электронный научно-технический журнал
ИНЖЕНЕРНЫЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51036. ISSN 2307-0595

Начертательная геометрия — трёхмерная и многомерная

03, март 2016

Прокофьева И.В. [1,*], Демидов С.Г. [1,]**

УДК 51(092)

[1]Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
*ilonaprof@mail.ru
**sgd@email.ru

Введение

Трёхмерная начертательная геометрия, основанная на методе ортогонального проецирования, является базовой дисциплиной, необходимой для составления и чтения технических чертежей. Поэтому она включена в программу первых курсов технических вузов.

Изучение способов изображения объектов на плоскости и способов решения задач геометрического характера по заданным изображениям способствует развитию пространственного и логического мышления. Однако решение практических инженерных, научных и экономических задач ограниченно числом переменных (x, y, z) и не позволяет применить этот метод для графического решения многопараметрических задач.

Впервые задача изображения объектов многомерного пространства ставится в начале XX столетия [1]. В дальнейшем, в связи с развитием науки и техники становится актуальным вопрос об изображении на чертеже объектов, имеющих число измерений более трёх, например, в области физико-химического анализа при построении диаграмм многокомпонентных систем [2]. Дальнейшее развитие науки и техники способствует расширению области использования методов начертательной геометрии: в физико-химическом анализе [3], в техническом моделировании поверхностей с использованием ЭВМ [4], при обработке металлов давлением, прокаткой и резанием [5], при исследовании тепловых процессов в транспортных машинах [6], и в целом ряде других областей. В 1979 году появляется монография П.В. Филиппова «Начертательная геометрия многомерного пространства и её приложения», в которой изложены вопросы построения изображений линейных и нелинейных образов многомерного пространства, а также даны решения позиционных и метрических задач на чертежах, выполненных в ортогональных проекциях и в параллельной аксонометрии. В этой работе показано, что если элементы многомерного пространства моделировать образами трёхмерного пространства и изображать эти образы на чертежах, пользуясь названными методами, то для изображения на чертежах объектов многомерного пространства можно применять метод ортогональных проекций и параллельную аксонометрию [7].

1. Цель работы

Уже в девяностых годах в силу объективных причин (распад СССР) научные исследования в области решения многопараметрических задач приёмами многомерной начертательной геометрии в России и странах СНГ были прерваны. Большинство научно-технических работников не знакомы с возможностью построения многомерных объектов на плоскости, то есть возможностью графического, наиболее наглядного, решения многопараметрических задач, а студенты технических вузов не информированы о существовании многомерной начертательной геометрии.

Для дальнейшего развития экономики стран СНГ с возможностью дальнейшего решения широкого круга практических задач в различных отраслях науки и техники необходимо активизировать научную деятельность, наполнить и популяризовать методы многомерной начертательной геометрии, разъяснить преемственность методов трёхмерной и многомерной начертательной геометрии. Так в МГТУ им. Н.Э. Баумана на кафедре графики есть преподаватели, которые уделяют некоторое время на лекциях и семинарах общему знакомству с многомерной начертательной геометрией [8]. Студенты готовят доклады на конференциях СНТО по вопросам многомерной начертательной геометрии [9].

В данной работе для упрощения восприятия многомерных объектов показана аналогия приёмов изображения для трёхмерного, четырёхмерного и пятимерного пространства. При повышении мерности объекта добавляется его векторная проекция, параллельная одной из осей *x, y, z*.

2. Пример 1

В трехмерной начертательной геометрии для определения натуральной величины отрезка прямой можно воспользоваться способом вспомогательного прямоугольного треугольника (рис.1), у которого один катет фронтальная проекция прямой [A″ B″], второй катет - разность координат Δy точек A и B по оси y, определяющий удаленность точек от плоскости проекций.

