

11, ноябрь 2015

УДК 531.01

Два метода кинематического исследования плоского механизма

*Александров К.Л., студент
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Динамика и управление полетом ракет и космических аппаратов»*

*Научный руководитель: Варенцов В.В., к.т.н, доцент
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана
Кафедра «Теоретическая механика»
fn3@bmstu.ru*

Рассмотрим кинематическое исследование плоского механизма (рис. 1). Здесь 1 и 2 – шатуны, 3 – кривошип, 4 – ползун, 5 – втулка. В расчетах для данного положения механизма примем известными по модулю и направлению скорость и ускорение ползуна 4 (точки D) и размеры звеньев: $a_D, V_D, OA = OD = l, BC = \frac{l}{2}$; векторы $\vec{V}_D$ и $\vec{a}_D$ направлены так, как показано на рисунке.

Определим скорости и ускорения всех точек механизма, а также угловые скорости и ускорения звеньев двумя методами.

Первый метод основан на составлении векторных уравнений для скоростей и ускорений точек тел, совершающих плоское движение.

Теория плоского движения тела

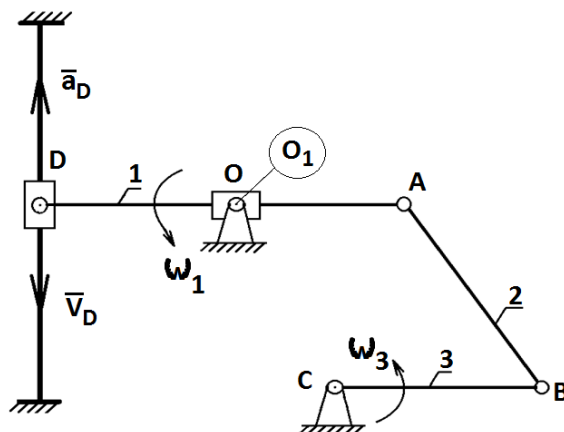


Рис. 1. Кинематическая схема плоского механизма

Для скорости точки А, приняв за полюс сначала точку D, а потом точку O_1 , запишем систему уравнений:

$$\bar{V}_A = \bar{V}_D + \bar{V}_{AD}, \quad (1)$$

$$\bar{V}_A = \bar{V}_{O_1} + \bar{V}_{AO_1}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем:

$$\underline{\bar{V}_{O_1}} + \underline{\bar{V}_{AO_1}} = \underline{\bar{V}_D} + \underline{\bar{V}_{AD}}. \quad (3)$$

Направления скоростей системы:

Вектор скорости $\bar{V}_{O_1}$ может быть направлен только по оси втулки (по линии AD), вектор скорости $\bar{V}_{AO_1}$ перпендикулярен AO_1 , вектор $\bar{V}_D$ – направлен вертикально вниз, вектор $\bar{V}_{AD}$ направлен перпендикулярно AD. При этом модули скоростей равны: $V_{AD} = \omega_1 * AD = \omega_1 * 2l$, $V_{AO_1} = \omega_1 * AO_1 = \omega_1 * l$. Учитывая, что $V_{AD} = 2V_{AO_1}$ и тот факт, что вектора $\bar{V}_{AD}$ и $\bar{V}_{AO_1}$ сонаправлены, построим по уравнению (3) векторный многоугольник скоростей (рис. 2).

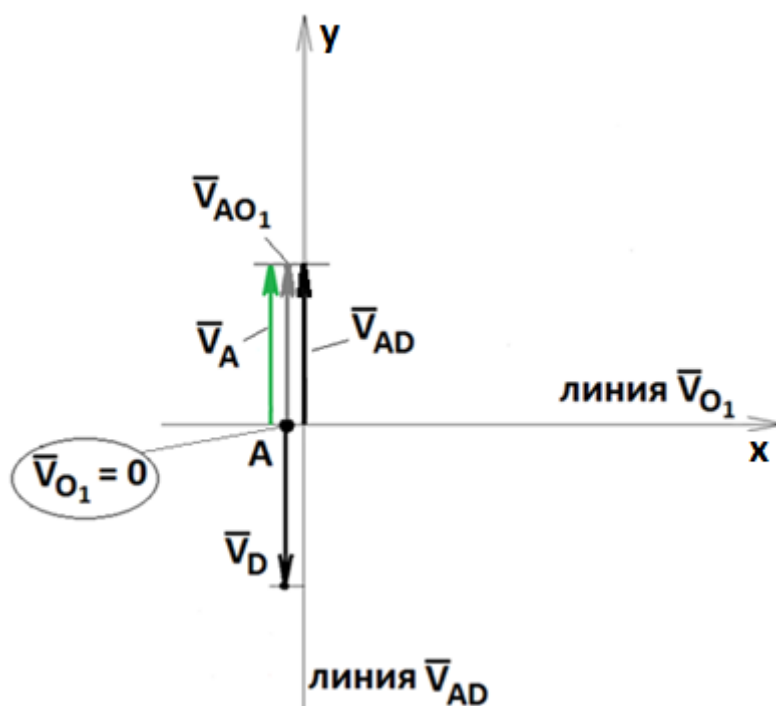


Рис. 2. План скоростей точек звена 1

Из рис. 2 следует, что вектор $\bar{V}_A$ направлен противоположно $\bar{V}_D$ вектору. Запишем уравнение (3) в проекциях на ось y :

$$V_{Ay} = -V_D + V_{AD} \quad (4)$$

или

$$V_{Ay} = V_{AO_1}. \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует: $V_{AO_1} = -V_D + V_{AD} = -V_D + 2V_{AO_1}$,

$$V_A = V_{Ay} = V_{AO_1} = V_D. \quad (6)$$

Таким образом угловая скорость будет равна: $\omega_1 = \frac{V_{AO_1}}{l} = \frac{V_D}{l}$.

