электронный научно-технический журнал
ИНЖЕНЕРНЫЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51036. ISSN 2307-0595

Методологические особенности формулы Тейлора в курсе математического анализа

01, январь 2016

Кандаурова И. Е.

УДК: 517.26

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
handaur@gyroplane.ru

Введение

Классический курс математического анализа в техническом университете включает в себя сложную для студентов тему, связанную с формулой Тейлора. Однако эта тема важна в дальнейшем изучении курса, поэтому необходимо, чтобы студенты владели этим материалом и умели хорошо и быстро проводить качественный анализ функций с использованием этой формулы.

Для начала можно отметить, что любая функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям теоремы Тейлора, может быть представлена в виде суммы ее многочлена Тейлора $T_n(x)$ и остаточного члена $R_n(x)$. Разнообразные применения формулы Тейлора основаны на возможности сведения изучения свойств функции $f(x)$ к существенно более простой задаче изучения этих свойств у соответствующего многочлена Тейлора.

При этом необходимо подчеркнуть, что никакой многочлен порядка меньшей или равной n, отличный от ее многочлена Тейлора порядка n, не может приближать данную функцию с точностью до $o((x-x_0)^k), k>n$. Приближение функции $f(x)$ ее многочленом Тейлора $T_n(x)$ - решение задачи о наилучшей аппроксимации $f(x)$ в n-мерном линейном пространстве многочленов порядка не выше n [2].

1. Формула Тейлора

Если функция $f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности и дифференцируема n раз в точке x_0, причем производные непрерывны в точке x_0 и ее окрестности, то функцию можно представить как сумму ее многочлена Тейлора и остатка, который просто есть разность между функцией и ее многочленом

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+.....+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x).$$

И такое представление в окрестности точки x_0 единственно. Смысл формулы Тейлора в ее остаточном члене, именно он определяет дополнительные свойства раскладываемой функции.

Сумма

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+.....+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

называется многочленом Тейлора $T_n(x)$, , а $R_n(x)$ - остаточным членом. Сама формула представляет собой разложение произвольной функции на многочлен Тейлора и остаточный член. При $x_0=0$ формула называется формулой Маклорена и имеет вид

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+.....+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}+R_n(x). \quad [1].$$

К этому частному случаю всегда можно свести задачу разложения функции, взяв $(x-x_0)$ за новую независимую переменную.

Отметим еще и тот факт, что формула Тейлора дает единый метод выделения главной части функции в окрестности данной точки. Полагая, что

$$x-x_0=\Delta x,\ f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta y,$$

получаем другой вид записи формулы:

$$\Delta y=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\Delta x^k+o(\Delta x^n).$$

Таким образом, приращение функции разложено по степеням приращения независимой переменной. Так как

$$f^{(k)}(x_0)\Delta x^k=d^k f(x_0),$$

то

$$\Delta y=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}d^k f(x_0)+o(\Delta x^n).$$

В этом виде формула Тейлора особенно интересна тогда, когда приращение независимой переменной Δx есть величина бесконечно малая.

Отсюда видно, что при $\Delta x\to 0$ последовательные дифференциалы представляют собой, с точностью до факториалов в знаменателе, бесконечно малые члены соответствующих порядков в разложении бесконечно малого приращения функции [8].

2. Остаточный член в формуле Тейлора

Еще раз следует отметить, что остаточный член в формуле Тейлора является главной частью этой формулы. Его оценка в зависимости от n дает нам ошибку, которую мы допускаем, взяв вместо суммы всего ряда для функции сумму $(n+1)$ первых его членов. Поэтому остаточный член имеет большое значение для приближенных вычислений значений функции при помощи разложения ее в степенной ряд [4].

Здесь мы можем привести обзор разных форм остаточного члена: в форме Пеано, Лагранжа, Коши, в интегральной форме. Однако, есть и другие формы остаточного члена. Дополнительные свойства функции определяются свойствами остатка, а именно: в форме Пеано требуется n-кратная дифференцируемость, в форме Коши или Лагранжа - $(n+1)$-кратная непрерывная дифференцируемость функции.

Выбирая форму остаточного члена, следует иметь в виду конкретный тип решаемой задачи. Например:

- форма Пеано используется для задач асимптотического поведения (вычисление пределов, сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций с выделением их главных частей),

- форма Лагранжа и Коши используется для определения погрешности приближенных вычислений и решения задачи о сходимости ряда Тейлора [8].

