

УДК 621.865, 004.942

## **Математические модели балки и направляющих на ее основе для программ моделирования**

Трудоношин В. А.<sup>1,\*</sup>, Федорук В. Г.<sup>1</sup>

\*[trudonoshin@mail.ru](mailto:trudonoshin@mail.ru)

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

---

В статье рассматривается математическая модель балки, адаптированная к использованию в универсальных программных комплексах анализа динамических характеристик. Учитываются упругие свойства балки на растяжение, изгиб и кручение. Наличие такой модели существенно расширяет функциональные способности комплексов. Математические модели упругих направляющих, полученные из математической модели балки более функциональны по сравнению с моделями, полученными на основе кинематических уравнений. Модели реализованы в программно-методических комплексах анализа динамических объектов ПА8 и ПА9, разработанные на кафедре САПР МГТУ им.Н.Э.Баумана.

**Ключевые слова:** САПР, математическая модель, эквивалентная схема, динамика, 3d-механика, балка, направляющие

---

### **Введение**

При моделировании трехмерных механических систем с помощью универсальных программных комплексов типа ПА9 [1], Pradis[2], AMEsim[3], Универсальный механизм [4], NX[5], EULER[6] и т.п. часто возникает необходимость отображать упругие свойства их элементов. Таким наиболее распространенным элементом является балка. В данной статье рассматривается математическая модель (ММ) балки, адаптированная к особенностям методики моделирования пространственных механических систем [7], а также показывается, как на основе данной ММ могут быть получены модели упругих направляющих.

### **1. Математическая модель балки**

Балка рассматривается как невесомая упругая связь между двумя абсолютно жесткими телами. В качестве одного из тел может выступать неподвижное основание, с которым связана глобальная система координат (ГСК). Для задания начального положения балки в ГСК используются три точки (рис.1).

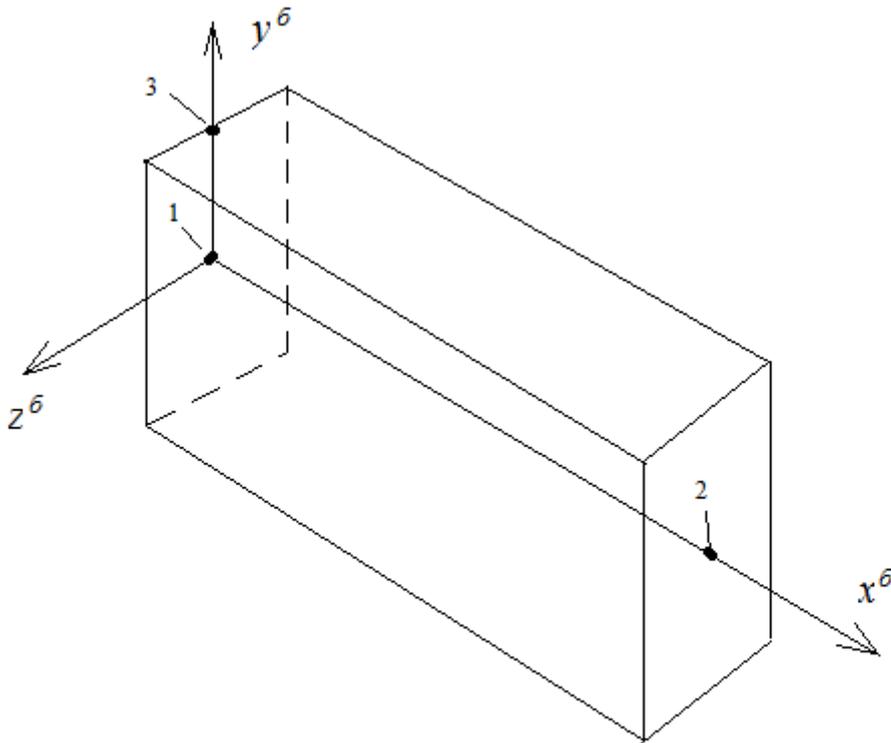


Рис1. Система координат балки и характерные точки

Точки 1 и 2 - геометрические центры торцов балки (условно, "левого" и "правого"). В точке 1 располагается начало локальной системы координат (ЛСК) балки, ось  $x^b$  которой проходит через точку 2. Ось  $y^b$  целесообразно совместить с одной из главных осей сечения балки. Для косвенного задания положения этой оси используется вспомогательная точка 3, которая должна принадлежать плоскости  $x^b y^b$  вне оси  $x^b$ . Ось  $z^b$  определяется по правилу правосторонней системы координат.