Из (5) следует, что направление угловой скорости ω_1 противоположно ходу часовой стрелки, а также то, что вектор $\bar{V}_A$ направлен вертикально вверх.

Следует заметить, что полученные выводы можно получить, если рассмотреть движение звена 1 как мгновенный поворот в плоскости рисунка вокруг мгновенного центра скоростей, совпадающего с точкой O_1 (рис. 3):

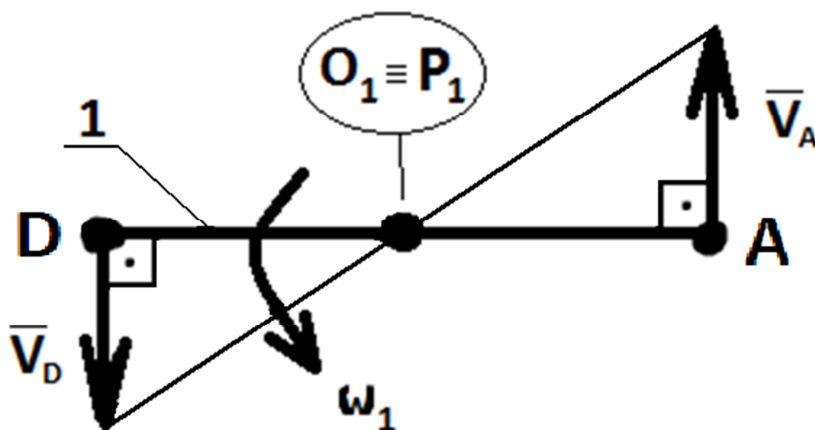


Рис. 3. Мгновенный центр скоростей звена 1

$$\omega_1 = \frac{V_D}{O_1D} = \frac{V_D}{l}, V_A = \omega_1 * AO = \omega_1 * l;$$

Теперь определим скорость точки B, приняв за полюс точку A:

$$\underline{\underline{\bar{V}_B}} = \underline{\underline{\bar{V}_A}} + \underline{\underline{\bar{V}_{BA}}}. \quad (7)$$

Вектор $\bar{V}_A$ направлен вертикально вверх, вектор $\bar{V}_{BA}$ перпендикулярен AB , вектор $\bar{V}_B$ перпендикулярен BC . Построим в соответствии с уравнением (7) векторный треугольник скоростей (рис. 4):

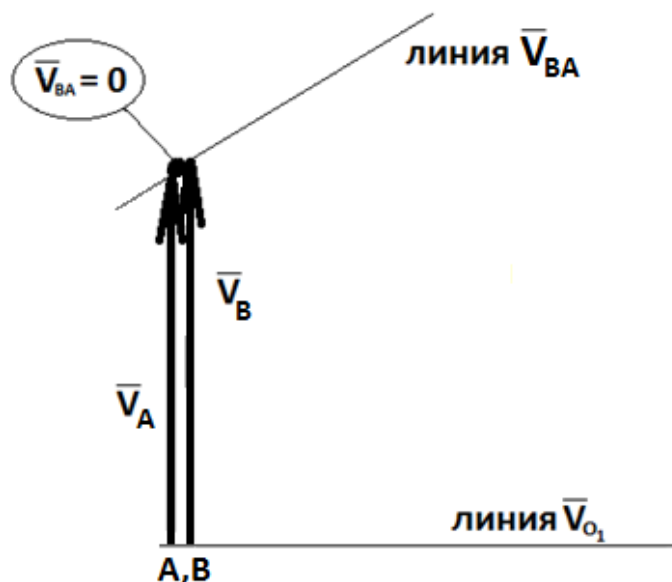


Рис. 4. План скоростей звена 2

Из (рис. 4) следует, что скорость V_{BA} , равна нулю. При этом угловая скорость звена 2 равна:

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{AB} = 0. \quad (8)$$

Скорость точки В:

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A. \quad (9)$$

А поскольку скорость точки В вокруг точки А ($V_{BA} = 0$), то $\omega_2 = \frac{V_{BA}}{AB} = 0$. И по модулю $V_B = V_A = V_D$.

А так как точка В принадлежит и звену 3, то скорость точки можно записать в виде:

$$V_B = \omega_3 * BC = \omega_3 * \frac{l}{2}. \quad (10)$$

Из (10) следует, что угловая скорость звена 3 равна:

$$\omega_3 = \frac{V_B}{BC} = \frac{2V_A}{l} = \frac{2V_D}{l} = 2\omega_1.$$

Определим ускорение точки A, приняв за полюс сначала точку O_1 , а потом точку D. Запишем систему уравнений:

$$\underline{\underline{\bar{a}_A}} = \underline{\underline{\bar{a}_{O_1}}} + \underline{\underline{\bar{a}_{AO_1}^n}} + \underline{\underline{\bar{a}_{AO_1}^\tau}}, \quad (11)$$

$$\underline{\underline{\bar{a}_A}} = \underline{\underline{\bar{a}_D}} + \underline{\underline{\bar{a}_{AD}^n}} + \underline{\underline{\bar{a}_{AD}^\tau}}. \quad (12)$$

Ускорение $\bar{a}_{O_1}$ направлено по оси втулки (по линии AD), ускорение $\bar{a}_{AO_1}^n$ направлено от точки A к точке O_1 , ускорение $\bar{a}_{AO_1}^\tau$ направлено перпендикулярно AO_1 ; ускорение $\bar{a}_D$ направлено вертикально вверх, ускорение $\bar{a}_{AD}^n$ направлено от точки A к точке D, ускорение $\bar{a}_{AD}^\tau$ направлено перпендикулярно AD.

