электронный научно-технический журнал
ИНЖЕНЕРНЫЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51036. ISSN 2307-0595

Определение оптимального положения кольцевой опоры зеркала

04, апрель 2016

к.т.н., доц., Клюева Г. П.[1,*], к.т.н., доц. Сухова Н. А.[1]

УДК: 539.3

[1]Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
*kluevagalina@mail.ru

Введение

Основным критерием зеркал телескопов является обеспечение достаточной глубины адаптивной коррекции изображения при минимальной массе [1]. При размещении кольцевой опоры на наружном контуре зеркала максимальные перемещения будут в центре, а максимальный поворот нормали – на наружном контуре. Смещение кольцевой опоры от периферии к центру приводит к уменьшению максимальных прогибов в центре и появлению прогибов на наружном контуре. Критерием оптимального положения кольцевой опоры служит минимум среднеквадратичного отклонения (СКО) перемещения [2]. В качестве критерия можно также использовать равенство прогибов в центре и на наружном контуре пластины.

Расчет зеркала проводим по схеме круглой пластины постоянной толщины, нагруженной силами тяжести q (рис.1).

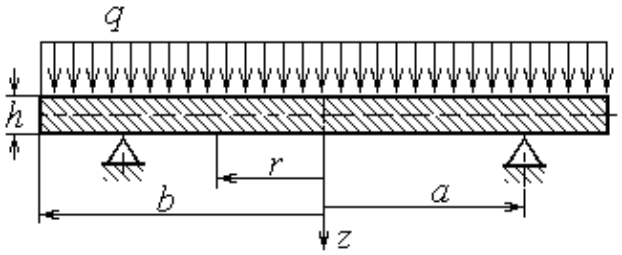

Рис. 1. Расчетная схема пластинки

Разрешающее уравнение для расчета осесимметричных пластин постоянной толщины имеет вид [3,4]

$$\theta = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1}{Dr}\int r\left(\int Q dr\right)dr\,,\ \theta = -\frac{dw}{dr}\,, \tag{1}$$

где θ – угол поворота нормали к срединной поверхности, w – осевое перемещение, r – текущий радиус, $D = Eh^3/12\left(1-\nu^2\right)$ – цилиндрическая жесткость (ν – коэффициент Пуассона), Q – перерезывающая сила, C_1 и C_2 – константы, определяемые из граничных условий.

Определив из условия равновесия перерезывающие силы и взяв интегралы в выражении (1), получаем формулы для углов поворота для двух частей пластинки:

при $r \le a$ ($x \le 1$), $$\theta_1 = \frac{qa^3}{16D}\left(C_1 x + \frac{C_2}{x} - x^3\right);$$

при $r \ge a$ ($x \ge 1$), $$\theta_2 = \frac{qa^3}{16D}\left(C_3 x + \frac{C_4}{x} - x^3 + 4\frac{b^2}{a^2}\ln x\right).$$

Здесь $x = r/a$ – безразмерный радиус.

Постоянные $C_1 \div C_4$ определяем из граничных условий:

1) при $r = 0$ ($x = 0$), $\theta_1 = 0$;
2) при $r = a$ ($x = 1$), $\theta_1 = \theta_2$;
3) при $r = a$ ($x = 1$), $M_{r1} = M_{r2}$;
4) при $r = b$ ($x = b/a$), $M_{r1} = 0$.

Здесь M_{r1} и M_{r2} – интенсивности радиальных изгибающих моментов соответственно в центральной и периферийной частях пластинки, определяемые выражениями

$$M_{r1} = \frac{qa^2}{16}\left[C_1(1+\nu) - (1-\nu)\frac{C_2}{x^2} - (3+\nu)x^2\right],$$

$$M_{r2} = \frac{qa^2}{16}\left[C_3(1+\nu) - (1-\nu)\frac{C_4}{x^2} - (3+\nu)x^2 + 4\frac{b^2}{a^2}(1+\nu)\ln x + 4\frac{b^2}{a^2}\right].$$