Одной из трудностей этой темы и является именно определение остаточного члена $R_n(x)$ в формуле Тейлора, который представляет собой погрешность, допускаемую при замене функции многочленом Тейлора с центром в точке x_0. Если нас интересует численное значение этой погрешности, то для ее оценки используется остаточный член в форме Лагранжа и в форме Коши.

А если интересует порядок малости этой погрешности, то используют для ее оценки остаточный член в форме Пеано.

Остаточный член в форме Пеано имеет вид $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$, и в этом случае мы знаем лишь, что при постоянном n и $x \to x_0$ он будет бесконечно малой порядка выше n-ого по сравнению с $(x-x_0)$, хотя мы и ничего не знаем об его величине ни при одном фиксированном x. Эта форма имеет определенно локальный характер, характеризуя лишь поведение функции при стремлении x к x_0. Эта форма не позволяет устанавливать для каких значений x многочлен Тейлора $T_n(x)$ воспроизводит функцию $f(x)$ с указанной степенью точности, ничего не говорит она о том, как можно было бы при данном x воздействовать на величину остаточного члена $R_n(x)$ за счет увеличения n. Этим требованиям отвечает форма Лагранжа и Коши [1].

Если функция существует и непрерывно дифференцируема $(n+1)$ раз в некоторой окрестности $(x_0-\delta, x_0+\delta), \delta > 0$ точки x_0, то остаточный член можно представить в следующей форме, называемой формой Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

где $(n+1)$ производная берется для некоторого промежуточного между x_0 и x значения c.

Большое значение имеет остаточный член в форме Коши

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)(x-x_0)}{n!} \quad [9].$$

Если известно, что (n+1) -я производная $M_{n+1} = \max |f^{(n+1)}(x)|$ ограничена на интервале $(0 < h < \delta)$, то можно оценить величину остаточного члена следующим образом:

$$|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}(h)}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

Обозначим правую часть этого неравенства через $\omega, \omega = \omega(n,h)$.

3. Задачи, решаемые с помощью разложения

Можно поставить три естественные задачи, связанные с определением одной из величин (ω, n, h) через две остальные.

1) Даны n и h, найти ω, т.е. определить оценку сверху для ошибки, получающейся при замене $f(x)$ на интервале $(x_0, x_0 + h)$ ее многочленом Тейлора n-ой степени.

2) Даны h и ω, найти n, т.е. определить степень многочлена Тейлора, для которого ошибка от замены им функции $f(x)$ в данном интервале $(x_0, x_0 + h)$ не превзойдет данной величины ω.

3) Даны n и ω, найти h, т.е. определить тот интервал $(x_0, x_0 + h)$, на котором гарантируется, что ошибка от замены функции $f(x)$ ее многочленом Тейлора n-ой степени не превзойдет данной величины ω [10].

Те же задачи можно поставить для интервала $(x_0 - h, x_0)$ и решать их тем же путем.

В дальнейшем будут использоваться следующие важные разложения функций. Таблица расширена и содержит следствия из основных пяти разложений основных элементарных функций [11]:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots \frac{m(m-1)(m-2)(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots + x^n + o(x^n)$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+2}).$$

$$a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!}x + \frac{\ln^2 a}{2!}x^2 + \frac{\ln^3 a}{3!}x^3 + ... + \frac{\ln^n a}{n!}x^n + o(x^n)$$

Пользуясь стандартными разложениями, можно, не вычисляя производных, строить разложения для более сложных функций.

4. Методы построения формулы Тейлора

Существуют два подхода построения формулы Тейлора:

- непосредственный, в котором коэффициенты вычисляются по производным,
- с использованием стандартных разложений.

Каждый метод имеет свои преимущества и недостатки. Важно отметить, что если сформулирована практическая задача, то надо выбрать конкретный вид остаточного члена.

Полезно начать решение задач на занятии с разложения многочлена в окрестности указанной точки [11].

Если $p(x)$ есть целый многочлен степени n:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ...a_n x^n,$$

то, последовательно дифференцируя его n раз и полагая во всех формулах $x = 0$, найдем выражения коэффициентов многочлена через значения самого многочлена и его производных при $x = 0$:

$$a_0 = p(0), a_1 = \frac{p'(0)}{1!}, a_2 = \frac{p''(0)}{2!}, a_3 = \frac{p'(0)}{3!}, ..., a_n = \frac{p^{(n)}(0)}{n!}.$$

Подставив эти значения коэффициентов в выражение для $p(x)$, получаем формулу

$$p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \frac{p'''(0)}{3!}x^3 + ... + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Эта формула представляет собой разложение многочлена по степеням x [1].