Простейшая классическая ММ балки в её ЛСК имеет следующий вид [8,9]:

$$\mathbf{P}_1^l = \mathbf{K}_1^l * \mathbf{D}_2^l, \mathbf{P}_2^l = \mathbf{K}_2^l * \mathbf{D}_2^l.$$

Здесь  $\mathbf{D}_2^l = [x_2^l - l, y_2^l, z_2^l, \varphi_x^l, \varphi_y^l, \varphi_z^l]^T$  - обобщенный вектор перемещений точки 2;  $x_2^l, y_2^l, z_2^l$  - текущие значения координат правого торца;  $l$  - длина балки в ненагруженном состоянии;  $\varphi_x^l, \varphi_y^l, \varphi_z^l$  - углы поворота правого торца вокруг осей ЛСК  $\mathbf{P}_1^l = [F_{1x}^l, F_{1y}^l, F_{1z}^l, M_{1x}^l, M_{1y}^l, M_{1z}^l]^T$  - обобщенный вектор реакций в точке 1;  $F_{1x}^l, F_{1y}^l, F_{1z}^l$  - силы реакции;  $M_{1x}^l, M_{1y}^l, M_{1z}^l$  - моменты сил.  $\mathbf{P}_2^l = [F_{2x}^l, F_{2y}^l, F_{2z}^l, M_{2x}^l, M_{2y}^l, M_{2z}^l]^T$  - аналогичный вектор для точки 2. Очевидно, что  $F_{2x}^l = -F_{1x}^l, F_{2y}^l = -F_{1y}^l, F_{2z}^l = -F_{1z}^l$ . Для моментов сил подобные соотношения не справедливы.  $\mathbf{K}_1^l$  и  $\mathbf{K}_2^l$  - матрицы жесткости для, соответственно, левого и правого концов балки.

Для расчета элементов матриц  $K_1^l$  и  $K_2^l$  используются следующие величины:  $S$  - площадь поперечного сечения балки,  $E$  - модуль Юнга материала балки,  $G$  - модуль сдвига,  $I_x$  - полярный момент инерции сечения,  $I_y$  и  $I_z$  - геометрические моменты инерции сечения для осей  $y^6$  и  $z^6$ . Матрицы имеют вид:

$$K_1^l = \begin{pmatrix} -ES/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12EI_z/l^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI_z/l^2 \\ 0 & 0 & -12EI_y/l^3 & 0 & -6EI_y/l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -GI_x/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6EI_y/l^2 & 0 & 2EI_y/l & 0 \\ 0 & -6EI_z/l^2 & 0 & 0 & 0 & 2EI_z/l \end{pmatrix},$$

$$K_2^l = \begin{pmatrix} ES/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12EI_z/l^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI_z/l^2 \\ 0 & 0 & 12EI_y/l^3 & 0 & -6EI_y/l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GI_x/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6EI_y/l^2 & 0 & 4EI_y/l & 0 \\ 0 & 6EI_z/l^2 & 0 & 0 & 0 & 4EI_z/l \end{pmatrix}.$$

Сложность адаптации приведенной ММ для моделирования пространственных механических систем обусловлена рядом факторов. Во-первых, описание поведения сложных механических систем осуществляется в ГСК. Во-вторых, фазовыми переменными этого описания являются:  $V_x, V_y, V_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z$  - линейные и угловые скорости перемещения центров масс жестких тел, составляющих систему;  $x, y, z$  - координаты центров масс;  $q_0, q_1, q_2, q_3$  - параметры Эйлера, определяющие угловую ориентацию тел. Последние две группы переменных "вторичны", поскольку являются продуктом интегрирования по времени переменных первой группы. Важно, что непосредственно углов, характеризующих положение тел, в базисе нет. В-третьих, балка, связывающая два тела, контактировать с этими телами может в произвольных местах, а не только в центрах масс.