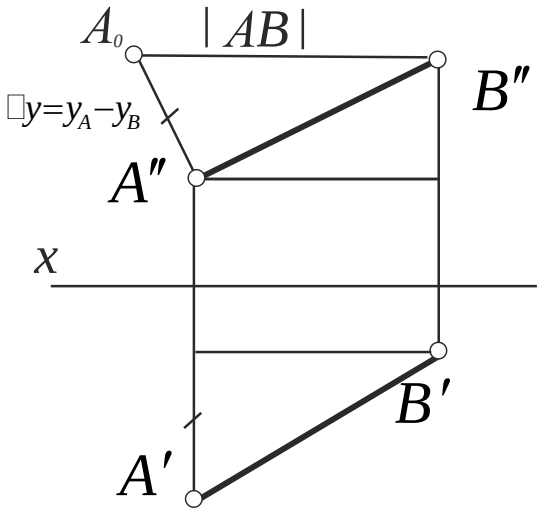

Рис.1. Способ вспомогательного прямоугольного треугольника

Этот способ основан на пространственном воображении, где аналогичный прямоугольный треугольник из пространства перемещают и пристраивают к проекции прямой [A″B″] на плоском чертеже (рис.2).

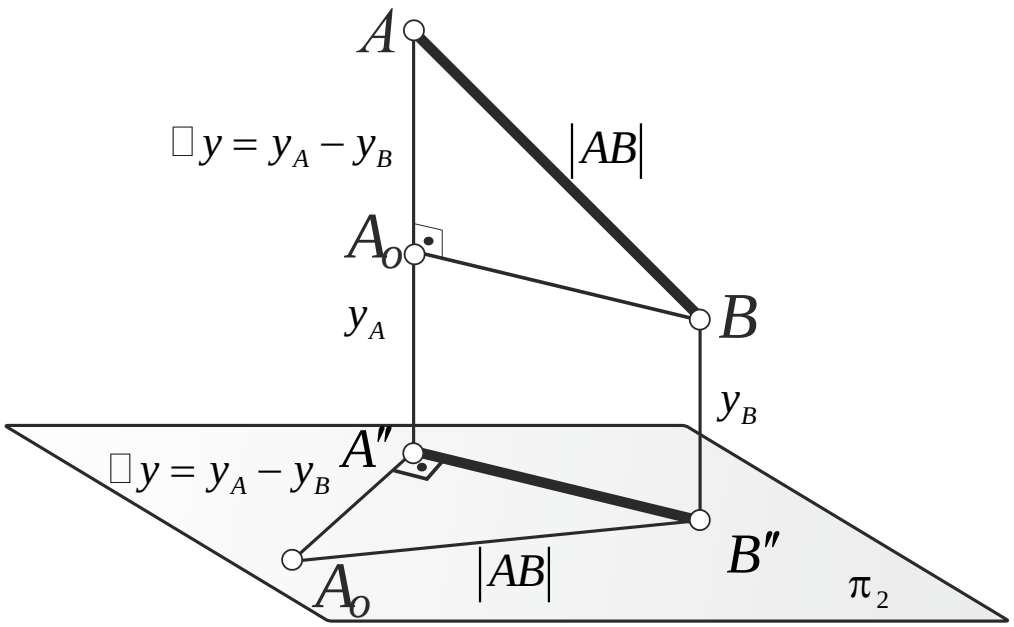

Рис.2. Пространственное воображение

Как определить натуральную величину отрезка прямой *CD* в четырехмерном пространстве?

1. Длина *L* отрезка [*AB*] прямой в трехмерном пространстве аналитически выражается формулой:

$$L_{|AB|} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}\ , \qquad (1)$$

где x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B – координаты концов отрезка, $\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$ – фронтальная проекция *A″B″*, A_0A'' – $\sqrt{(y_A - y_B)^2}$ (рис.1).

2. Длина L_1 отрезка [*CD*] прямой в четырехмерном пространстве аналитически выражается формулой

$$L_{|CD|} = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 + (z_C - z_D)^2 + (t_C - t_D)^2} \qquad (2)$$

где x_C, y_C, z_C, t_C, x_D, y_D, z_D, t_D – координаты концов отрезка.

Определение отрезка прямой на ортогональном чертеже заключается в выполнении геометрических построений, необходимых для отыскания величины, которая выражается формулой (2). Эти построения аналогичны построениям, показанным для трехмерного пространства на рис.1 и рис.2.

На ортогональном чертеже рис.3 задан отрезок [*CD*] прямой общего положения фронтальной, горизонтальной и горизонтальной векторной проекциями. Определим его длину (обозначения на рис.3 – рис.7 для многопараметрических объектов соответствуют обозначениям в аналогичных примерах в монографии Филиппова П.В. [7].

