4 \cos\left(\sqrt{\alpha}\, kl\bar{z}\right) + \frac{1}{\alpha} m + \frac{\bar{z}}{\alpha} r - \frac{1}{\alpha} \bar{f}, \end{aligned} \qquad (4)$$

где $\bar{v} = v/l$, $\bar{z} = z/l$, $\bar{f} = f/l$, $\alpha = F_1/F$. Обозначим $l_0/l = \eta$.

Постоянные интегрирования, а также неизвестные m r и f определяются из граничных условий $v_1(0) = 0$, $v_1'(0) = 0$, $v_2(l) = 0$; условий непрерывности перемещений на границе участков $v_1(l_0) = v_2(l_0) = f$, $v_1'(l_0) = v_2'(l_0)$ и условия $M_{x2}(l) = 0$, получаемого из (2). В результате приходим к однородной системе из семи алгебраических уравнений:

$$C_2 + \frac{1}{1+\alpha} m = 0,$$

$$C_1 \sqrt{1+\alpha}\, kl + \frac{1}{1+\alpha} r = 0,$$

$$C_3 \sin\left(\sqrt{\alpha}\, kl\right) + C_4 \cos\left(\sqrt{\alpha}\, kl\right) + \frac{1}{\alpha} m + \frac{1}{\alpha} r - \frac{1}{\alpha} \bar{f} = 0,$$

$$C_1 \sin\left(\sqrt{1+\alpha}\, \eta kl\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{1+\alpha}\, \eta kl\right) + \frac{1}{1+\alpha} m + \frac{\eta}{1+\alpha} r - \bar{f} = 0,$$

$$C_3 \sin\left(\sqrt{\alpha}\, \eta kl\right) + C_4 \cos\left(\sqrt{\alpha}\, \eta kl\right) + \frac{1}{\alpha} m + \frac{\eta}{\alpha} r - \frac{1}{\alpha} \bar{f} - \bar{f} = 0,$$

$$C_1 \sqrt{1+\alpha}\, kl \cos\left(\sqrt{1+\alpha}\, \eta kl\right) - C_2 \sqrt{1+\alpha}\, kl \sin\left(\sqrt{1+\alpha}\, \eta kl\right) + \frac{1}{1+\alpha} r -$$

$$- C_3 \sqrt{\alpha}\, kl \cos\left(\sqrt{\alpha}\, \eta kl\right) + C_4 \sqrt{\alpha}\, kl \sin\left(\sqrt{\alpha}\, \eta kl\right) - \frac{1}{\alpha} r = 0,$$

$$m + r - \bar{f} = 0.$$

Интересующее нас ненулевое решение системы для заданных параметров α и η получаем, приравняв нулю её определитель. Решением определителя является наименьшее, отличное от нуля значение kl.

Если сила F_1 поменяет направление (рис.1), т.е. будет растягивающей, в дифференциальных уравнениях перед коэффициентом α будет знак минус. При этом решение второго дифференциального уравнения будет выражено не через тригонометрические функции, а через гиперболические, поскольку корни характеристического уравнения будут положительными:

$$\bar{v}_1 = C_1 \sin\left(\sqrt{1-\alpha}\, kl\bar{z}\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{1-\alpha}\, kl\bar{z}\right) + \frac{1}{1-\alpha} m + \frac{\bar{z}}{1-\alpha} r,$$
$$\bar{v}_2 = C_3 sh\left(\sqrt{\alpha}\, kl\bar{z}\right) + C_4 ch\left(\sqrt{\alpha}\, kl\bar{z}\right) - \frac{1}{\alpha} m - \frac{\bar{z}}{\alpha} r + \frac{1}{\alpha} \bar{f}, \quad (5)$$

Граничные условия остаются прежними. Результаты решения представлены на рис.3 в виде графиков зависимости безразмерной силы $\bar{F} = (kl)^2 = Fl^2/EI_{\min}$ от отношения F_1/F для семи параметров $\eta = l_0/l$. Значения l_0/l приведены в поле графика. Для большей наглядности кривые, соответствующие значениям l_0/l = 0,4, 0,6 и 0,8 даны штриховой линией.