Для трансформации векторных величин между различными системами координат в ММ балки используются матрицы направляющих косинусов  $A_{лг}$  (преобразование из ЛСК в ГСК) и  $A_{гл}$  (из ГСК в ЛСК). В расчете элементов этих матриц участвуют значения параметров Эйлера  $q_0, q_1, q_2, q_3$ . Кроме того,  $A_{лг} = A_{гл}^T$ .

Параметрами ММ являются следующие величины:

- модуль Юнга  $E$  [Па] материала балки,
- модуль сдвига  $G$  [Па],
- площадь поперечного сечения  $S$  [м<sup>2</sup>],
- полярный момент инерции сечения  $I_x$  [м<sup>4</sup>],
- геометрический момент инерции сечения  $I_y$  [м<sup>4</sup>],

- геометрический момент инерции сечения  $I_z$  [м<sup>4</sup>],
- координаты [м] левого конца балки в теле 1 в ГСК,
- координаты [м] правого конца балки в теле 2 в ГСК,
- координаты [м] в ГСК любой точки, лежащей в плоскости  $x^b y^b$  ЛСК балки.

### 1.1. Предварительные вычисления

Основным вычислениям в ММ предшествуют однократные предварительные расчеты, включающие в себя следующее:

- расчет длины  $l$  балки по значениям координат левого и правого ее торцев;
- расчет матриц жесткости  $K_1^l$  и  $K_2^l$  в ЛСК балки;
- расчет матрицы направляющих косинусов  $A_{бг}$  для перехода из ЛСК балки в ГСК, для чего используются координаты точек 1, 2 и 3 балки в ГСК; - расчет матрицы направляющих косинусов  $A_{гл}^1$  для тела 1 по его параметрам Эйлера;
- расчет матрицы направляющих косинусов  $A_{гл}^2$  для тела 2 по его параметрам Эйлера;
- определение координат  $r^1 = \{r_x^1, r_y^1, r_z^1\}$  левого конца балки в ЛСК тела 1 путем умножения вектора, компоненты которого представляют собой разность значений координат точки 1 и центра масс тела 1 в ГСК, на матрицу  $A_{гл}^1$ ;
- определение координат  $r^2 = \{r_x^2, r_y^2, r_z^2\}$  правого конца балки в ЛСК тела 2 аналогичным образом;

- расчет матрицы направляющих косинусов балки в ЛСК тела 1

$$A_{бл}^1 = A_{гл}^1 A_{бг};$$

- расчет матрицы направляющих косинусов балки в ЛСК тела 2

$$A_{бл}^2 = A_{гл}^2 A_{бг}.$$

Матрицы, полученные на двух последних шагах, будут использованы в дальнейшем для вычисления углов поворота правого торца балки относительно левого.

### 1.2 Вычисления на каждом шаге численного интегрирования

Вычисления в ММ балки, выполняемые на каждом шаге численного интегрирования дифференциальных уравнений, описывающих поведение механической системы, включают в себя следующие шаги.

1) Расчет матриц направляющих косинусов  $A_{лг}^1$  и  $A_{лг}^2$  для тел 1 и 2 по значениям их параметров Эйлера.

2) Расчет  $R^1 = \{R_x^1, R_y^1, R_z^1\}$  радиус-вектора из центра тела 1 к левому концу балки в ГСК  $R^1 = A_{лг}^1 r^{1T}$ .

3) Расчет  $R^2 = \{R_x^2, R_y^2, R_z^2\}$  радиус-вектора из центра тела 2 к правому концу балки в ГСК  $R^2 = A_{лг}^2 r^{2T}$ .

