электронный научно-технический журнал
ИНЖЕНЕРНЫЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51036. ISSN 2307-0595

Об использовании криволинейных координат в векторном анализе

11, ноябрь 2015

Михайлова О. В.[1,*], Сержантова М. М.[1]

УДК: 517.43

[1]Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
*volham@mail.ru

Введение

Чтобы определить основные понятия векторного анализа (градиент, дивергенция, ротор) не требуется введение системы координат. От выбора системы координат не зависят и свойства дифференциальных операций векторного анализа. Вид же скалярных и векторных полей существенно зависит от выбранной системы координат.

На практике не всегда ограничиваются декартовой системой координат, например, в случае центрального скалярного или векторного поля, которое зависит только от расстояния до центра поля, удобнее воспользоваться сферической системой координат, а в случае осесимметричных полей лучше использовать цилиндрическую систему координат. Эти два типа криволинейных координат и будут рассматриваться ниже.

Вывод формул для элементов теории поля таких, как градиент, дивергенция, ротор, оператор Лапласа в этих двух ортогональных криволинейных системах координат и запись их через коэффициенты Ляме достаточно подробно приводятся в учебниках и пособиях по теории поля [1]. Преобразованию же базисов при переходе из декартовской системы координат уделяется внимание лишь при выводе вышеперечисленных формул и, как правило, не приводятся решения задач, в которых векторные поля из декартовской системы координат преобразуют в криволинейную систему координат. К последней задаче и будет обращено основное внимание.

Ортогональные криволинейные координаты
Коэффициенты Ляме

Приведем основные определение и формулы, которые понадобятся в дальнейшем [4].

Пусть в пространственной области D зафиксирована прямоугольная система координат $OXYZ$ (ДСК). Рассмотрим три непрерывно дифференцируемые в D функции

$$\begin{cases} u = u(x,\ y,\ z) \\ v = v(x,\ y,\ z) \\ w = w(x,\ y,\ z) \end{cases},$$

задающие взаимно-однозначное отображение области D в D_1. Пусть матрица Якоби этого отображения в каждой точке области D является невырожденной, а обратное отображение определяется непрерывно дифференцируемыми в D_1 функциями

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}.$$

При этих условиях u, v, w можно рассматривать как криволинейные координаты точки в области D.

Криволинейные координаты u, v, w характеризуются их поверхностями уровня

$$u(u, v, w) = C_1 \quad ; \quad v(u, v, w) = C_2 \quad ; \quad u(u, v, w) = C_3 \quad -$$

координатными поверхностями и пересечениями этих поверхностей – координатными линиями, которые могут быть заданы параметрически с параметрами C_1, C_2, C_3.

Параметрическое задание координатной линии позволяет получить координаты касательного к ней вектора. Координаты касательного вектора к координатной линии, вдоль которой изменяется координата, например u, и которая проходит через точку $M \in D$ в ДСК, равны

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}; \frac{\partial y}{\partial u}; \frac{\partial z}{\partial u} \right).$$

Соответствующий единичный касательный вектор $\bar{e}_u$ имеет вид в ДСК

$$\bar{e}_u = \frac{1}{L_1} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \bar{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \bar{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \bar{k} \right),$$

соответственно другие единичные касательные векторы $\bar{e}_v$, $\bar{e}_w$ определятся в ДСК

$$\begin{aligned} \bar{e}_v &= \frac{1}{L_2} \left(\frac{\partial x}{\partial v} \bar{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \bar{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \bar{k} \right) \\ \bar{e}_w &= \frac{1}{L_3} \left(\frac{\partial x}{\partial w} \bar{i} + \frac{\partial y}{\partial w} \bar{j} + \frac{\partial z}{\partial w} \bar{k} \right) \end{aligned},$$

где $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ – базис ДСК, L_i – коэффициенты Ляме

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2}, \\ L_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2}, \\ L_3 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w} \right)^2} \end{aligned} \right\}.$$

Основное отличие декартовой системы координат (ДСК) от криволинейной системы координат (КСК) состоит в том, что для ДСК базис $\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\}$ всегда один и тот же для любых точек пространства D, для КСК базис в каждой точке пространства D_1 свой в силу того, что в КСК точка находится в пересечении трех криволинейных координатных линий, которые в каждой точке $M \in D_1$ различные.