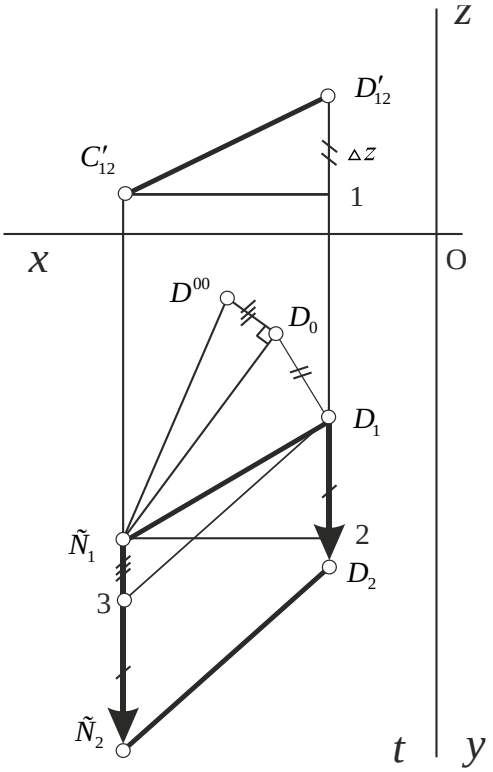

Рис. 3. Ортогональный чертеж

Длина l_1 горизонтальной проекции заданного отрезка выражается формулой:

$$\left|C_1D_1\right| = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2}\ , \tag{3}$$

так как длины отрезков C_12 и D_12 равны соответственно величинам $(x_C - x_D)$ и $(y_C - y_D)$.

Если проекцию C_1D_1 отрезка принять за один катет прямоугольного треугольника, а в качестве второго катета отложить длину отрезка $C'_{12}1$, то гипотенуза такого треугольника представляет собой отрезок, длина которого выражается формулой

$$\left|C_1D_0\right| = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 + (z_C - z_D)^2}\ , \tag{4}$$

так как отрезок $C'_{12}1$ равен величине $z_C - z_D$.

Если далее построенный отрезок C_1D_0 также принять за один из катетов прямоугольного треугольника, в котором в качестве второго катета (рис.3) принят отрезок длиной, равной величине $t_C - t_D$, то гипотенуза такого треугольника и является искомой длиной L_1 заданного отрезка.

Так как третья проекция точек *C* и *D* представлены длиной вектора C_1C_2 и длиной вектора D_1D_2, то $t_C - t_D$ представлена отрезком C_13.

Таким образом, определение длины отрезка прямой общего положения в четырехмер-

ном пространстве на ортогональном чертеже геометрически выразилось последовательным построением двух прямоугольных треугольников при горизонтальной проекции заданного отрезка.

3. Длина некоторого отрезка *EF* прямой в пятимерном пространстве аналитически выражается формулой:

$$L_{2|EF|} = \sqrt{(x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2 + (z_E - z_F)^2 + (t_E - t_F)^2 + (u_E - u_F)^2}\ , \quad (5)$$

где x_E, y_E, z_E, t_E, u_E, x_F, y_F, z_F, t_F , u_F – координаты концов отрезка. Следовательно, определение длины отрезка прямой на ортогональном чертеже заключается в выполнении геометрических построений, необходимых для отыскания величины, выраженной формулой (5).

3. Пример 2

Рассмотрим изображение гиперплоскости на чертеже.

Линейное подпространство, размерность которого n – 1, обычно называется гиперплоскостью пространства Π^n.

Уравнение плоскости в трехмерном пространстве имеет вид:

$$Ax+By+Cz+E=0 \quad (6)$$

Это уравнение может быть преобразовано в уравнение вида:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \quad (7)$$

которое называется уравнением плоскости относительно отрезков, отсекаемых ею на осях координат, так как числа *a*, *b*, *c* выражают эти отрезки. Таким образом, между уравнениями (6) и (7) плоскости и изображением ее следов на чертеже устанавливается непосредственная связь (рис.4). Эта плоскость пересекается с координатными плоскостями по прямым, которые будем называть следами плоскости.

