

11, ноябрь 2015

УДК 531.3

Кинематическое исследование плоского механизма с тремя степенями свободы

Гумиров Л.С., студент

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Аэрокосмические системы»*

Научный руководитель: Варенцов В.В.,

к.т.н., доцент кафедры «Теоретическая механика»

Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана

Fn3@bmstu.ru

В курсе «Теоретическая механика» в разделе «Плоское движение тела» рассматривают кинематическое исследование плоских механизмов с одной или двумя степенями свободы. При этом кинематические исследования плоских механизмов с тремя степенями свободы не встречается. Решение таких задач по определению скоростей и ускорений точек предлагаемыми методами (путем проецирования векторных уравнений на оси) слишком громоздко и утомительно, что может привести к значительным ошибкам в расчетах. Покажем, что со степенью свободы более двух предпочтительным для определения скоростей и ускорений точек является метод планов.

Описание кинематической схемы механизма

Рассмотрим простую кинематическую схему плоского рычажного механизма, представленную на (рис.1.).

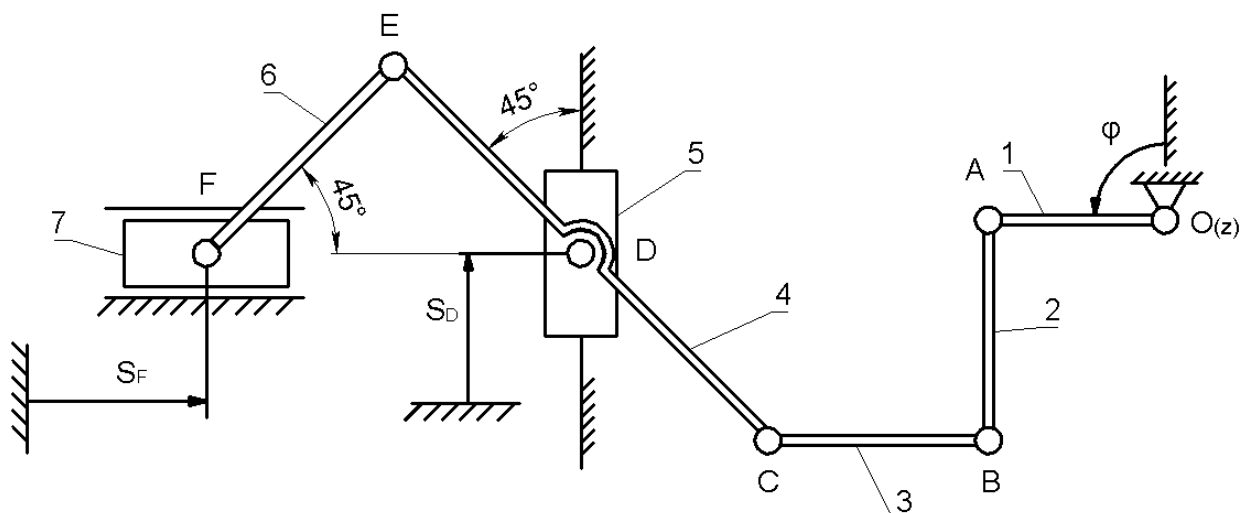


Рис. 1. Кинематическая схема механизма: 1-кривошип; 2,3,4,6- шатуны; 5,7- ползуны

Механизм включает в себя семь подвижных звеньев и одно неподвижное – стойку. Каждая кинематическая связь (подвижное соединение двух звеньев) исключает здесь два движения каждого звена. Так как движение каждого звена в отдельности на плоскости может характеризоваться тремя координатами – двумя линейными и одной угловой, то для характеристики движения этого механизма с девятью кинематическими парами число степеней свободы равно трем, т.к. $S = 3 * 7 - 2 * 9 = 3$ Поэтому число обобщенных координат для этого механизма равно также трем.