Найдем нормальное и касательное ускорения AO_1 и AD (по модулю):

$$a_{AO_1}^n = \omega_1^2 * AO = \omega_1^2 * l, \quad (13)$$

$$a_{AD}^n = \omega_1^2 * AD = \omega_1^2 * 2l = 2a_{AO_1}^n, \quad (14)$$

$$a_{AO_1}^\tau = \varepsilon_1 * AO = \varepsilon_1 * l, \quad (15)$$

$$a_{AD}^\tau = \varepsilon_1 * AD = \varepsilon_1 * 2l = 2a_{AO_1}^\tau. \quad (16)$$

Из уравнений (11) и (12) имеем:

$$\underline{\underline{\bar{a}_{O_1}}} + \underline{\underline{\bar{a}_{AO_1}^n}} + \underline{\underline{\bar{a}_{AO_1}^\tau}} = \underline{\underline{\bar{a}_D}} + \underline{\underline{\bar{a}_{AD}^n}} + \underline{\underline{\bar{a}_{AD}^\tau}}. \quad (17)$$

В соответствии с уравнением (17) построим векторный многоугольник ускорений ((рис. 5), из которого следует (18)-(20)):


$$a_{O_1} = a_{A_{O_1}}^n, \quad (18)$$

$$a_{A0_1}^\tau = a_D, \quad (19)$$

$$a_{\text{AD}}^{\tau} = 2a_{\text{D}}. \quad (20)$$

$$a_{Ax} = -a_{AO_1}^n - a_{O_1} = -\omega_1^2 * l - \omega_1^2 * l = -2\omega_1^2 * l,$$

$$a_{Ay} = a_{AO_1}^{\tau} = \varepsilon_1 * l,$$

$$a_{Ao_1}^\tau = \sqrt{a_{Ax}^2 + a_{Ay}^2} = \sqrt{(-2\omega_1^2 * l)^2 + (\varepsilon_1 * l)^2} = l\sqrt{\varepsilon_1^2 + 4\omega_1^4}. \quad (21)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{a_{AO_1}^\tau}{AO_1} = \frac{a_D}{AO_1} = \frac{a_D}{l}. \quad (22)$$

Найдем ускорение точки В, приняв за полюс сначала точку А, а потом точку С.

Запишем систему уравнений:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{AB}, \quad (23)$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_B^\tau + \bar{a}_B^n. \quad (24)$$

Из (23), (24) и с учетом (11) получим уравнение:

$$\bar{a}_{O_1} + \bar{a}_{AO_1}^n + \bar{a}_{AO_1}^\tau + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n = \bar{a}_B^\tau + \bar{a}_B^n, \quad (25)$$

где ускорение $\bar{a}_{BA}^\tau$ направлено перпендикулярно АВ, ускорение $\bar{a}_{BA}^n = 0$, так как $\omega_2 = 0$, ускорение $\bar{a}_B^n$ направлено от точки В к точке С, ускорение $\bar{a}_B^\tau$ направлено перпендикулярно ВС.

По модулю:

$$a_B^n = \omega_3^2 * BC = (2\omega_1)^2 * \frac{1}{2} = 4\omega_1^2 * \frac{1}{2} = 2\omega_1^2 * 1. \quad (26)$$

Построим в соответствии с уравнением (25) векторный многоугольник ускорений для точки В, соблюдая масштаб (рис. 6):

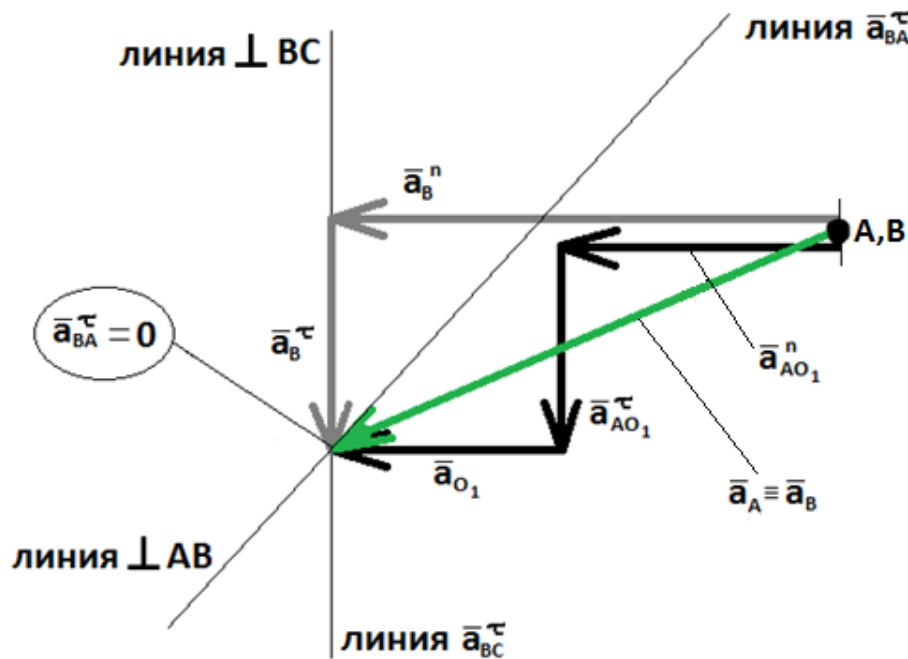


Рис. 6. План ускорений звена 1 и 2

Из рис. 6 следует:

$$\bar{a}_{BA}^{\tau} = 0. \quad (27)$$

Так как $a_{BA}^{\tau} = \varepsilon_2 * AB$, то:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^{\tau}}{AB} = 0. \quad (28)$$

Теория сложного движения точек

Второй метод. В основу второго метода положена теория сложного движения точки.