4) Расчет матрицы направляющих косинусов для левого конца балки в ГСК

$$A_{бг}^1 = A_{лг}^1 A_{бл}^1.$$

5) Расчет матрицы направляющих косинусов для правого конца балки в ГСК

$$A_{6\Gamma}^2 = A_{\Gamma\Gamma}^2 A_{6\Gamma}^2.$$

6) Расчет матрицы направляющих косинусов для правого конца балки в ЛСК, связанной с левым концом,

$$A = A_{6\Gamma}^{1T} A_{6\Gamma}^2.$$

7) Вычисление линейных деформаций балки  $dx, dy, dz$  в ГСК через текущие значения координат центров масс тел, компонентов радиус-векторов из центров тел к концам балки и проекций начальной длины балки  $l$  на оси ГСК.

8) Вычисление угловых деформаций в ЛСК, связанной с левым концом балки, через компоненты матрицы  $A$ :  $\varphi_x^l = \arctg(a_{32}/a_{22})$  (поворот оси  $y$  правого конца вокруг оси  $x$ ),  $\varphi_y^l = \arctg(a_{13}/a_{33})$  (поворот оси  $z$  правого конца вокруг оси  $y$ ),  $\varphi_z^l = \arctg(a_{21}/a_{11})$  (поворот оси  $x$  правого конца вокруг оси  $z$ ).

9) Расчет матрицы жесткости  $K_1^\Gamma$  для ГСК,

$$K_1^\Gamma = BK_1^l C.$$

Матрица  $C$  предназначена для преобразования линейных деформаций балки  $dx, dy, dz$  из ГСК в ЛСК балки без модификации деформаций угловых  $\varphi_x^l, \varphi_y^l, \varphi_z^l$ . Структура этой матрицы имеет вид:

$$C = \begin{bmatrix} A_{6\Gamma}^{1T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E \end{bmatrix},$$

где  $E$  – единичная матрица, размерности 3.

Матрица  $B$  служит для преобразования обобщенного вектора реакций  $P_1^l$  из ЛСК балки в ГСК, её структура представлена имеет вид:

$$B = \begin{bmatrix} A_{6\Gamma}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{6\Gamma}^1 \end{bmatrix}$$

10) Расчет второй глобальной матрицы жесткости выполняется абсолютно идентичным образом  $K_2^\Gamma = BK_2^l C$ .

11) Расчет вектора обобщенных реакций  $P_1^l = K_1^\Gamma \delta$  в точке 1 в ГСК, где

$$\delta = [dx, dy, dz, \varphi_x^l, \varphi_y^l, \varphi_z^l]^T.$$

12) Расчет вектора обобщенных реакций  $P_2^l = K_2^\Gamma \delta$  в точке 2 в ГСК. Очевидно, что для уменьшения вычислительных затрат, расчет одной из тройки сил (например,  $F_x^1, F_y^1, F_z^1$ ) можно исключить.

13) Вычисление моментов сил воздействия балки на тело 1 относительно его центра масс по выражениям

$$M_x^1 = R_y^1 F_z^2 - R_z^1 F_y^2 - M_{1x}^\Gamma,$$

$$M_y^1 = R_z^1 F_x^2 - R_x^1 F_z^2 - M_{1y}^\Gamma,$$

$$M_z^1 = R_x^1 F_y^2 - R_y^1 F_x^2 - M_{1z}^\Gamma.$$

14) Вычисление моментов сил воздействия балки на тело 2 относительно его центра масс по выражениям

$$M_x^2 = -(R_y^2 F_z^2 - R_z^2 F_y^2) - M_{2x}^r,$$

$$M_y^2 = -(R_z^2 F_x^2 - R_x^2 F_z^2) - M_{2y}^r,$$

$$M_z^2 = -(R_x^2 F_y^2 - R_y^2 F_x^2) - M_{2z}^r.$$

Эквивалентная схема[10] ММ балки представлена на рисунке 2.