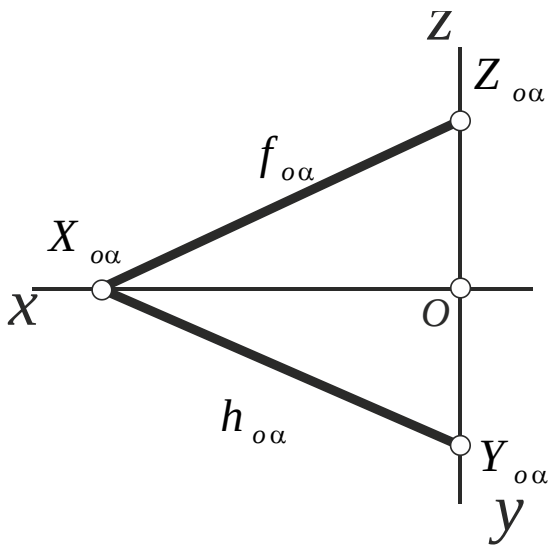

Рис. 4. Связь между уравнениями плоскости и изображением её следов

Уравнение гиперплоскости в четырехмерном пространстве имеет вид:

$$Ax+By+Cz+Dt+E=0 \tag{8}$$

Это уравнение может быть преобразовано в уравнение вида:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}+\frac{t}{d}=1, \tag{9}$$

которое называется уравнением гиперплоскости относительно отрезков, отсекаемых ею на осях координат, так как числа *a, b, c, d* выражают такие отрезки. Следовательно, между уравнением гиперплоскости и изображением ее следами на чертеже устанавливается непосредственная связь.

Эта гиперплоскость пересекается с координатными гиперплоскостями по плоскостям, которые будем называть следами гиперплоскости (рис.5)

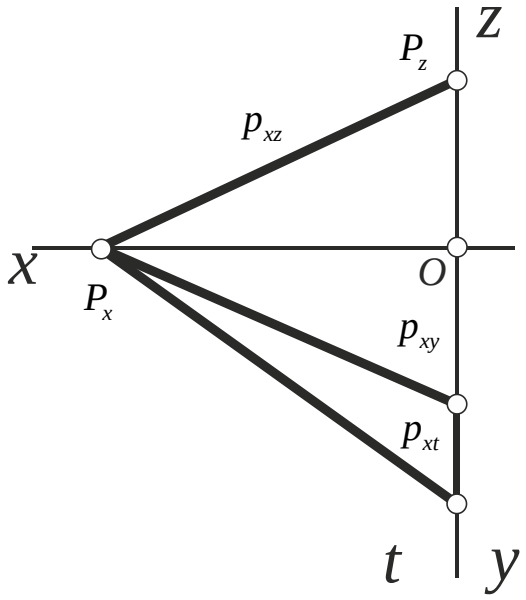

Рис. 5. Следы гиперплоскости

Уравнение гиперплоскости пятимерного пространства имеет вид:

$$Ax+By+Cz+Dt+Eu+F=0 \tag{10}$$

Это уравнение может быть преобразовано в уравнение вида:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}+\frac{t}{d}=1, \tag{11}$$

которое называется уравнением гиперплоскости относительно отрезков, отсекаемых ею на осях координат, так как числа *a, b, c, d, e* выражают эти отрезки.

Следы гиперплоскости на координатных плоскостях, пересекая координатные оси, отсекают на них отрезки, которые очевидно выражаются упомянутыми числами (рис.6). Следовательно, между уравнениями гиперплоскости (10) и (11) и изображениями гиперплоскости ее следами имеется непосредственная связь.

Обобщая изложенное можно сделать следующие выводы [7]:

1. Метод моделирования многомерного пространства векторами трехмерного про-

странства, параллельными одной из осей прямоугольной системы координат, позволяет получить на ортогональном чертеже метрически определенные (обратимые) изображения этих элементов.