Пример 1. Рассмотрим цилиндрические координаты $(r, \varphi, z) = (u, v, w)$ точки $M \in D \in \mathbb{R}^3$, где r – радиус-вектор точки M, φ – угол, который образует проекция радиус-вектора на плоскость XOY с положительным направлением оси OX, z – аппликата точки M. Связь декартовых и цилиндрических координат задается соотношениями

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}.$$

Коэффициенты Ляме: $L_1 = 1$; $L_2 = r$; $L_3 = 1$.

Матрица Якоби для цилиндрических координат

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Столбцы этой матрицы ортогональны, т.е. цилиндрические координаты ортогональны.

Пример 2. Рассмотрим сферические координаты $(r, \theta, \varphi) = (u, v, w)$ точки $M \in D \in \mathbb{R}^3$, где r – радиус-вектор точки M, θ – угол между радиус-вектором и его проекцией на плоскость XOY, φ – угол проекции с положительным направлением оси OX.

Связь декартовых координат точки с ее сферическими координатами

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\cos\theta\sin\varphi \\ z = r\sin\theta \end{cases}.$$

Коэффициенты Ляме: $L_1 = 1$; $L_2 = r\cos\theta$; $L_3 = r$.

Ортогональность доказывается аналогично случаю цилиндрических координат.

Запишем выражения для элементов длин, площадей и объемов через коэффициенты Ляме и соответствующие дифференциалы.

Элементы длин:

$$dl_1 = L_1 du, \quad dl_2 = L_2 dv, \quad dl_3 = L_3 dw.$$

Элементы площадей:

$$d\sigma_1 = dl_1 dl_2 = L_1 L_2\, du\, dv,$$
$$d\sigma_2 = dl_2 dl_3 = L_2 L_3\, dv\, dw,$$
$$d\sigma_3 = dl_1 dl_3 = L_1 L_3\, du\, dw.$$

Элемент объема:

$$dv = dl_1 dl_2 dl_3 = L_1 L_2 L_3 \, du \, dv dw .$$

Элементы теории поля в КСК

Градиент в криволинейных координатах

Пусть дана функция $U = U(x, y, z)$. Требуется найти выражение для $\operatorname{grad} U$ в виде разложения по ортам $\{\bar{e}_u, \bar{e}_v, \bar{e}_w\}$ в криволинейной ортогональной системе координат. Для этого необходимо найти проекции $\operatorname{grad} U$ на направления этих ортов. Проекция $\operatorname{grad} U$ на какое-либо направление равна производной от U по этому направлению:

$$\frac{\partial U}{\partial l_u} = \lim_{\Delta l_1 \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta l_1} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta U}{L_1 \Delta u} = \frac{1}{L_1} \frac{\partial U}{\partial u} .$$

Аналогично определяются проекции $\operatorname{grad} U$ на $\bar{e}_v$ и $\bar{e}_w$:

$$\frac{\partial U}{\partial l_v} = \frac{1}{L_2} \frac{\partial U}{\partial v} , \quad \frac{\partial U}{\partial l_w} = \frac{1}{L_3} \frac{\partial U}{\partial w} .$$

Следовательно,

$$\operatorname{grad} U = \frac{1}{L_1} \frac{\partial U}{\partial u} \bar{e}_u + \frac{1}{L_2} \frac{\partial U}{\partial v} \bar{e}_v + \frac{1}{L_3} \frac{\partial U}{\partial w} \bar{e}_w$$

– формула для вычисления градиента скалярной функции U в криволинейной системе координат.

Запишем выражение для $\operatorname{grad} U$ в цилиндрической системе координат:

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial r} \bar{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \bar{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{e}_z .$$

В сферической системе координат:

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial r} \bar{e}_r + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \bar{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \bar{e}_\theta .$$

Дивергенция в криволинейных координатах

Аналогично выводятся формулы для дивергенции и ротора в КСК.

$$\operatorname{div} \bar{a}(M) = \frac{1}{L_1 L_2 L_3} \left(\frac{\partial}{\partial u}(a_u L_2 L_3) + \frac{\partial}{\partial v}(a_v L_1 L_3) + \frac{\partial}{\partial w}(a_w L_1 L_2) \right).$$

Запишем выражение для дивергенции в цилиндрической системе координат:

$$\operatorname{div} \bar{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r a_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}(a_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(a_z) .$$