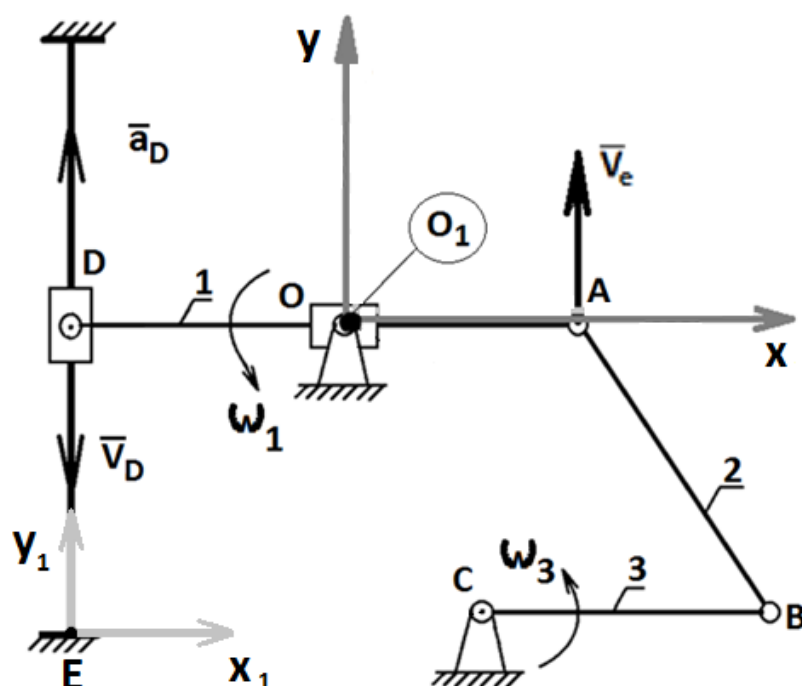


Рис. 7. Расчетная схема механизма для сложного определения скоростей точек звена 1

Рассмотрим движение точки D как сложное. Свяжем с втулкой подвижную систему координат xOy , которая вращается вокруг оси O. Неподвижную систему координат x_1Ey_1 свяжем с неподвижным звеном – стойкой. Тогда относительное движение точки D – движение вдоль оси OX, переносное – обусловлено вращением подвижной системы отсчета относительно неподвижной, то есть вращением вокруг оси O (рис. 7).

Скорость точки D будет равна геометрической сумме векторов относительной и переносной скоростей:

$$\underline{\underline{\bar{V}_D}} = \underline{\bar{V}_D^r} + \underline{\bar{V}_D^e}. \quad (29)$$

Вектор абсолютной скорости $\bar{V}_D$ направлена вертикально вниз, относительная скорость $\bar{V}_D^r$ определяется как скорость звена 1 вдоль оси X, переносная скорость $\bar{V}_D^e$ перпендикулярна OD.

Построим в соответствии с уравнением (29) векторный треугольник скоростей (рис. 8).

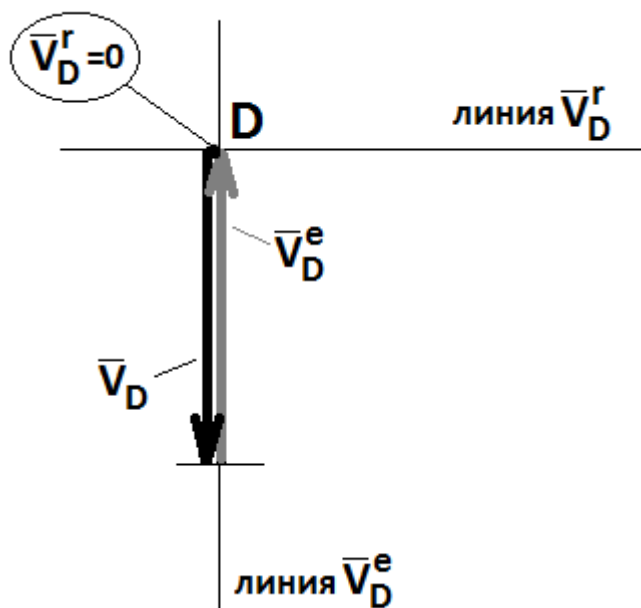


Рис. 8. План скоростей звена 1 для сложного определения скоростей

Из рис. 8 следует, что $\bar{V}_D^r = 0$, $\bar{V}_D^e = \bar{V}_D$. По модулю

$$V_D^e = V_D, \quad (30)$$

так как $V_D^e = \omega_1 * OD$, то угловая скорость звена 1 равна:

$$\omega_1 = \frac{V_D^e}{OD} = \frac{V_D}{OD} = \frac{V_D}{l}. \quad (31)$$

Рассмотрим движение точки A как сложное:

Для абсолютной скорости точки A можно записать:

$$\bar{V}_A = \bar{V}_A^r + \bar{V}_A^e. \quad (32)$$

Вектор $\bar{V}_A^e$ направлен перпендикулярно OA вверх. Модуль переносной скорости равен:

$$V_A^e = \omega_1 * OA = \frac{V_D}{1} * l = V_D. \quad (33)$$

Относительная скорость $\bar{V}_A^r = 0$, так как все точки звена 1 в этом положении механизма имеют относительные скорости в подвижной системе отсчета равные нулю. Это следует из того, что $\bar{V}_D^r = 0$.