Расчетная часть

Пусть обобщенными координатами будут:

$$\varphi = \varphi(t), \quad S_D = S_D(t), \quad S_F = S_F(t).$$

Пусть в этой задаче дано:

$$\varphi = 2t^2 - 2t \text{ (рад)}, \quad S_D = 0,5t - 0,2t^2 \text{ (м)}, \quad S_F = 0,3t - 0,1t^2 \text{ (м)},$$

$$OA = 0,1 \text{ м}, \quad AB = BC = 0,4 \text{ м}, \quad FE = ED = DC = 0,5 \text{ м}, \quad t_1 = 1 \text{ с}.$$

Требуется определить для времени t_1 скорости и ускорения всех точек механизма, а также угловые скорости и угловые ускорения всех звеньев механизма.

Решение:

Скорость точек механизма.

Из условия задачи:

$$V_A = \omega_1 * OA$$

$$\omega_1 = \dot{\varphi} = 4t - 2$$

$$\omega_1(t_1) = 4 * 1 - 2 = 2 \text{ рад/с} \quad (1)$$

$$\boxed{\omega_1 = 2 \text{ рад/с}}$$

$$V_A = \omega_1 * OA = 2 * 0,1 = 0,2 \text{ м/с} \quad (2)$$

$$\boxed{V_A = 0,2 \text{ м/с}}$$

$$V_D = \dot{S}_D = 0,5 - 0,4t$$

$$V_D(t_1) = 0,5 - 0,4 * 1 = 0,1 \text{ м/с} \quad (3)$$

$$\boxed{V_D = 0,1 \text{ м/с}}$$

$$V_F = \dot{S}_F = 0,3 + 0,2t$$

$$V_F(t_1) = 0,3 + 0,2 * 1 = 0,5 \text{ м/с} \quad (4)$$

$$\boxed{V_F = 0,5 \text{ м/с}}$$

Для определения скоростей остальных точек механизма по методу полюса можно записать пять векторных уравнений.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \\ \quad \quad \quad \perp_{AB} \end{array} \right. \quad (5)$$

В уравнении (5) три неизвестных

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{V}_B = \vec{V}_C + \vec{V}_{BC} \\ \quad \quad \quad \perp_{BC} \end{array} \right. \quad (6)$$

В уравнении (6) пять неизвестных

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{V}_C = \vec{V}_D + \vec{V}_{CD} \\ \quad \quad \quad \perp_{CD} \end{array} \right. \quad (7)$$

В уравнении (7) три неизвестных

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{V}_E = \vec{V}_F + \vec{V}_{EF} \\ \quad \quad \quad \perp_{EF} \end{array} \right. \quad (8)$$

В уравнении (8) три неизвестных

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{V}_E = \vec{V}_D + \vec{V}_{ED} \\ \quad \quad \quad \perp_{ED} \end{array} \right. \quad (9)$$

В уравнении (9) три неизвестных

Так как решение всех этих уравнений с записью их проекций на оси координат весьма трудоемко, то решение найдем с помощью построения планов скоростей. Так как каждое уравнение системы (5) – (9) содержит не менее трех неизвестных характеристик, преобразуем эту систему.

Из уравнений (8) и (9) следует:

$$\vec{V}_E = \vec{V}_F + \vec{V}_{EF} = \vec{V}_D + \vec{V}_{ED} \quad (10)$$

$$\underline{\underline{\perp_{EF}}} = \underline{\underline{\perp_{ED}}}$$

Строим векторный многоугольник скоростей (план скоростей) в масштабе

$\mu_V = 110 \frac{\text{мм} \cdot \text{с}}{\text{м}}$ (рис.2.). С помощью этого плана определим V_{EF} и V_{ED} .

$$\boxed{V_E = 0,36 \text{ м/с}} \quad \boxed{V_{ED} = 0,28 \text{ м/с}} \quad \boxed{V_{EF} = 0,42 \text{ м/с}}$$

Вычислим угловые скорости ω_4 и ω_6

$$\omega_4 = \frac{V_{ED}}{ED} = 0,56 \text{ рад/с}$$

$$\omega_6 = \frac{V_{EF}}{EF} = 0,84 \text{ рад/с}$$

$$\boxed{\omega_4 = 0,56 \text{ рад/с}} \quad \boxed{\omega_6 = 0,84 \text{ рад/с}}$$