В сферической системе координат:

$$\operatorname{div} \bar{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 a_r) + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}(a_\varphi) + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(a_\theta \cos \theta) .$$

Ротор (вихрь) в криволинейных координатах

$$\operatorname{rot}\bar{a} = \frac{1}{L_2 L_3}\left(\frac{\partial}{\partial v}(a_w L_3) - \frac{\partial}{\partial w}(a_v L_2)\right)\bar{e}_u + \frac{1}{L_1 L_3}\left(\frac{\partial}{\partial w}(a_u L_1) - \frac{\partial}{\partial u}(a_w L_3)\right)\bar{e}_v +$$

$$+\frac{1}{L_1 L_2}\left(\frac{\partial}{\partial u}(a_v L_2) - \frac{\partial}{\partial v}(a_u L_1)\right)\bar{e}_w .$$

Последнюю формулу можно записать более компактно с помощью определителя

$$\operatorname{rot}\bar{a} = \begin{vmatrix} \dfrac{\bar{e}_u}{L_2 L_3} & \dfrac{\bar{e}_v}{L_1 L_3} & \dfrac{\bar{e}_w}{L_1 L_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ a_u L_1 & a_v L_2 & a_w L_3 \end{vmatrix}.$$

В цилиндрических координатах (r, φ, z):

$$\operatorname{rot}\bar{a} = \begin{vmatrix} \dfrac{\bar{e}_r}{r} & \dfrac{\bar{e}_\varphi}{1} & \dfrac{\bar{e}_z}{r} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_r & r a_\varphi & a_z \end{vmatrix}.$$

В сферических координатах (r, φ, θ):

$$\operatorname{rot}\bar{a} = \begin{vmatrix} \dfrac{\bar{e}_r}{r^2 \cos\theta} & \dfrac{\bar{e}_\varphi}{r} & \dfrac{\bar{e}_\theta}{r\cos\theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ a_r & (r\cos\theta)\, a_\varphi & (r) a_\theta \end{vmatrix}.$$

Оператор Лапласа в криволинейных координатах

Для скалярной функции $U = U(x, y, z)$.

Так как $\Delta U = \operatorname{div}\operatorname{grad} U$, то оператор Лапласа в криволинейных координатах имеет вид

$$\Delta U = \frac{1}{L_1 L_2 L_3}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{L_2 L_3}{L_1}\frac{\partial U}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L_1 L_3}{L_2}\frac{\partial U}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{L_1 L_2}{L_3}\frac{\partial U}{\partial w}\right)\right).$$

В цилиндрических координатах (r, φ, z):

$$\Delta U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

В сферических координатах (r, φ, θ):

$$\Delta U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2\cos\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta\,\frac{\partial U}{\partial \theta}\right).$$

Матрицы преобразования ортов

Алгоритм вычисления координат базисов

Напомним, что координаты базиса в КСК задаются

$$\bar{e}_u = \frac{1}{L_1}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\bar{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\bar{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\bar{k}\right)$$

$$\bar{e}_v = \frac{1}{L_2}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\bar{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\bar{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\bar{k}\right)$$

$$\bar{e}_w = \frac{1}{L_3}\left(\frac{\partial x}{\partial w}\bar{i} + \frac{\partial y}{\partial w}\bar{j} + \frac{\partial z}{\partial w}\bar{k}\right)$$

В линейной алгебре матрица перехода от старого $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ к новому базису $\{\bar{e}_u, \bar{e}_v, \bar{e}_w\}$ представляет собой матрицу размера 3×3, где каждый столбец представляет собой координаты новых базисных векторов в старом базисе, поэтому матрица S имеет вид:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{1}{L_2}\frac{\partial x}{\partial v} & \frac{1}{L_3}\frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{1}{L_1}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{1}{L_2}\frac{\partial y}{\partial v} & \frac{1}{L_3}\frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{1}{L_1}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{1}{L_2}\frac{\partial z}{\partial v} & \frac{1}{L_3}\frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}.$$

Обозначим базис в ДСК $I = \begin{bmatrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{bmatrix}$, а базис в КСК $E = \begin{bmatrix} \bar{e}_u \\ \bar{e}_v \\ \bar{e}_w \end{bmatrix}$, тогда $\begin{matrix} I = SE \\ E = S^{-1}I \end{matrix}$, где S^{-1} – обратная матрица для S. Так как матрица S ортогональная, то в этом случае обратной матрицей к S является транспонированная матрица S, т.е. $S^{-1} = S^T$.