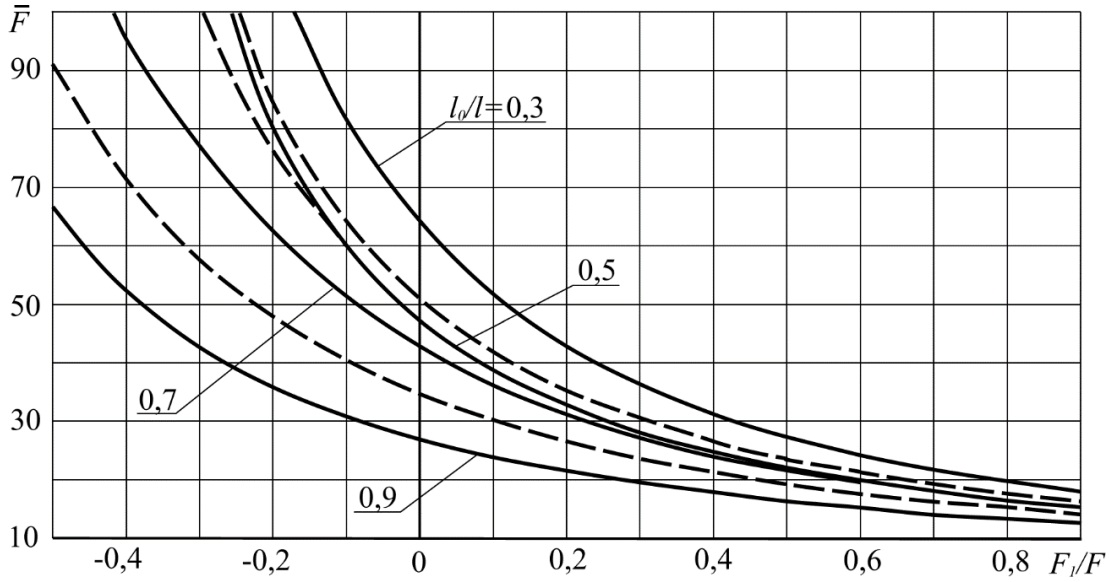

Рис.3. Графики зависимости безразмерной силы $\bar{F}$ от отношения F_1/F для расчетной схемы, показанной на рис.1*a*

Расчет стержней, показанных на рис.1*b* и 1*c*, аналогичен рассмотренному выше. Согласно условиям закрепления этих стержней в начале координат момент $M_R = 0$ и поэтому в правых частях дифференциальных уравнений (3) не будет слагаемого k^2ml. Решение дифференциальных уравнений будет иметь вид:

для сжимающей силы F_1

$$\bar{v}_1 = C_1 \sin\left(\sqrt{1+\alpha}\, kl\bar{z}\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{1+\alpha}\, kl\bar{z}\right) + \frac{\bar{z}}{1+\alpha} r,$$
$$\bar{v}_2 = C_3 \sin\left(\sqrt{\alpha}\, kl\bar{z}\right) + C_4 \cos\left(\sqrt{\alpha}\, kl\bar{z}\right) + \frac{\bar{z}}{\alpha} r - \frac{1}{\alpha} \bar{f}, \quad (6)$$

и для растягивающей силы F_1

$$\bar{v}_1 = C_1 \sin\left(\sqrt{1-\alpha}\, kl\bar{z}\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{1-\alpha}\, kl\bar{z}\right) + \frac{\bar{z}}{1-\alpha} r,$$
$$\bar{v}_2 = C_3 sh\left(\sqrt{\alpha}\, kl\bar{z}\right) + C_4 ch\left(\sqrt{\alpha}\, kl\bar{z}\right) - \frac{\bar{z}}{\alpha} r + \frac{1}{\alpha} \bar{f}. \quad (7)$$

Отличие решения будет заключаться в иных граничных условиях, а именно:
для схемы 1*b*) – $v_1(0) = 0$, $v_2(l) = 0$ $v_1'(l) = 0$, $v_1(l_0) = v_2(l_0) = f$, $v_1'(l_0) = v_2'(l_0)$;
для схемы 1*c*) – $v_1(0) = 0$, $v_2(l) = 0$; $v_1(l_0) = v_2(l_0) = f$, $v_1'(l_0) = v_2'(l_0)$, и условия $M_{x2}(l) = 0$, получаемого из (2).