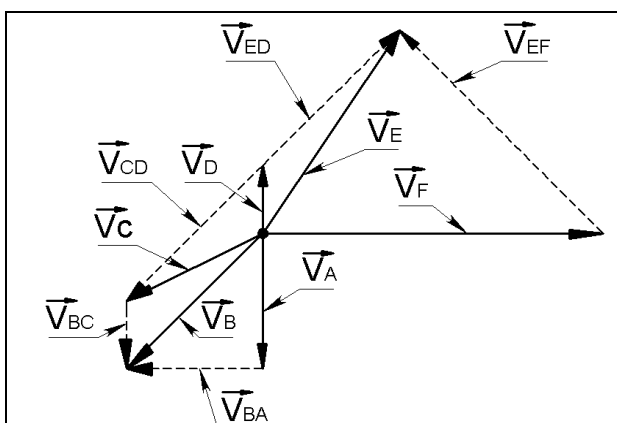


Рис. 2. План скоростей

Уравнение (7) дает: $\vec{V}_C = \vec{V}_D + \vec{V}_{CD}$

$$\underline{\underline{\perp_{CD}}}$$

Здесь:

$$\left| \frac{V_{CD}}{V_{ED}} \right| = \frac{CD}{ED} = 1 \quad V_{CD} = -V_{ED}$$

$$\boxed{V_C = 0,22 \text{ м/с}}$$

Уравнения (5) и (6) дают: $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} = \vec{V}_C + \vec{V}_{BC}$

$$\underline{\underline{\perp_{AB}}} = \underline{\underline{\perp_{BC}}}$$

$$\boxed{V_{BA} = 0,2 \text{ м/с}}$$

$$\boxed{V_{BC} = 0,1 \text{ м/с}}$$

$$\boxed{V_B = 0,28 \text{ м/с}}$$

Найдем угловые скорости ω_2 и ω_3

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{BA} = 0,5 \text{ рад/с}$$

$$\boxed{\omega_2 = 0,5 \text{ рад/с}}$$

$$\omega_3 = \frac{V_{BC}}{BC} = 0,25 \text{ рад/с}$$

$$\boxed{\omega_3 = 0,25 \text{ рад/с}}$$

Покажем на кинематической схеме механизма векторы скоростей всех точек, а также направления угловых скоростей звеньев (рис.3.).