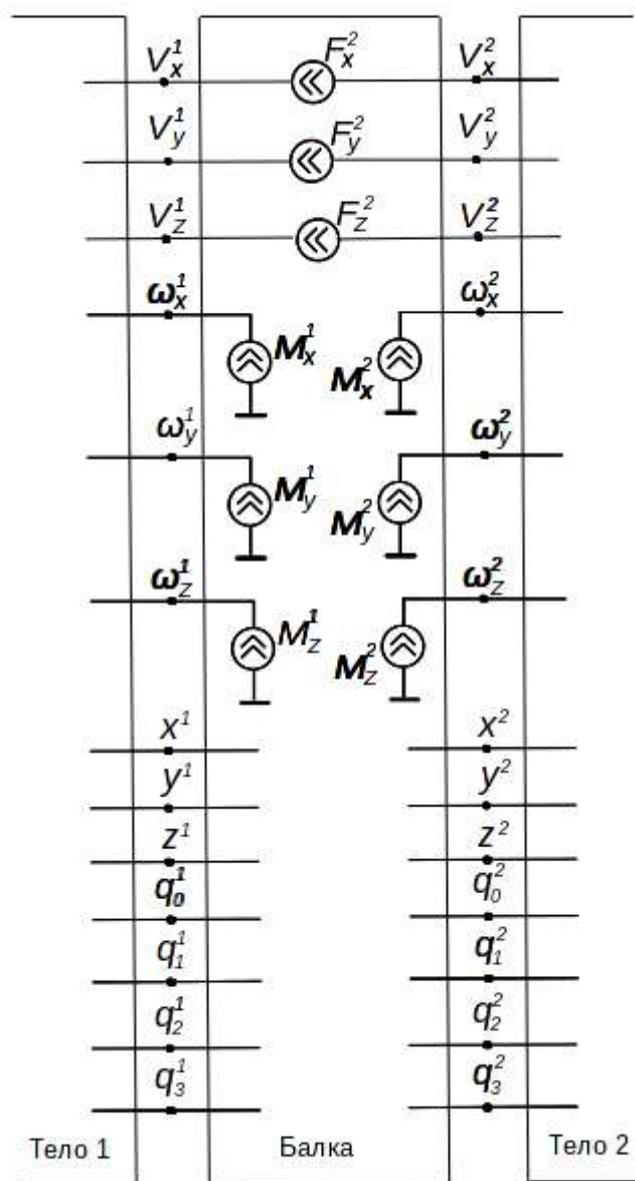


Рис.2 Эквивалентная схема математической модели балки

Рассмотренная модель имеет самый общий вид. Однако, при её реализации в рамках конкретного программного комплекса моделирования могут проявиться различные нюансы. Так, например, в комплексах, использующих неявные методы численного интегриро-

вания обыкновенных дифференциальных уравнений и метод Ньютона для решения нелинейных алгебраических уравнений, дополнительно потребуется вычисления значений частных производных. В том случае, если разработчик модели от организации этих вычислений освобожден, то нет необходимости в явном виде рассчитывать глобальные матрицы жесткости - экономичнее расчет выполнять в такой последовательности: перевод линейных деформаций из ГСК в ЛСК балки, умножение обобщенного вектора локальных деформаций на локальные матрицы жесткости, перевод полученных обобщенных векторов реакций из ЛСК балки в ГСК.

## 2. Математические модели направляющих на основе балки

Модель балки может служить основой для построения ММ упругих направляющих, связывающих пары тел. Отличия призматической направляющей от балки заключаются в следующем:

- направляющая не оказывает противодействия поступательному движению тел в направлении оси  $x$  ЛСК, т.е. работает только на кручение и изгиб;

- длина  $l$  деформируемой части направляющей является величиной переменной.

Эти отличия легко реализовать, во-первых, обнулением значений левых верхних компонентов локальных матриц жесткости  $K_1^l$  и  $K_2^l$  ( $-ES/l$  и  $ES/l$ , соответственно) и, во-вторых, организацией вычисления текущего значения  $l$  на каждом шаге численного интегрирования (и, возможно, на каждой итерации метода решения системы нелинейных алгебраических уравнений). Отметим, что необходим постоянный контроль значения  $l$ , которое не должно быть нулевым, но в общем случае может стать отрицательным в результате перемещений взаимодействующих тел.