Аналогичные графики зависимости безразмерной силы $\overline{F}$ от отношения F_1/F для расчетных схем, изображенных на рис. 1*b* и рис.1*c*, приведены на рис.4 и рис.5 соответственно.

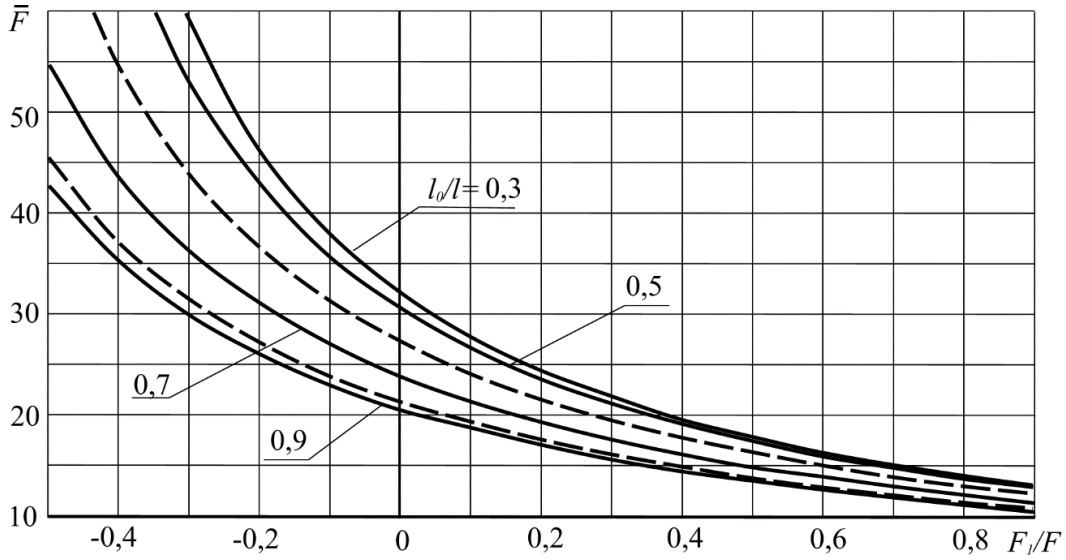

Рис.4. Графики зависимости безразмерной силы $\overline{F}$ от отношения F_1/F для расчетной схемы, показанной на рис.1*b*