Из уравнения (32) следует: $\bar{V}_A = \bar{V}_A^e$, и по модулю

$$V_A = V_A^e. \quad (34)$$

Из уравнений (33) и (34) следует:

$$V_A = V_A^e = V_D, \quad (35)$$

где вектор $\bar{V}_A$ перпендикулярен OA и направлен вверх.

Свяжем с точкой A подвижную систему координат, движущуюся поступательно со скоростью $\bar{V}_A$ и ускорением $\bar{a}_A$. Рассмотрим движение точки B , которая принадлежит звеньям 2 и 3. Относительное движение точки B – движение по окружности радиуса AB , переносное движение обусловлено поступательным движением звена 2 со скоростью $\bar{V}_A$ ускорением $\bar{a}_A$. Для абсолютной скорости точки B запишем:

$$\underline{\bar{V}_B} = \underline{\bar{V}_B^r} + \underline{\bar{V}_B^e}. \quad (36)$$

Здесь $\bar{V}_B^e = \bar{V}_A$, $\bar{V}_B^r$ перпендикулярен AB . По модулю:

$$V_B^e = V_A = V_D. \quad (37)$$

В уравнении (36) неизвестными являются направление и модуль скорости $\bar{V}_B$, а также модуль скорости $\bar{V}_B^r$.

Движение точки B , принадлежащей звену 2, будем рассматривать как сложное. Так как точка B принадлежит и звену 3, которое совершает вращательное движение вокруг оси C_z , то скорость $\bar{V}_B$ перпендикулярна BC .

Построим по уравнению (36) векторный многоугольник скоростей (рис. 9).

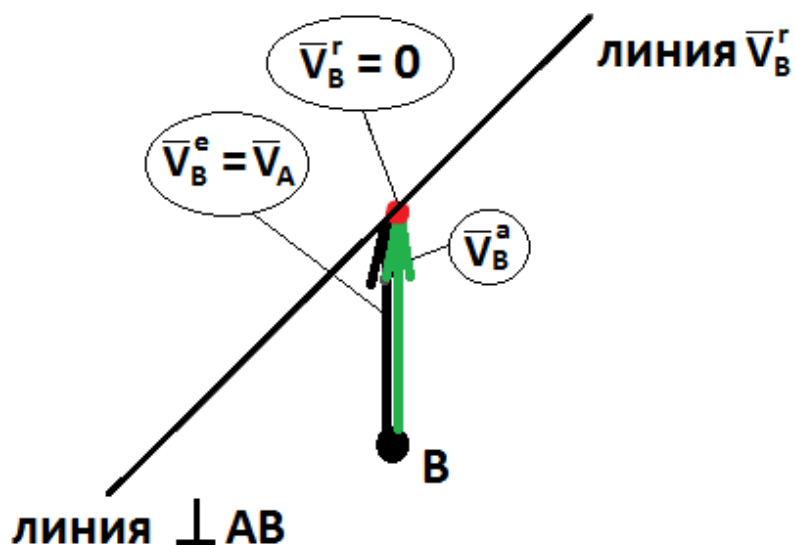


Рис. 9. План скоростей звеньев 2 и 3 для сложного определения скоростей

Так как $V_B^r = \omega_2 * AB = 0$, то:

$$\omega_2 = \frac{V_B^r}{AB} = 0. \quad (38)$$

Из рис. 9 следует:

$$\bar{V}_B^e = \bar{V}_B = \bar{V}_A. \quad (39)$$

И по модулю:

$$V_B^e = V_B = V_A = V_D. \quad (40)$$

Так как относительная скорость V_B^r точки В по отношению к точке А в неподвижной системе отсчета равна нулю: $\omega_2 = 0$.

Так как $V_B = \omega_3 * BC$, то:

$$\omega_3 = \frac{V_B}{BC} = 2 * \frac{V_A}{l} = 2 * \frac{V_D}{l} = 2 * \omega_1. \quad (41)$$

Угловая скорость звена 3 направлена против хода часовой стрелки.

Определим составляющие абсолютного ускорения точки D и угловое ускорение звена 1 (рис. 10). Ускорение точки D:

$$\underline{\bar{a}}_D = \underline{\bar{a}}_D^r + \underline{\bar{a}}_D^{\text{en}} + \underline{\bar{a}}_D^{\text{er}} + \underline{\bar{a}}_D^k. \quad (42)$$