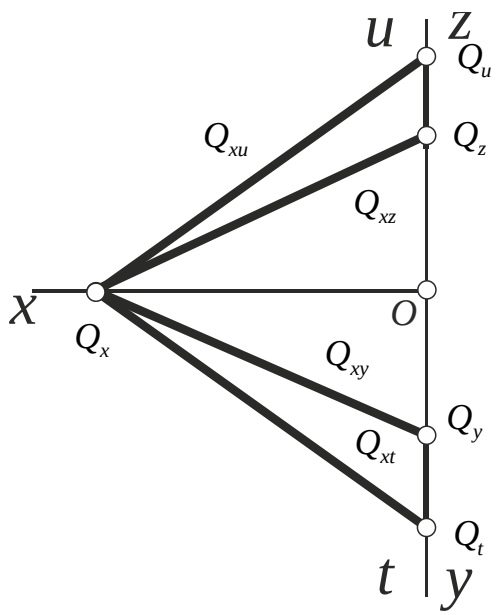

Рис. 6. Отрезки на координатных осях

2. Такое моделирование элементов многомерного пространства для изображения на чертежах линейных и нелинейных образов этого пространства, а также решения позиционных и метрических задач с названными образами позволяет использовать методы проецирования, которые имеют наиболее широкое распространение в инженерной практике и изучаются в ВУЗах, – метод ортогональных проекций.

3. При решении позиционных и метрических задач многомерного пространства на ортогональном чертеже могут быть использованы приемы и способы построения, аналогичные применяемым в начертательной геометрии трехмерного пространства. Некоторые особенности решений задач обусловлены соответствующей размерностью пространства.

4. Использование прямоугольной координатной системы устанавливает непосредственную связь между аналитической формой задания этих образов и их графическим выражением на ортогональном чертеже.

5. Классические методы начертательной геометрии трехмерного пространства – метод ортогональных проекций, а также метод прямоугольных координат – находят непосредственное применение и в начертательной геометрии многомерного пространства.

4. Пример 3

В качестве примера решения многопараметрической задачи рассмотрим применение начертательной геометрии многомерного пространства в линейном программировании.

Задачи экономики, организации и планирования производства, основу которых со-

ставляет проблема выбора рационального решения с целью оптимального использования комплекса взаимосвязанных факторов, решают методами линейного программирования.

Основная задача линейного программирования имеет следующую математическую форму, которую принято называть канонической.

Найти максимум (минимум) линейной формы:

$$F = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + c_0 \qquad (12)$$

при условии:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ &x_1 \geq 0 \quad \ldots \quad x_n \geq 0 \end{aligned} \qquad (13)$$

Транспортная задача по критерию стоимости перевозок является одной из задач линейного программирования и формулируется следующим образом.

На m пунктах отправления сосредоточено соответственно некоторое количество однородного груза. Этот груз следует перевезти в n пунктов назначения, причем в каждый из них надо завезти определенное количество этого груза. Известна стоимость перевозки единицы груза для каждого пункта назначения. Необходимо составить план перевозок, при котором его общая стоимость будет минимальна.

Областью решений системы ограничений – неравенств является выпуклое многогранное множество в пространстве, число измерений которого равно числу свободных неизвестных в системе ограничений. Это выпуклое множество ограничено гиперплоскостями, уравнения которых получают из неравенств системы ограничений. Координаты каждой вершины многогранного множества выражают одно из допустимых решений. То, при котором достигается экстремум линейной формы, является оптимальным.

Линейная форма (12) определяет в том же пространстве семейство параллельных гиперплоскостей.

Если представить, что через каждую вершину гиперграннника проходит одна из гиперплоскостей такого семейства, то вершиной оптимального решения является та, через которую проходит гиперплоскость, соответствующая экстремальному значению линейной формы.

Если одна из гиперплоскостей семейства проходит вне гиперграннника решений, то вершина, в которой имеет место оптимальное решение, является наименее или наиболее удаленной от гиперплоскости линейной формы в зависимости от того, в какую сторону гиперграннника решений эта гиперплоскость проведена, от направления возрастания или убывания линейной формы при параллельном перемещении ее гиперплоскости и от того, максимизируется или минимизируется линейная форма.

Следовательно, процесс отыскания оптимального решения геометрически можно рассматривать и как процесс определения наибольшего или наименьшего расстояния от вер-

шин гиперграннника решений до некоторой заданной гиперплоскости линейной формы.