Отметим важный факт, что если многочлен и формула Тейлора порядка n, то остаток в разложении нулевой.

Пример 1. Многочлен $p(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ разложить по целым положительным степеням $(x-2)$.

Решим задачу с использованием производных.

$$p'(x) = 3x^2 - 4x + 3; p''(x) = 6x - 4; p'''(x) = 6; p''''(x) = p^{(n)}(x) = 0.$$

Отсюда

$$p(2) = 11, p'(2) = 7, p''(2) = 8, p'''(x) = 6.$$

Следовательно,

$$x^3 - 2x^2 + 3x + 5 = 11 + 7 \cdot (x-2) + 8 \cdot \frac{(x-2)^2}{2!} + 6 \cdot \frac{(x-2)^3}{3!}$$

или

$$x^3-2x^2 3x+5=11+7(x-2)+4(x-2)^2+(x-2)^3.$$

Используем второй подход. Обозначим $x-2=t$, выразим $x=t+2$ и подставим в многочлен, раскроем скобки и сгруппируем по степеням, а затем подставим старую переменную. Получим следующий результат

$$p=(t+2)^3-2(t+2)^2+3(t+2)+5=t^3+6t^2+12t+8-2t^2-8t-8+3t+6+5=$$
$$=t^3+4t^2+7t+11=(x-2)^3+4(x-2)^2+7(x-2)+11.$$

Далее также на одной функции покажем разложение по заданным степеням непосредственно и используя стандартные разложения.

Пример 2. Построить разложение Тейлора для функции $e^{\sin x}$ по степеням x до слагаемого x^3 с остаточным членом в форме Пеано.

Если $f(x)=e^{\sin x}$, то

$f'(x)=e^{\sin x}\cos x,\ f''(x)=e^{\sin x}(\cos^2 x-\sin x),\ f'''(x)=e^{\sin x}(\cos^3 x-3\sin x\cos x-\cos x)$.

Тогда при $x=0$ находим $f(0)=f'(0)=f''(0)=1, f'''(0)=0$.

При $x\to 0$ разложение имеет вид

$$e^{\sin x}=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3).$$

Теперь получим разложение этой же функции $e^{\sin x}$, используя известные стандартные разложения до слагаемого степени x^3.

$$e^{\sin x}=1+\sin x+\frac{1}{2}\sin^2 x+\frac{1}{6}\sin^3 x+o(x^3)$$

(по известному разложению e^x). Вместо $o(\sin^3 x)$ можно записать $o(x^3)$, так как при $x\to 0$ бесконечно малые x и $\sin x$ эквивалентны. Так как $\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)$, то, учитывая точно все степени x до третьей включительно, а более высокие степени x (не выписывая их) включая в остаточный член, получим:

$$e^{\sin x}=1+(x-\frac{1}{6}x^3)+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

и окончательно

$$e^{\sin x}=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\quad [6].$$

Пример 3. Построить разложение Тейлора для функции $f(x)=\cos 2x$ по степеням $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ до члена, содержащего слагаемое $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3$ с остатком в форме Пеано.

Пусть $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=t$, тогда $x=t+\frac{\pi}{4}$ и $\cos 2x=\cos 2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin 2t$.

Используя стандартное разложение для $\sin x$, получим:

$$-\sin 2t = -(2t - \frac{(2t)^3}{3!} + o(t^4)) = -2t + \frac{4}{3}t^3 + o(t^4).$$

Тогда

$$\cos 2x = -2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4\right).$$

Пример 4. Используя стандартные разложения, представить функцию $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$ по степеням x до $o(x^{2n=1})$.

Предварительно перепишем функцию, подготовив ее для использования известного стандартного разложения для степени. Получаем:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{x^2}{4}\right) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - 1\right)}{2!}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^2 +$$

$$+ \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - 1\right)\left(-\frac{1}{2} - 2\right)}{3!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3 + \ldots + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - 1\right)\left(-\frac{1}{2} - 2\right)\ldots\left(-\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!}(-\frac{x^2}{4})^n + o(x^{2n+1})) =$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{1! \cdot 2}\frac{x^2}{4} + \frac{1 \cdot 3}{2! \cdot 2^2}\frac{x^4}{4^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3! \cdot 2^3}\frac{x^6}{4^3} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n-1)}{n! \cdot 2^n} + o(x^{2n+1})) =$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2k-1)}{k! \cdot 2^{3k+1}} x^{2k} + o(x^{2n+1}) \quad [7].$$

В индивидуальном домашнем задании и в рубежном контроле по рассматриваемой теме студенты должны решить именно такую задачу: представить функцию по степеням x, используя стандартные разложения.