ММ цилиндрической направляющей, работающей только на изгиб, может быть получена из модели призматической направляющей заменой компонент  $-G * I_x/l$  и  $G * I_x/l$  в локальных матрицах жесткости  $K_1^l$  и  $K_2^l$  на ноль. В отличие от классической ММ направляющей, основанной на кинематических уравнениях, для соединения двух тел можно использовать две и более направляющих и это не приведет к вырождению матрицы Якоби, более того, позволит корректно вычислить реакции в каждой из направляющих. Модели балки и направляющих были реализованы в программно-методических комплексах анализа динамических объектов ПА8 и ПА9, разработанные на кафедре САПР МГТУ им. Н.Э.Баумана.

Проверка адекватности ММ балки выполнялась на ряде тестовых задач, имеющим аналитическое решение (отдельно растяжение, изгиб и кручение, статическая и динамическая задача по определению периода колебаний). Совпадение результатов получено с точностью до пятой значащей цифры.

## Заключение

В статье представлена математическая модель балки и направляющих на ее основе, пригодная для использования в универсальных программных комплексах анализа динамики объектов с сосредоточенными параметрами. Адекватность модели доказана сравнением результатов решения тестовых задач с аналитическим решением. Математические модели направляющих, полученные на основе ММ балки, оказываются более функциональными по сравнению с моделями, полученными на основе кинематических уравнений. Они позволяют избежать вырождения матрицы Якоби при соединении тел двумя и более направляющими и получить корректные значения нагрузок.

## Список литературы

1. Применение комплекса ПА9 для проектирования объектов машиностроения // Центр дистанционного обучения МГТУ им. Н.Э. Баумана: сайт. Режим доступа: <http://wwwcdl.bmstu.ru/Press/Press.html> (дата обращения 28.08.2015).
2. PRADIS - программный комплекс для анализа динамики систем различной физической природы // Ладуга. Инженерные услуги: сайт компании. Режим доступа: <http://www.laduga.ru/pradis/pradis.shtml> (дата обращения 28.08.2015).
3. Решения LMS для моделирования и проведения испытаний // Siemens PLM Software: сайт компании. Режим доступа: [http://www.plm.automation.siemens.com/ru\\_ru/products/lms/index.shtml](http://www.plm.automation.siemens.com/ru_ru/products/lms/index.shtml) (дата обращения 28.08.2015).
4. Универсальный механизм // Software lab Universal mechanism: сайт компании. Режим доступа: <http://www.umlab.ru/> (дата обращения 16.11.2015).
5. EULER: Программный комплекс автоматизированного динамического анализа многокомпонентных механических систем: сайт компании. Режим доступа: <http://www.euler.ru/index.php/euler> (дата обращения 20.11.2015).
6. Гончаров П.С., Ельцов М.Ю., Коршиков С.Б., Лаптев И.В., Осиюк В.А. NX для конструктора-машиностроителя. М.: Изд-во ДМК, 2010. 498 с.
7. Трудоношин В. А., Федорук В.Г. Методология моделирования трехмерных механических систем с помощью универсальных программных комплексов анализа // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 9. С. 225-236. DOI: [10.7463/0915.0810599](https://doi.org/10.7463/0915.0810599)
8. Гаврюшин С.С., Барышникова О.О., Борискин О.Ф. Численный анализ элементов конструкций машин и приборов. 2-е изд., испр. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 479 с.
9. Образцов И.Ф., Булычев Л.А., Васильев В.В. и др. Строительная механика летательных аппаратов: учебник для ВУЗов / под ред. И.Ф. Образцова. М.: Машиностроение, 1986. 536 с.

10. Трудоношин В.А., Пивоварова Н.В. САПР. В 9 кн. Кн. 4. Математические модели технических объектов / ред. И.П. Норенков. М.: Высшая школа, 1986. 160 с.

## Mathematical Models of Beam and Rails for the Simulation Programs

V.A. Trudonoshin<sup>1,\*</sup>, V.G. Fedoruk<sup>1</sup>

[\\*trudonoshin@mail.ru](mailto:trudonoshin@mail.ru)

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

---

**Keywords:** CAD, mathematical models, dynamics, kinematics, 3D-MECHANICS, beam

---

The article considers a mathematical model of the beam adapted for use in general-purpose software systems to analyze dynamic characteristics. The elastic properties of the beam tension, bending and torsion are taken into account. Such a model significantly expands the functional capabilities of the complexes. The mathematical model of the beam designed for the finite element method is taken as a basis. Then its adaptation is carried out taking into account the beam joint to the arbitrary points of a rigid solid, thereby having a model suitable to analyze objects with lumped parameters. Beam parameters are the material parameters, the geometric characteristics, and the coordinates of joint points to the solids.