Преобразование проекций в многомерном пространстве может выполняться по специально разработанным программам, и результат преобразования может быть представлен на экране монитора (рис.7)

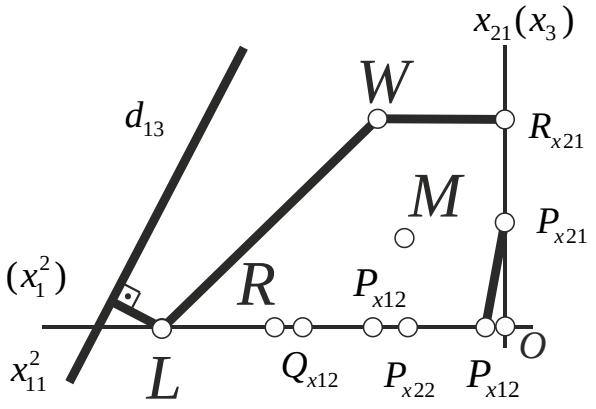

Рис. 7. Преобразование проекций в многомерном пространстве

Основными достоинствами графического решения транспортной задачи [7] является:

1. Наглядное выражение геометрической сущности задачи, благодаря чему оказывается возможным осуществление ее экономического анализа.
2. Простота отыскания и наглядность допустимых решений, а также исключение "лишних" неравенств.
3. Сокращение объема вычислений, которые характерны для известных аналитических методов.

Заключение

Основой решения многопараметрических задач является графическая интерпретация аналитического выражения геометрическими объектами и дальнейшее решение задачи приёмами начертательной геометрии. Повышение мерности пространства требует моделирования этих геометрических объектов на ЭВМ.

Метод моделирования многомерного пространства векторами трёхмерного пространства, параллельными одной из осей системы прямоугольных координат, позволяет получить изображения этих элементов на чертеже.

Такое моделирование элементов многомерного пространства позволяет использовать методы проецирования, которые имеют наиболее широкое распространение в инженерной практике и изучаются в вузах – метод ортогональных проекций.

При решении задач многомерного пространства на ортогональном чертеже могут быть использованы приемы и способы, применяемые в начертательной геометрии трёхмерного пространства.

Использование прямоугольной координатной системы устанавливает непосредственную связь между аналитической формой задания этих образов и их графическим выражением на оргтогональном чертеже.

Классические методы начертательной геометрии трёхмерного пространства – метод ортогонального проецирования используются в начертательной геометрии многомерного пространства.

Список литературы

[1]. Schoute P.H. Mehrdimensionale Geometrie. T. I. – Leipzig. 1902. 295 p.

[2]. Федоров Е.С. Графические операции с четырьмя независимыми переменными. // Известия Российской академии наук. Сер. VI. 1918. Т.12. № 7. С. 615 – 624.

[3]. Аносов В.Я. К вопросу об изображении многокомпонентных систем. Метод спиральных координат // Известия Сектора физико-химического анализа. Институт общей и неорганической химии. М.: Л.: Изд-во АН СССР. 1936. Т. IX. № 5. С. 5 – 25.

[4]. Котов И.И. Геометрические основы ключевых способов построения поверхностей. // Труды Всесоюзного заочного энергетического института. М.: МЭИ. 1957. Вып. 10. С. 15 – 36.

[5]. Алексеев Ю.Н. Анализ процессов обработки металлов давлением, прокаткой и резанием в многомерных пространствах. // Самолетостроение и техника воздушного флота. Харьков. 1968. Вып. 13. С. 124 – 126.

[6]. Филиппов В.В. Об изображении тепловых процессов и циклов транспортных тепловых машин в пространстве различных измерений. // Труды Всесоюзного заочного института ж.-д. транспорта. 1969. Вып. 33. С. 58 – 110.

[7]. Филиппов П.В. Начертательная геометрия многомерного пространства и ее приложения. Л.: Изд-во Ленинградского университета. 1979. 280 с.

[8]. Якунин В.И. Гузненков В.Н. Геометрическое моделирование как обобщение методов прикладной геометрии и её разделов // Интеграл. 2012. №5. С.120–121.

[9]. Гузненков В.Н. Геометро-графическое образование в техническом университете // Alma mater (Вестник высшей школы). 2014. №10. С. 71-75.