Наибольшую трудность в теме формула Тейлора у студентов вызывают вопросы об оценки погрешности приближенной формулы и вычислений приближенных значений функции.

Для оценки погрешности замены функции рядом Тейлора остаточный член записывают в форме Лагранжа. На занятии полезно рассмотреть задачи следующих типов.

Пример 5. Оценить погрешность приближенной формулы $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ при $|x| < 0{,}2$.

Используя стандартное разложение для $\cos x$ и остаточный член в форме Лагранжа, получим:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x),$$

где

$$R_{2n+1}(x)=(-1)^{n+1}\cos c\frac{x^{2n+1}}{(2n+2)!},\quad |R_{2n+1}(x)|\le\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Для нашей задачи $n=1$ $|R_3(x)|\le\frac{x^4}{24}$. Если $|x|<0{,}2$, то $|R_3(x)|<0{,}0001$.

Аналогично можно получить и оценить для заданных значений x удобные приближенные формулы:

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{6},\operatorname{tg}x\approx x+\frac{x^3}{3},\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2,\frac{1}{1+x}\approx 1-x+x^2,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}\approx 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2,\sqrt[m]{1+x}\approx 1+\frac{x}{m},(1+x)^m\approx 1+mx,$$

$$a^x\approx 1+x\ln a,e^x\approx 1+x,\ln(1+x)\approx x \quad \text{и т.д.} \quad [6].$$

Пример 6. Найти приближенно значение $\sqrt{10}$.

Имеем $\sqrt{10}=\sqrt{3^2+1}=3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$. Полагая $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{2}}$ и ограничиваясь в разложении для степени до члена с x^3, получим:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3+R_3(x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+R_3(x).$$

Остаточный член запишем в виде:

$$R_3(x)=\frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4=\frac{f^{(4)}(\theta x)}{4!}x^4,$$

где $0<\theta<1$.

Так как $x=\frac{1}{9}$, то

$$\left(1+\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\frac{1}{9}-\frac{1}{8}\frac{1}{81}+\frac{1}{16}\frac{1}{729}+R_3\left(\frac{1}{9}\right),\quad R_3\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{24}f^{(4)}\left(\frac{\theta}{9}\right)\cdot\frac{1}{9^4}.$$

Учитывая, что $f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16}(1+x)^{-\frac{7}{2}}$, получаем

$$R_3(\frac{1}{9})=-\frac{1}{24}\frac{15}{16}\left(1+\frac{\theta}{9}\right)^{-\frac{7}{2}}\frac{1}{6561}=-\frac{10}{1680616}\left(1+\frac{\theta}{9}\right)^{-\frac{7}{2}},0<\theta<1.$$

Очевидно, что $\left|R_3\left(\frac{1}{9}\right)\right|<\frac{10}{1680616}<6\cdot 10^{-6}$.

$$\sqrt{10}=3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}=3\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{81}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{729}+R_3\left(\frac{1}{9}\right)\right),\quad 3|R_3|<10^{-4}.$$

Окончательно имеем

$$\sqrt{10} \approx 3(1+0{,}05556-0{,}00154+0{,}00009) \approx 3{,}1623.$$

Пример 7. Сколько членов необходимо учесть в приближенной формуле $e \approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+.....+\frac{1}{n!}$, чтобы вычислить число e с точностью $\varepsilon = 0{,}01 = 10^{-2}$.

По известному разложению имеем:

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+.....+\frac{x^n}{n!}+R_n(x),$$

где $R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0<\theta<1$.

При $x=1$ имеем $R_n(1) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$. Если $n=5$, то $R_5(1) < \frac{3}{6!} < 0{,}004$.

Следовательно, нужную точность обеспечивает приближенная формула

$$e \approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!} \quad [6].$$

Пример 8. Для каких x $(x>0)$ справедлива с точностью $\varepsilon = 0{,}001 = 10^{-3}$ приближенная формула $\sin x \approx x$.

$$\sin x = x + R_2(x),$$

где $R_2(x) = (-1)(\cos\theta x)\frac{x^3}{3!}$, $0<\theta<1$.

Так как $|R_2(x)| \le \frac{|x|^3}{3!}$, то для того, чтобы погрешность была меньше, чем 0,001, достаточно взять, считая $x>0$ $\frac{x^3}{6} < 0{,}001$ или $x < 0{,}1817$.

Сравним значение x, полученное при использовании двучленной формулы $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$ для достижения той же точности.