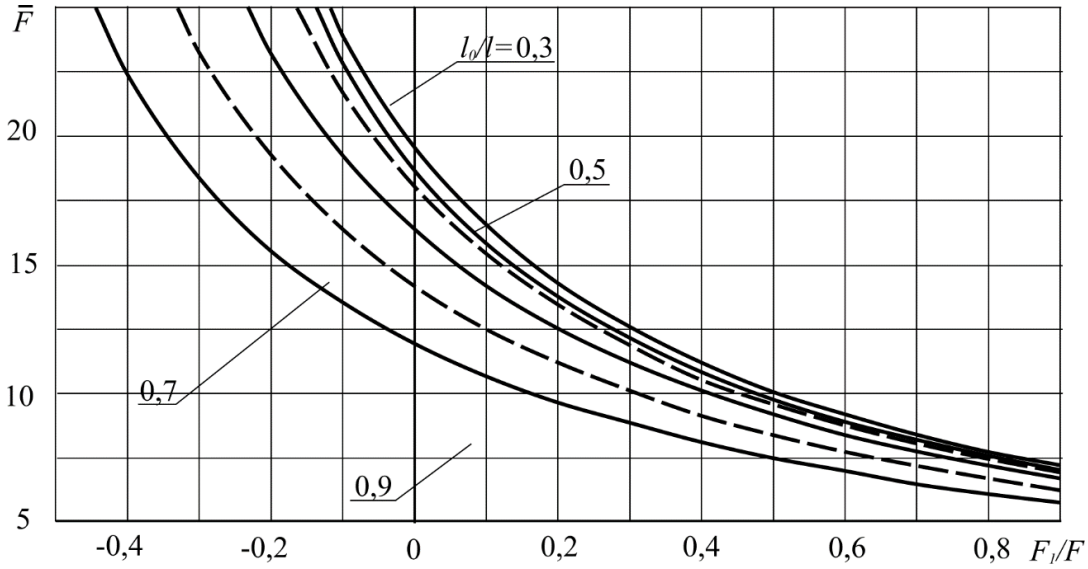

Рис.5. Графики зависимости безразмерной силы $\overline{F}$ от отношения F_1/F для расчетной схемы, показанной на рис.1*c*

Точное решение приводит к однородной системе трансцендентных уравнений и её решение достаточно сложно. Более простое решение может быть получено энергетиче-

ским методом в форме С.П. Тимошенко, при котором работа внешних сил приравнивается потенциальной энергии потерявшего устойчивость стержня. Для стержня, нагруженного двумя силами, это условие имеет вид [1]:

$$\frac{1}{2}\int_{l} EI_{\min}(v'')^2 dz = \lambda F + \lambda_1 F_1,$$

где $\lambda = \int_0^{l_0} \frac{1}{2}(v')^2 dz$ и $\lambda_1 = \int_0^{l} \frac{1}{2}(v')^2 dz$ – перемещение вдоль оси стержня точек приложения сил F и F_1 соответственно, $v(z)$ – функция, описывающая форму изогнутой оси стержня, удовлетворяющее максимальному числу кинематических и силовых граничных условий. Простое решение получаем, выбрав функцию в виде полинома масштабный коэффициент $= Al\left(a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k u^k\right)$, где $u = z/l$ – безразмерная координата, A – масштабный коэффициент. Для трех стоек, показанных на рис.1 имеем: $v(u) = Al(a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + u^4)$. Безразмерную силу $\overline{F}$ находим из равенства

$$\overline{F} = \int_0^1 (u'')^2 du \Big/ \left[\int_0^{\eta} (u')^2 du + \frac{F_1}{F}\int_0^1 (u')^2 du\right].$$

Результаты вычисления безразмерной силы $\overline{F}$ при трех различных значениях отношения F_1/F при отношении l_0/l = 0,4 приведены в табл.1. Сравнение результатов показывает, что при нагружении стержня двумя сжимающими силами различие между точным решением и решением энергетическим методом не превышает 10%. Если же сила F_1 – растягивающая, различие становится слишком большим (для схемы «а» свыше 50%). Это становится понятным, если сравнить форму изогнутой оси деформированных стержней, приведенных на рис.6. Для всех расчетных схем отношение F_1/F = -0,2, отношение l_0/l = 0,4. Сплошной линией показана изогнутая ось, полученная точным методом, а штриховой – энергетическим. Цифрой 1 отмечена линия, соответствующая нагружению стержня двумя сжимающими силами, а цифрой 2 – линия, соответствующая нагружению стержня разнонаправленными силами.

Масштабный коэффициент A для каждой расчетной схемы был выбран таким, чтобы $v(0{,}4)$ было бы равно единице.

Таблица 1. Значения безразмерной силы $\overline{F}$

Расчетная схема	Рис.1*a*			Рис.1*b*			Рис.1*c*		
F_1/F	-0,2	0,2	0,6	-0,2	0,2	0,6	-0,2	0,2	0,6
точное решение	84,5	35,2	21,2	46,1	24,6	16,6	28,8	13,7	8,89
решение энергетическим методом	128,6	37,3	21.8	54,4	26.7	17,7	33,6	14,2	9,03
погрешность %	53	3.0	2.7	18	8.9	6.6	17	3.6	1.6