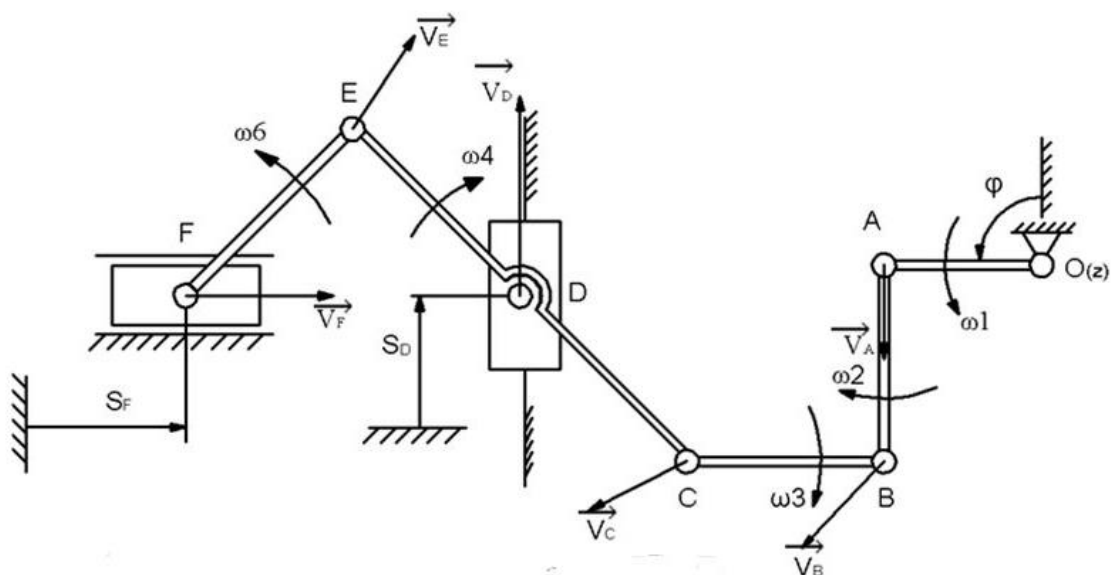


Рис. 3. Скорости точек и угловые скорости звеньев механизма

$$V_A = 0,2 \text{ м/с}$$

$$V_D = 0,1 \text{ м/с}$$

$$\omega_1 = 2 \text{ рад/с}$$

$$\omega_4 = 0,56 \text{ рад/с}$$

$$V_B = 0,28 \text{ м/с}$$

$$V_F = 0,5 \text{ м/с}$$

$$\omega_3 = 0,25 \text{ рад/с}$$

$$\omega_6 = 0,84 \text{ рад/с}$$

$$V_C = 0,22 \text{ м/с}$$

$$V_E = 0,36 \text{ м/с}$$

$$\omega_2 = 0,5 \text{ рад/с}$$

Определим ускорения точек:

$$\varepsilon_1 = \dot{\omega}_1 = 4 \text{ рад/с}^2$$

$$\varepsilon_1 = 4 \text{ рад/с}^2$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^n$$

$$a_A^{\tau} = \varepsilon_1 * OA = 4 * 0,1 = 0,4 \text{ м/с}^2$$

$$a_A^n = \omega_1^2 * OA = 4 * 0,1 = 0,4 \text{ м/с}^2$$

$$a_A = \sqrt{(a_A^{\tau})^2 + (a_A^n)^2} = 0,56 \text{ м/с}^2$$

$$a_A = 0,56 \text{ м/с}^2$$

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 * AB = 0,1 \text{ м/с}^2$$

$$a_{BC}^n = \omega_3^2 * BC = 0,025 \text{ м/с}^2$$

$$a_{CD}^n = \omega_4^2 * CD = 0,16 \text{ м/с}^2$$

$$a_{EF}^n = \omega_6^2 * EF = 0,35 \text{ м/с}^2$$

$$a_{ED}^n = \omega_4^2 * ED = 0,16 \text{ м/с}^2$$

Для определения ускорений остальных точек механизма по методу полюса можно записать пять векторных уравнений.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_B = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^{\tau} \quad (11) \quad \text{Три неизвестных} \\ \quad \quad \quad \overline{\perp_{AO}} \quad \overline{A-O} \quad \overline{B-A} \quad \overline{\perp_{AB}} \\ \vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{BC}^n + \vec{a}_{BC}^{\tau} \quad (12) \quad \text{Пять неизвестных} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \overline{B-C} \quad \overline{\perp_{BC}} \\ \vec{a}_C = \vec{a}_D + \vec{a}_{CD}^n + \vec{a}_{CD}^{\tau} \quad (13) \quad \text{Три неизвестных} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \overline{C-D} \quad \overline{\perp_{CD}} \\ \vec{a}_E = \vec{a}_F + \vec{a}_{EF}^n + \vec{a}_{EF}^{\tau} \quad (14) \quad \text{Три неизвестных} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \overline{E-F} \quad \overline{\perp_{EF}} \\ \vec{a}_E = \vec{a}_D + \vec{a}_{ED}^n + \vec{a}_{ED}^{\tau} \quad (15) \quad \text{Три неизвестных} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \overline{E-D} \quad \overline{\perp_{ED}} \end{array} \right.$$

$$a_D = \ddot{S}_D = -0,4 \text{ М/с}^2$$

$$a_D = 0,4 \text{ М/с}^2$$

$$a_F = \ddot{S}_F = 0,2 \text{ М/с}^2$$

$$a_F = 0,2 \text{ М/с}^2$$

Из уравнений (14) и (15) следует:

$$\vec{a}_F + \vec{a}_{EF}^n + \vec{a}_{EF}^{\tau} = \vec{a}_D + \vec{a}_{ED}^n + \vec{a}_{ED}^{\tau} \quad (16)$$

$$\quad \quad \quad \overline{E-F} \quad \overline{\perp_{EF}} \quad \quad \quad \overline{E-D} \quad \overline{\perp_{ED}}$$