The paper describes in detail the algorithm of computations performed at each step of numerical integration of the systems of ordinary differential equations, and presents an equivalent diagram of the mathematical model of the beam. Mathematical models of elastic rail guides, cylindrical and prismatic, derived from the mathematical model of the beam are more functional compared to the models based on the kinematic equations.

The prismatic rail guide (V-guide), unlike the beam, does not counteract the translational motion of solids along it, i.e. only works in torsion and bending, and a deforming part of the rail guide length is variable. The cylindrical rail guide works in bending only. These differences can be easily implemented by modifying the equations of the mathematical model of the beam. Using these models allows us to connect solids by two or more rail guides, and it does not lead to the degeneration of the Jacobi matrix (unlike models based on kinematic equations). The models are implemented in PA8 and PA9 software and methodological support complexes for analysis of dynamic objects developed at the Department of CAD in Bauman MSTU.

### References

1. *Primenenie kompleksa PA9 dlya proektirovaniya ob"ektov mashinostroeniya* [Application of PA9 complex for object-oriented design in mechanical engineering]. Distance Learning Center of the Bauman MSTU: website. Available at: <http://wwwcdl.bmstu.ru/Press/Press.html> , accessed 28.08.2015. (in Russian).

2. *PRADIS - programmnyy kompleks dlya analiza dinamiki sistem razlichnoy fizicheskoy prirody* [PRADIS - software package for analysis of dynamics of systems of different physical nature]. Laduga. Automotive engineering: company website. Available at: <http://www.laduga.ru/pradis/pradis.shtml> , accessed 28.08.2015. (in Russian).
3. *LMS simulation and testing solutions*. Siemens PLM Software: company website. Available at: [http://www.plm.automation.siemens.com/en\\_gb/products/lms/index.shtml](http://www.plm.automation.siemens.com/en_gb/products/lms/index.shtml) , accessed 28.08.2015.
4. *Universal Mechanism*. Software lab Universal mechanism: company website. Available at: <http://www.umlab.ru/> , accessed 16.11.2015.
5. EULER: Programmnyi kompleks avtomatizirovannogo dinamicheskogo analiza mnogokomponentnykh mekhanicheskikh sistem [EULER: software package for automated dynamic analysis of multicomponent mechanical systems]: company website. Available at: <http://www.euler.ru/index.php/euler> , accessed 20.11.2015.
6. Goncharov P.S., El'tsov M.Yu., Korshikov S.B., Laptev I.V., Osiyuk V.A. *NX dlya konstruktora-mashinostroitel'ya* [NX for Designer-Machine Engineer]. Moscow, DKM Press, 2010. 504 p. (in Russian).
7. Trudonoshin V.A., Fedoruk V.G. A Simulation Technique for Three-Dimensional Mechanical Systems Using Universal Software Systems of Analysis. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana = Science and Education of the Bauman MSTU*, 2015, no. 9, pp. 225-236. DOI: [10.7463/0915.0810599](https://doi.org/10.7463/0915.0810599) (in Russian).
8. Gavryushin S.S., Baryshnikova O.O., Boriskin O.F. *Chislennyy analiz elementov konstruktsiy mashin i priborov* [Numerical analysis of structural elements of machines and devices]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2014. 479 p. (in Russian).
9. Obraztsov I.F., Bulychev L.A., Vasil'ev V.V., et al. *Stroitel'naya mekhanika letatel'nykh apparatov* [Aircraft structural mechanics]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1986. 536 p. (in Russian).
10. Trudonoshin V.A., Pivovarova N.V. *SAPR. V 9 kn. Kn. 4. Matematicheskie modeli tekhnicheskikh ob"ektov* [Computer-aided design system. In 9 books. Book 4. Mathematical model of technical object]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1986. 160 p. (in Russian).