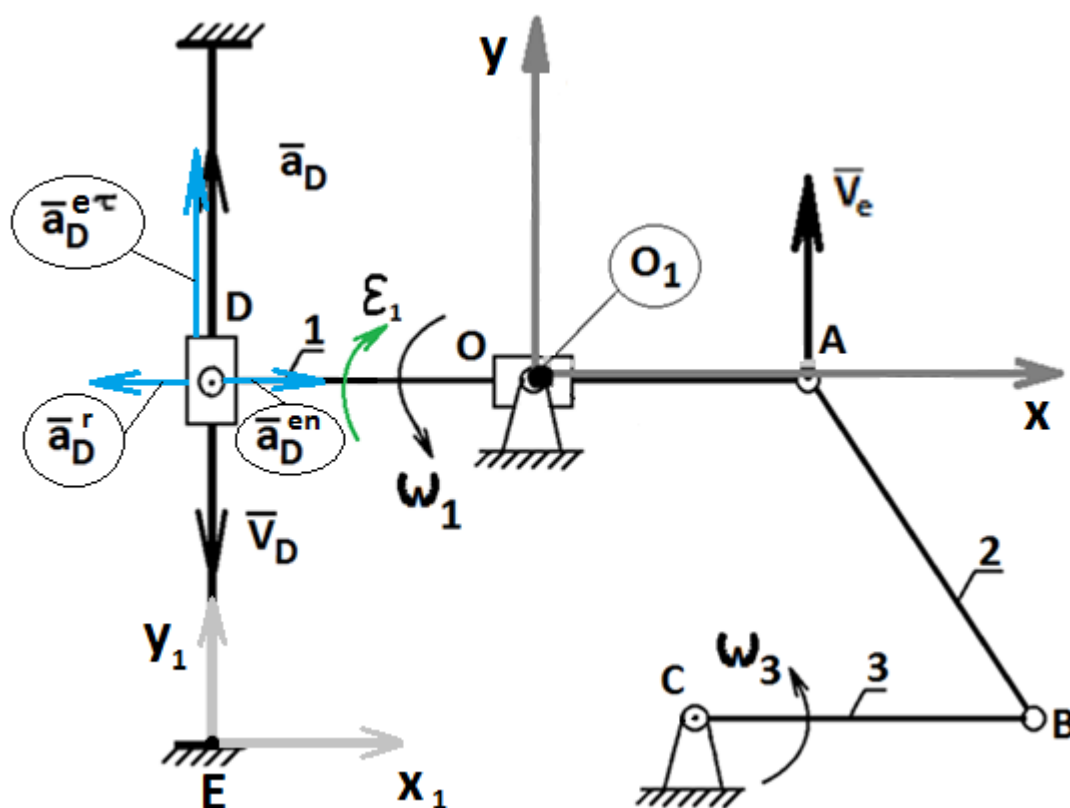


Рис. 10. Расчетная схема механизма для сложного определения ускорений точек звена 1

Здесь вектор $\bar{a}_D$ направлен по вертикальной направляющей и читается заданным по модулю; вектор $\bar{a}_D^{en}$ направлен от точки D к точке O и по модулю равен $a_D^{en} = \omega_1^2 * OD = \omega_1^2 * l$; ускорение Кориолиса $\bar{a}_D^k$ равно нулю, так как $\bar{V}_D^r = 0$ ($\bar{a}_D^k = 2\bar{\omega}_e \times \bar{V}_D^r$); ускорение $\bar{a}_D^r$ направлено по оси X; ускорение $\bar{a}_D^{et}$ направлено перпендикулярно оси X.

В соответствии с уравнением (42) построим в масштабе векторный многоугольник ускорений (рис. 11), с помощью которого уравнение (42) в проекциях на оси X_1 и Y_1 принимает вид:

$$0 = a_D^{\text{en}} - a_D^{\text{r}}, \quad (43)$$

$$a_D = a_D^{\text{e}\tau}. \quad (44)$$

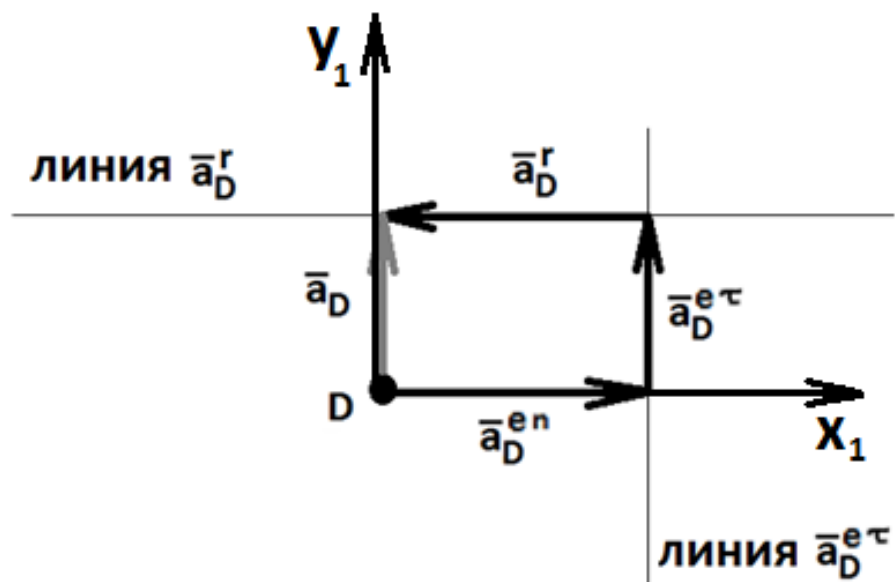


Рис. 11. Векторный многоугольник ускорение точки D

Из уравнения (43):

$$a_D^r = a_D^{en} = \omega_1^2 * DO = \omega_1^2 * l. \quad (45)$$

Угловое ускорение звена 1:

$$\varepsilon_1 = \frac{a_D^{e\tau}}{DO} = \frac{a_D}{l}. \quad (46)$$

Круговая стрелка ε_1 направлена по ходу часовой стрелки.