Поэтому вместо 2-х операций умножения матриц для определения старых и новых базисов можно ввести простой алгоритм A в виде таблицы, где слева стоит матрица-столбец I, в центре – матрица S, а сверху матрицы S записывается в виде матрицы-строки базис E, т.е.

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \bar{e}_u & \bar{e}_v & \bar{e}_w \end{array} \\ \begin{bmatrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{1}{L_2}\frac{\partial x}{\partial v} & \frac{1}{L_3}\frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{1}{L_1}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{1}{L_2}\frac{\partial y}{\partial v} & \frac{1}{L_3}\frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{1}{L_1}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{1}{L_2}\frac{\partial z}{\partial v} & \frac{1}{L_3}\frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Правило пользования алгоритмом A для получения координат старого базиса в новом: надо выражения в соответствующей строке матрицы S домножить на единичные векторы нового базиса и просуммировать их, в результате получаем

$$\overline{i}=\frac{1}{L_1}\frac{\partial x}{\partial u}\,\overline{e}_u+\frac{1}{L_2}\frac{\partial x}{\partial v}\,\overline{e}_v+\frac{1}{L_3}\frac{\partial x}{\partial w}\,\overline{e}_w\,.$$

Аналогично для векторов $\overline{j}$ и $\overline{k}$:

$$\begin{aligned}\overline{j}&=\frac{1}{L_1}\frac{\partial y}{\partial u}\,\overline{e}_u+\frac{1}{L_2}\frac{\partial y}{\partial v}\,\overline{e}_v+\frac{1}{L_3}\frac{\partial y}{\partial w}\,\overline{e}_w\\ \overline{k}&=\frac{1}{L_1}\frac{\partial z}{\partial u}\,\overline{e}_u+\frac{1}{L_2}\frac{\partial z}{\partial v}\,\overline{e}_v+\frac{1}{L_3}\frac{\partial z}{\partial w}\,\overline{e}_w\end{aligned}\,.$$

Для получения нового базиса в старом домножение проводят по столбцу и затем суммируют результаты, получаем

$$\overline{e}_u=\frac{1}{L_1}\frac{\partial x}{\partial u}\,\overline{i}+\frac{1}{L_1}\frac{\partial y}{\partial u}\,\overline{j}+\frac{1}{L_1}\frac{\partial z}{\partial u}\,\overline{k}\,.$$

Аналогично для $\overline{e}_v$ и $\overline{e}_w$.

Найдем матрицы перехода S для цилиндрических и сферических координат, используя общий вид матрицы S.

Для цилиндрических координат

$$(x,y,z)\to(r,\varphi,z)$$

$$\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\\ z=z\end{cases}\qquad L_1=1;\qquad L_2=r;\qquad L_3=1$$

$$S=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{array}{c}\\ \overline{i}\\ \overline{j}\\ \overline{k}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\overline{e}_r & \overline{e}_\varphi & \overline{e}_z\end{array}\\ \begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}.$$

$$\begin{cases}\overline{i}=\cos\varphi\cdot\overline{e}_r-\sin\varphi\cdot\overline{e}_\varphi\\ \overline{j}=\sin\varphi\cdot\overline{e}_r+\cos\varphi\cdot\overline{e}_\varphi\\ \overline{k}=\overline{e}_z\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}\overline{e}_r=\cos\varphi\cdot\overline{i}+\sin\varphi\cdot\overline{j}\\ \overline{e}_\varphi=-\sin\varphi\cdot\overline{i}+\cos\varphi\cdot\overline{j}\\ \overline{e}_z=\overline{k}\end{cases}$$

Для сферических координат

$$(x,y,z)\to(r,\varphi,\theta):$$

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\cos\varphi\\ y=r\cos\theta\sin\varphi\\ z=r\sin\theta\end{cases}\qquad L_1=1;\qquad L_2=r\cos\theta;\qquad L_3=r$$

$$A=\begin{array}{c} \\ \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\bar{e}_r & \bar{e}_\varphi & \bar{e}_\theta\end{array}\\ \begin{bmatrix}\cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}\end{array}$$

$$\bar{i}=\cos\theta\cos\varphi\cdot\bar{e}_r-\sin\varphi\cdot\bar{e}_\varphi-\sin\theta\cos\varphi\cdot\bar{e}_\theta$$

$$\bar{e}_r=\cos\theta\cos\varphi\cdot\bar{i}+\cos\theta\sin\varphi\cdot\bar{j}+\sin\theta\cdot\bar{k}$$

Пример 3. Векторное поле $\bar{a}=-y\cdot\vec{i}+x\cdot\vec{j}+\sqrt{x^2+y^2}\cdot\bar{k}$ преобразовать к цилиндрической и сферической системам координат и вычислить $\operatorname{rot}\bar{a}$ в обеих системах.