Строим векторный многоугольник ускорений (план ускорений) в масштабе

$$\mu_a = 110 \frac{\text{мм} \cdot \text{с}^2}{\text{м}} \text{ (рис.3).}$$

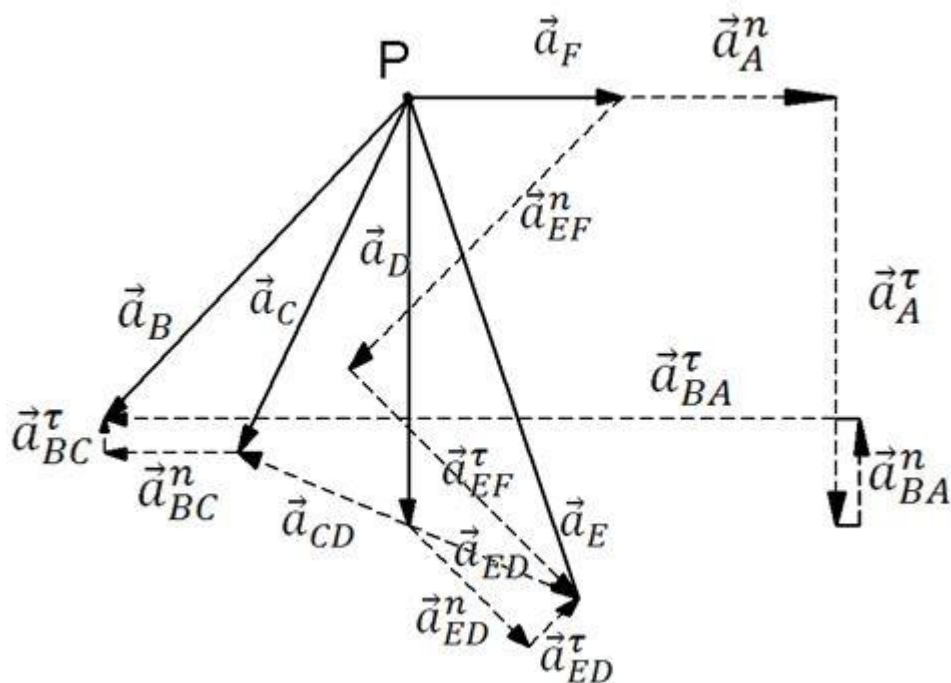


Рис. 4. План ускорений

$$a_E = 0,49 \text{ м/с}^2$$

$$a_{ED} = 0,17 \text{ м/с}^2$$

$$a_{EF} = 0,47 \text{ м/с}^2$$

$$\varepsilon_4 = \frac{a_{ED}^{\tau}}{ED} = 0,12 \text{ рад/с}^2$$

$$\varepsilon_4 = 0,12 \text{ рад/с}^2$$

$$\varepsilon_6 = \frac{a_{EF}^{\tau}}{EF} = 0,6 \text{ рад/с}^2$$

$$\varepsilon_6 = 0,6 \text{ рад/с}^2$$

Из уравнения (13) и при: $\vec{a}_{CD} = -\vec{a}_{ED}$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_D + \vec{a}_{CD}^n + \vec{a}_{CD}^{\tau}$$

$$a_C = 0,37 \text{ м/с}^2$$

Из уравнений (11) и (12) следует:

$$\underbrace{\vec{a}_A}_{B-A} + \underbrace{\vec{a}_{BA}^n}_{\perp_{AB}} + \underbrace{\vec{a}_{BA}^{\tau}}_{\perp_{AB}} = \underbrace{\vec{a}_C}_{B-C} + \underbrace{\vec{a}_{BC}^n}_{\perp_{BC}} + \underbrace{\vec{a}_{BC}^{\tau}}_{\perp_{BC}} \quad (17)$$

Из уравнения (17):

$$a_B = 0,41 \text{ м/с}^2$$

$$a_{BA} = 0,69 \text{ м/с}^2$$

$$a_{BC} = 0,13 \text{ м/с}^2$$

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = 1,7 \text{ рад/с}^2$$

$$\varepsilon_2 = 1,7 \text{ рад/с}^2$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{BC}^\tau}{BC} = 0,075 \text{ рад/с}^2$$

$$\varepsilon_3 = 0,075 \text{ рад/с}^2$$

Покажем векторы найденных ускорений на кинематической схеме механизма (Рис. 5.).