Ускорение точки A (рис. 12):

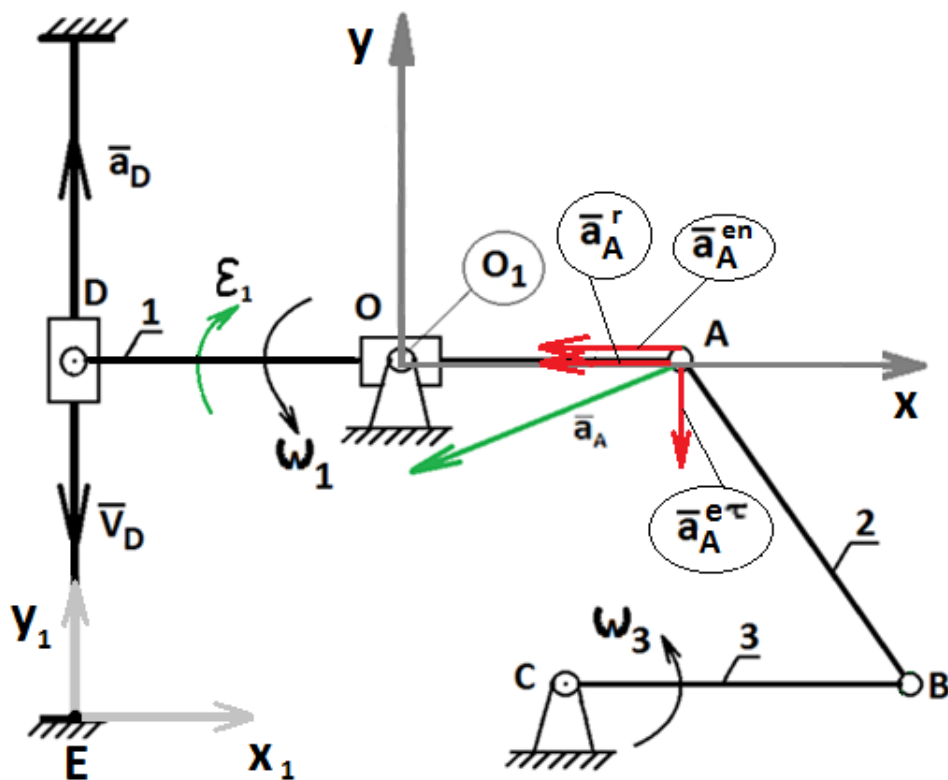


Рис. 12. Расчетная схема механизма для сложного определения ускорений точек звена 2

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^r + \bar{a}_A^{en} + \bar{a}_A^{e\tau} + \bar{a}_A^k. \quad (47)$$

Вектор $\bar{a}_A^r$ направлен по оси x_1 от точки A к точке O. При этом $\bar{a}_A^r = \bar{a}_D^r$ и по модулю $a_A^r = a_D^r = \omega_1^2 * l$, так как все точки звена 1 имеют одинаковые ускорения в подвижной системе отсчета. Вектор $\bar{a}_A^{en}$ направлен от точки A к точке O и по модулю равен $a_A^{en} = \omega_1^2 * OA = \omega_1^2 * l$. Вектор $\bar{a}_A^{e\tau}$ направлен перпендикулярно оси x_1 в соответствии с угловым ускорением ϵ_1 , по модулю $a_A^{e\tau} = \epsilon_1 * OA = \frac{a_D}{l} * l = a_D$. Вектор $\bar{a}_A^k$ равен нулю, так как $V_A^r = 0$ ($\bar{a}_A^k = 2\bar{\omega}_e \times \bar{V}_{Ar}^r$).

В соответствии с уравнением (47) построим в масштабе векторный многоугольник ускорений (рис. 13), с помощью которого уравнение (47) в проекциях на оси x_1 и y_1 принимают вид:

$$a_{Ax} = -a_A^r - a_A^{en} = -\omega_1^2 * l - \omega_1^2 * l = -2(\omega_1^2 * l), \quad (48)$$

$$a_{Ay} = -a_A^{e\tau} = -a_D. \quad (49)$$

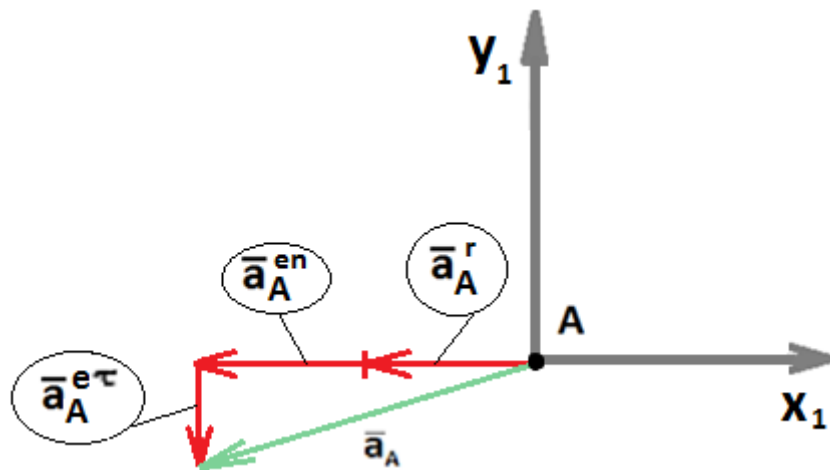


Рис. 13. Векторный многоугольник ускорение точки A

Абсолютное ускорение точки A:

$$a_A = \sqrt{a_{Ax}^2 + a_{Ay}^2} = \sqrt{4(\omega_1^2 * l)^2 + a_D^2}. \quad (50)$$

Определим ускорение точки B:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_B^e + \bar{a}_B^r + \bar{a}_B^k. \quad (51)$$

Здесь $\bar{a}_B = \bar{a}_B^n + \bar{a}_B^\tau$; $\bar{a}_B^e = \bar{a}_A$; $\bar{a}_B^k = 0$, так как $V_B^r = 0 (\omega_2 = 0)$, $\bar{a}_B^r = \bar{a}_B^{rn} + \bar{a}_B^{r\tau}$, но $a_B^{rn} = 0$, так как $\omega_2 = 0$.