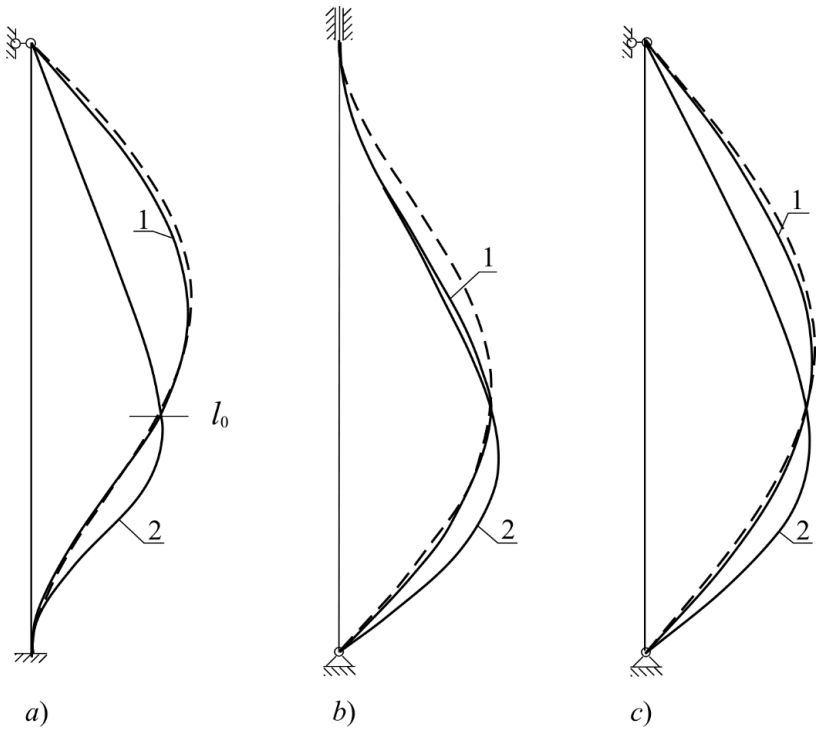

Рис.6. Изогнутая ось стержня

Заключение

Энергетический метод в форме С.П. Тимошенко не может быть рекомендован при определении критической нагрузки (силы) для стержней, нагруженных продольными силами различного направления. В этом случае на наш взгляд предпочтителен энергетический критерий в форме Брайена [1], который записывается через начальные усилия докритического состояния: $\int_l EJ_{\min}(v'')^2 dz + \int_l N_0 (v')^2 dz = 0$. Здесь N_0 - нормальная сила в стержне в докритическом состоянии.

Список литературы

[1]. Алфутов Н.А. Основы расчетов на устойчивость упругих систем. 2-ое изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение. 1991. 336 с.

[2]. Bazant Z.P., Cedolin L. Stability of structures: elastic, inelastic, fracture, and damage theories. Dover. 2003. 1035 p.

[3]. Бабанов В.В. Строительная механика. В 2 т. Т. 2: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования. 2-е изд., стер. М.: Издательский центр «Академия». 2012. 288 с. (Сер. Бакалавриат).

[4]. Yoo C.H., Lee S.C. Stability of structures. Principles and applications. Elsevier. 2011. 529 p.

[5]. Биргер И.А., Пановко Я.Г. и др. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 3. / Под общей редакцией И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение. 1988. 567 с.

[6]. Simitses G.J., Hodges D.H. Fundamentals of Structural Stability. Elsevier. 2006. 389 p.
[7]. Hirt M.A., Bez R., Nussbaumer A. Construction Métallique: Notions fondamentales et méthodes de dimensionnement. TGC, Vol. 10, 2ème ed. Lausanne. 2011. 512 p.
[8]. Hirt M.A., Crisinel M. Charpentes métalliques: Conception et dimensionnement des halles et bâtiments. TGC, Vol.11, 2ème éd. Lausanne. 2011. 744 p.
[9]. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов: Учеб. пособие для втузов. 5-е изд. испр. и доп. М.: Наука. Физматлит. 1996. 368 с.
[10]. Буланов В.Б., Семенов-Ежов И.Е., Ширшов А.А. Предельное состояние при изгибе сжато-растянутого стержня // Известия вузов. Машиностроение. 2013. № 12. С. 36-40. DOI: 10.18698/0536-1044-2013-12-36-39