Из первого граничного условия получаем $C_2 = 0$. Три других условия приводят к системе уравнений, решение которой дает

$$C_3 = 2\frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{1}{\alpha^4} - \frac{3+\nu}{1+\nu}\frac{1}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^2}\ln\alpha^2 - \frac{4}{\alpha^2},$$

$$C_4 = \frac{2}{\alpha^2},\ C_1 = C_3 + C_4,$$

где $\alpha = a/b$. После интегрирования дифференциального уравнения (1) получаем выражения для определения прогибов в центральной $w_1(x)$ и периферийной $w_2(x)$ частях пластинки:

$$w_1(x) = \frac{qa^4}{16D}\left(K_1 - C_1\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right);\quad w_2(x) = \frac{qa^4}{16D}\left(K_2 - C_3\frac{x^2}{2} - C_4\ln x + \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{\alpha^2}\left(\ln x^2 - 1\right)\right).$$

Постоянные K_1 и K_2 определяем из условия равенства нулю прогиба на кольцевой опоре, т.е. при $x = 1$. Тогда $K_1 = \frac{C_1}{2} - \frac{1}{4}$, $K_2 = \frac{C_3}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{\alpha^2}$. После подстановки констант K_1 и K_2 получаем следующие выражения для перемещений:

$$w_1(x) = \frac{qa^4}{64D}\left[2C_1\left(1-x^2\right) - 1 + x^4\right],$$
$$w_2(x) = \frac{qa^4}{64D}\left[2C_3\left(1-x^2\right) - 4C_4\ln(x) - 1 + x^4 - 8\frac{x^2}{\alpha^2}\ln(x) - 4\frac{1-x^2}{\alpha^2}\right]. \qquad (2)$$

Для вычисления среднеквадратичного отклонения намечаем n равноотстоящих точек. Разбиваем радиус на несколько интервалов с шагом Δr (безразмерный шаг Δx). На радиусе $r_k = k\Delta r$ число точек равно целой части от $2\pi\, k\Delta r$. В каждой точке вычисляем безразмерное перемещение $\overline{w}_i = w_i \dfrac{64D}{qa^4}$ и по ним - среднее безразмерное перемещение $\overline{w}_m = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{w}_i$. Среднеквадратичное отклонение определяем по формуле

$$СКО = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{w}_m - \overline{w}_i\right)^2}\ .$$

Радиус $a = b\sqrt{2}/2$ делит пластинку на две равные по площади и, следовательно, по массе части. Искомое положение кольцевой опоры не должно значительно отличаться от этого значения. Исходя из этого, интервал поиска оптимального радиуса взяли в пределах от 0,64 *a/b* до 0,74 *a/b*. На рис.2 показан график изменения СКО в указанных пределах. Минимум СКО имеет место при *a/b* = 0,680.

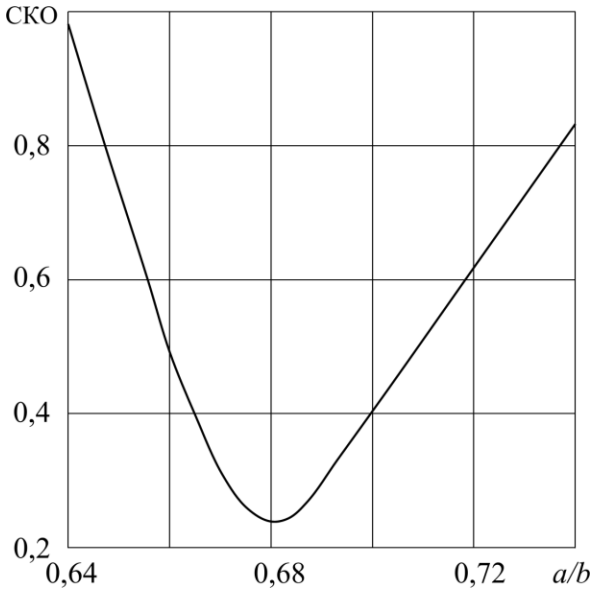

Рис. 2. График зависимости среднеквадратичного отклонения от отношения *a/b*

Условие равенства максимальных перемещений в центре пластинки (x = 0) и на ее наружном контуре ($w_1(0) = w_2(1/\alpha)$) приводит после подстановки выражений для перемещений (2) и упрощений к трансцендентному уравнению

$$f(\alpha) = 2C_1 - 1 + \left(2C_3 - \frac{4}{\alpha^2}\right)\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2} - \frac{1-\alpha 4}{\alpha^4} - \left(C_4 + \frac{2}{\alpha^4}\right)4\ln(\alpha) = 0. \qquad (3)$$

На рис. 3 показан график зависимости функции $f(\alpha)$ в пределах изменения *a/b* от 0,64 до 0,74. Корень уравнения (3) α = *a/b* = 0,676.