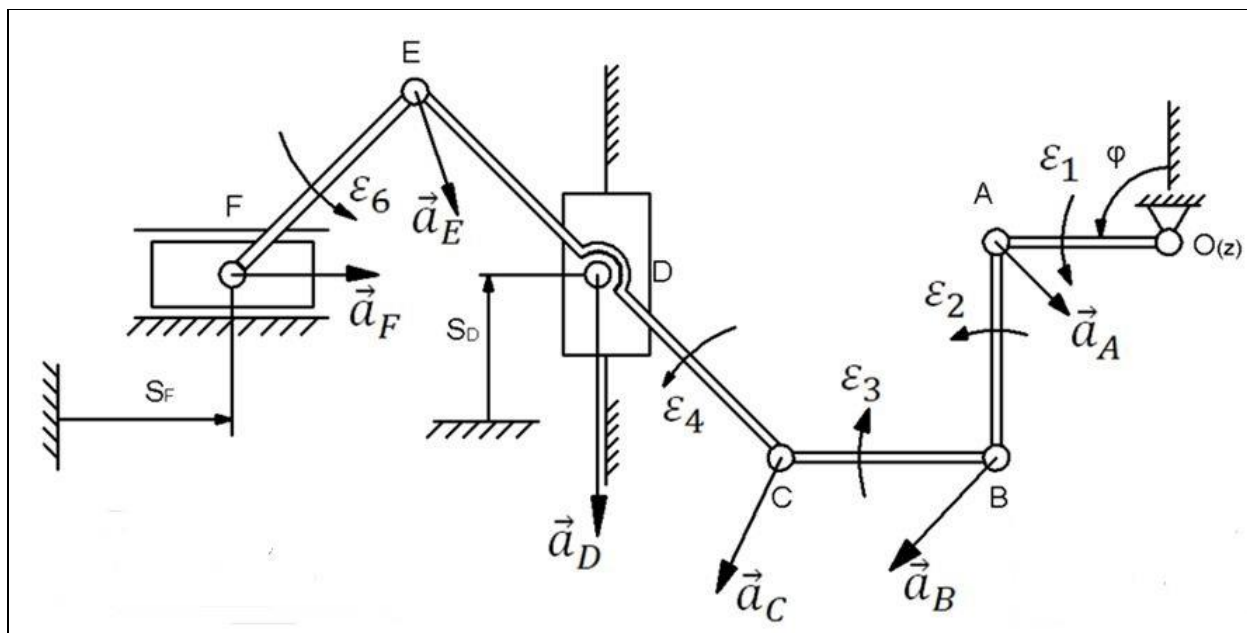


Рис. 5. Ускорения точек и угловые ускорения звеньев механизма

$$a_A = 0,56 \text{ м/с}^2$$

$$a_D = 0,4 \text{ м/с}^2$$

$$\varepsilon_1 = 4 \text{ рад/с}^2$$

$$\varepsilon_4 = 0,12 \text{ рад/с}^2$$

$$a_B = 0,41 \text{ м/с}^2$$

$$a_E = 0,49 \text{ м/с}^2$$

$$\varepsilon_2 = 1,7 \text{ рад/с}^2$$

$$\varepsilon_6 = 0,6 \text{ рад/с}^2$$

$$a_C = 0,37 \text{ м/с}^2$$

$$a_F = 0,2 \text{ м/с}^2$$

$$\varepsilon_3 = 0,075 \text{ рад/с}^2$$

Закключение

Приведённый выше пример решения задачи показывает, что выбранный нами путь облегчает кинематическое исследование плоских рычажных механизмов и может быть рекомендован для решения подобных задач с числом степеней свободы более двух.

Список литературы

1. Дронг В.И., Дубинин В.В., Ильин М.М., Колесников К.С., Космодемьянский В.А., Назаренко Б.П., Панкратов А.А., Русанов П.Г., Саратов Ю.С., Степанчук Ю.М., Тушева Г.М., Шкапов П.М. Курс теоретической механики / под ред. К.С. Колесников, В.В. Дубинин. 4-е изд., испр. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 758 с.
2. Феоктистова О.П., Гартиг Е.Б., Пожалостин А.А., Панкратов А.А. Кинематика точки и простейшие движения твердого тела: метод. указания к выполнению курсового задания. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. 37 с.
3. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин: учебник для втузов. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Альянс, 2012. 639 с.