Тогда:

$$\underline{\underline{\bar{a}_B^n}} + \underline{\underline{\bar{a}_B^\tau}} = \underline{\underline{\bar{a}_A}} + \underline{\underline{\bar{a}_B^{r\tau}}}, \quad (52)$$

где $a_B^n = \omega_3^2 * BC = \omega_3^2 * \frac{1}{2} = (2\omega_1^2)^2 * \frac{1}{2} = 2\omega_1^2 * l$.

Строим по уравнению (52) векторный многоугольник ускорений в том же масштабе, что и для $\bar{a}_A$ (рис. 14).

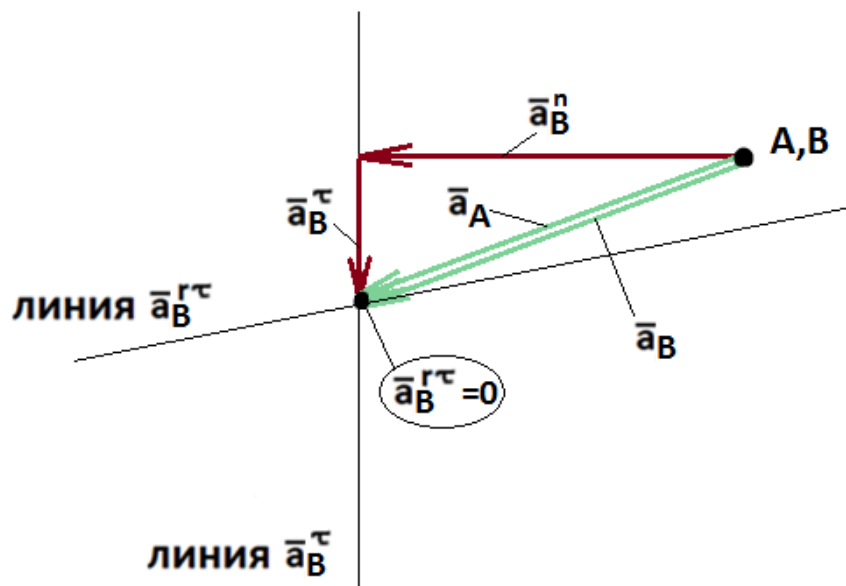


Рис. 14. Векторный многоугольник ускорение точки B

Из векторного треугольника на рис. 15 имеем:

$$\begin{aligned}
 a_B^{r\tau} &= 0, \\
 \varepsilon_2 &= \frac{a_B^{r\tau}}{AB} = 0, \\
 \bar{a}_B &= \bar{a}_A, \\
 a_B &= a_A.
 \end{aligned}
 \tag{53}$$

Окончательное расположение скоростей и ускорений точек A и B (рис. 15):

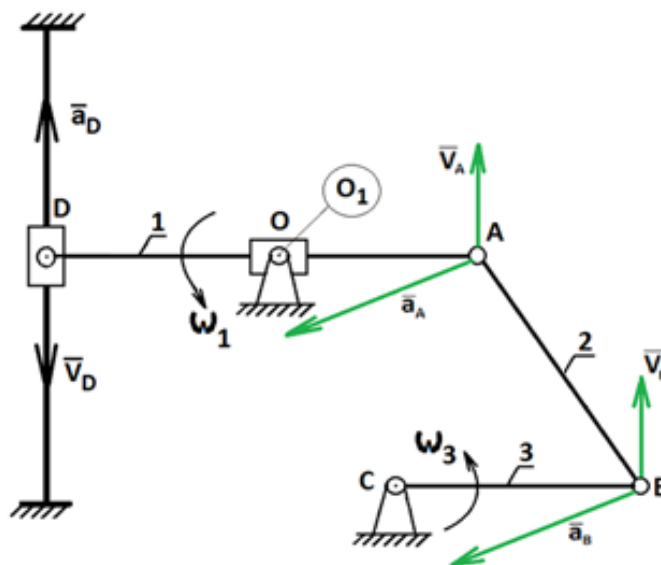


Рис. 15. Окончательная схема расположения скоростей и ускорений звена 2

Вывод

Рассмотренные в работе методы решения задачи на определение скоростей и ускорений точек тел плоского механизма показали, что наиболее предпочтительным является метод определения скоростей и ускорений точек тел с применением теории плоского движения тела. Второй метод решения подобных задач весьма трудоемок и сложен для восприятия.

Список литературы

1. Мартыненко Ю.Г. Теоретическая механика // Сборник научно-методических статей Московского университета. М.: Изд-во Московского университета, 2012. 2012. Вып.28. С. 137-140.
2. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: учебник. 7-е изд., стер. СПб.: Издательство «Лань», 2010. 720 с.: ил. (Учебники для вузов. Специальная литература).
3. Дубинин В.В., Тушева Г.М., Г.И. Гатауллина, Ремизов А.В. Кинематика сложного движения точки: методические указания к курсовой работе по теоретической механике. М.: Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2007. 52с.: ил.
4. Дубинин В.В., Карпачев А.Ю., Назаренко Б.П. Кинематика плоского движения твердого тела: Методические указания и варианты курсового задания. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2007. 35с.: ил.