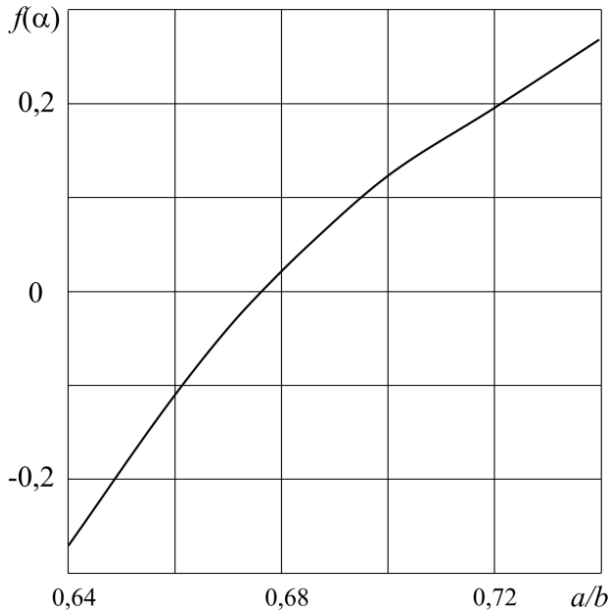

Рис. 3. График зависимости функции $f(\alpha)$ от отношения *a/b*

При определении положения кольцевой опоры не учтены возможные колебания температуры и их влияние на деформирование зеркала. Для сохранения достигнутой глубины адаптивной коррекции необходимо исключить возможность нежелательного деформирования при изменении температуры. Это можно достичь при следующих условиях:

а) при одинаковых коэффициентах линейного расширения материалов зеркала и опоры;

б) при свободном смещении нижней поверхности зеркала относительно опоры.

Действительно, при жестком соединении зеркала с опорой при изменении температуры и при различных значениях коэффициентов линейного расширения возникают дополнительные реакции параллельные срединной поверхности пластины, как это показано на рис. 4.

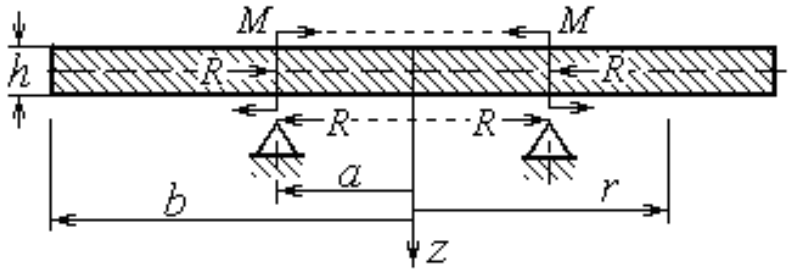

Рис. 4. Схема нагружения пластинки при изменении ее температуры

Приведение реакций к срединной поверхности приводит к изгибающим моментам $M = Rh/2$, равномерно распределенным по окружности радиуса *a*. При таком нагружении пластинки её деформированная срединная поверхность получает знакопостоянную кривизну, изменяя тем самым соотношение между прогибами в центре и на наружном контуре.

Заключение

Оптимальное расположение кольцевой опоры, согласно принятой расчетной схеме, по критерию минимума среднеквадратичного отклонения составляет 0,680 b, а по условию равенства прогибов в центре и на наружном контуре – 0,676 b. Как видно оба критерия приводят к практически одинаковым результатам.

Список литературы

[1]. Сычев В.В. Адаптивные оптические системы в крупногабаритном телескопостроении. Старый Оскол: Изд-во ТНТ. 2005. 464 с.

[2]. Сычев В.В., Ширшов А.А. Расчет облегченного сегмента составного главного зеркала телескопа // Инженерный вестник. Электронный журнал МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2014. № 11. С. 581-594. Режим доступа: http://engbul.bmstu.ru/doc/748734.html (дата обращения: 12.03.2016)

[3]. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. (Библиотека расчетчика). М.: Машиностроение. 1977. 488 с.

[4]. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учебник для ВУЗов. 10-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 1999. 592 с.

[5]. Усюкин В.И. Строительная механика конструкций космической техники: Учебник для студентов втузов. М.: Машиностроение. 1988. 392 с.