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + R_4(x)$, $|R_4(x)| \le \frac{|x|^5}{5!}$. При $x>0$ $\frac{x^5}{120} < 0{,}001$ или $x < 0{,}6544$ [7].

Мы видим, что с увеличением числа членов многочлена Тейлора, он все с большей точностью и на большем интервале воспроизводит исходную функцию.

5. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

В настоящей статье отметим, что в курсе математического анализа формула Тейлора является ещё одним инструментом для выделения главной части функции и вычислении пределов функции, давая метод выделения главной части функции в окрестности данной точки.

Пусть требуется найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$, где $f(0)=g(0)=0$. Предполагая, что функции $f(x)$ и $g(x)$ можно разложить по формуле Маклорена, ограничимся первыми отличными от нуля членами в разложении этих функций [3]: $f(x)=ax^n+o(x^n), a\neq 0$; $g(x)=bx^m+o(x^m), b\neq 0$

Если $n=m$, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax^n+o(x^n)}{bx^m+o(x^m)}=\frac{a}{b}$.

Если $n>m$, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$.

Если $n<m$, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$.

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

Так как $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$, $e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$, $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-2x+o(x^3)}{x-x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}=2.$$

Пример 10. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^2\cdot\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))^2-x^2}{x^2\cdot(x+o(x^2))^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{3}+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}=-\frac{1}{3}$$

Пример 11. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Обозначим этот предел за y, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=y$, тогда

$$\ln y=\ln\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{(x+o(x^2))}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{x(1+o(x))}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+o(x))}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x}=0.$$

Следовательно, $\ln y = 0$, тогда $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$ [5].

Формулу Тейлора можно использовать для доказательства неравенств.

Пример 12. Доказать неравенство $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Разложение функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ по формуле Маклорена до члена с x^3 имеет вид

$$tgx = x + \frac{x^3}{3} + R_3(x),$$

так как $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}, f'''(x) = \frac{2(1+2\sin^2 x)}{\cos^4 x}$.

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = 2.$$

Так как $R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\theta x)}{4!}x^4$, $0 < \theta < 1$ и $f^{(4)}(x) = \frac{8\sin x(2+\sin^2 x)}{\cos^5 x}$, то $R_3(x) > 0$

При $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $tgx > x + \frac{x^3}{3}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ [6].

Заключение

В статье даны рекомендации для проведения практического занятия по теме «Формула Тейлора». Рассмотрены возможности её применения при решении различных задач математического анализа. В процессе проведения занятия полезно подчеркнуть, что всякую функцию, удовлетворяющую условиям разложения, можно представить многочленом Тейлора с остаточным членом в том виде, который требует поставленная задача. Это разложение единственно. Остаточный член является главной частью в разложении.

Наиболее просто решается задача о разложении многочлена порядка n. Использование известных стандартных разложений элементарных функций позволяет избежать долгий и кропотливый путь вычисления производных для коэффициентов разложения. С увеличением числа членов разложения формула Тейлора все с большей точностью и на большем интервале воспроизводит исходную функцию.

Список литературы

[1]. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. 8-е изд. Т.1. М.: Физматлит. 2007. 679 с.

[2]. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. Учебник для бакалавров. В 2 ч. 4-е изд. Ч.1. М.: Юрайт. 2013. 660 с.

[3]. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа: Учебник для физико-математических и инженерно-физических специальностей вузов. М.: Наука. 1989. 736 с.

[4]. Иванова Е.Е. Дифференциальное исчисление функций одного переменного. 4-е изд. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2014. 408 с.

[5]. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. В 2 т. Т.1. М.: Интеграл-Пресс. 2006. 416 с.

[6]. Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Функции одной переменной. 3-е изд; стереотип. СПб.: Лань. 2008. 399с.

[7]. Демидович Б.П., Бараненков Г.С., Ефименко В.А., Коган С., Лунц Г., Поршнева Е., Сычева Е., Фролов С., Шостак Р., Янпольский А. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. / Под редакцией Б.П. Демидовича. М.: Астрель: АСТ. 2008. 496 с.

[8]. Смирнов В.И. Курс высшей математики. В пяти томах. Изд. 23-е. Т. 1. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1974. 479 с.

[9]. Уваров В.Б. Математический анализ. Учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа. 1984. 288 с.

[10]. Бугров Я.С. Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. 3-е изд. М.: Наука. 1988. 431с.

[11]. Кандаурова И.Е. Формула Тейлора: методические указания к решению задач. / Электронное издание. М.: МГТУ имени Н.Э. Баумана. 2014. 16 с.