Решение

В цилиндрической системе координат $x=r\cos\varphi$; $y=r\sin\varphi$; $z=z$:

$$\begin{cases}\bar{i}=\cos\varphi\bar{e}_r-\sin\varphi\bar{e}_\varphi\\ \bar{j}=\sin\varphi\bar{e}_r+\cos\varphi\bar{e}_\varphi\\ \bar{k}=\bar{e}_z\end{cases}$$

Подставим в вектор $\bar{a}$, получим

$$\bar{a}=-x\sin\varphi(\cos\varphi\cdot\bar{e}_r-\sin\varphi\cdot\bar{e}_\varphi)+r\cos\varphi(\sin\varphi\cdot\bar{e}_r+\cos\varphi\cdot\bar{e}_\varphi)+r\cdot\bar{e}_z=r\cdot\bar{e}_\varphi+r\cdot\bar{e}_z.$$

$$\operatorname{rot}\bar{a}_{(r,\varphi,z)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\bar{e}_r}{r} & \dfrac{\bar{e}_\varphi}{1} & \dfrac{\bar{e}_z}{r}\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_r & ra_\varphi & a_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{\bar{e}_r}{r} & \dfrac{\bar{e}_\varphi}{1} & \dfrac{\bar{e}_z}{r}\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & r\cdot r & r\end{vmatrix}=\frac{\bar{e}_r}{r}\cdot0-1\cdot\bar{e}_\varphi+\bar{e}_z\cdot2r=0\cdot\bar{e}_r-\bar{e}_\varphi+2r\cdot\bar{e}_z\cdot\frac{1}{r}=-\bar{e}_\varphi+2\bar{e}_z$$

.

Проверим, вычислив $\operatorname{rot}\bar{a}$ в ДСК и перейдя к ЦСК.

$$\operatorname{rot}\bar{a}_{(x,y,z)}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -y & x & \sqrt{x^2+y^2}\end{vmatrix}=\bar{i}\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\bar{j}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\bar{k}\cdot2=$$

$$=(\cos\varphi\cdot\bar{e}_r-\sin\varphi\cdot\bar{e}_\varphi)\sin\varphi-\cos\varphi(\sin\varphi\cdot\bar{e}_r+\cos\varphi\cdot\bar{e}_\varphi)+2\cdot\bar{e}_z=$$

$$=\cos\varphi\cdot\sin\varphi\cdot\bar{e}_r-\sin^2\varphi\cdot\bar{e}_\varphi-\cos\varphi\sin\varphi\cdot\bar{e}_r-\cos^2\varphi\cdot\bar{e}_\varphi+2\bar{e}_z=-1\cdot\bar{e}_\varphi+2\bar{e}_z.$$

В сферической системе координат

$$x=r\cos\theta\cos\varphi;\quad y=r\cos\theta\sin\varphi;\quad z=r\sin\theta.$$

$$\begin{cases}\bar{i}=\cos\theta\cos\varphi\bar{e}_r-\sin\varphi\bar{e}_\varphi-\sin\theta\cos\varphi\bar{e}_\theta\\ \bar{j}=\cos\theta\sin\varphi\bar{e}_r+\cos\varphi\bar{e}_\varphi-\sin\theta\sin\varphi\bar{e}_\theta\\ \bar{k}=\sin\theta\bar{e}_r+\cos\theta\bar{e}_\theta\end{cases},$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi+r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi}=r\cos\theta.$$

$$\overline{a}_{(r,\varphi,\theta)} = -r\cos\theta\sin\varphi(\cos\theta\cos\varphi\overline{e}_r - \sin\varphi\overline{e}_\varphi - \sin\theta\cos\varphi\overline{e}_\theta) +$$

$$+r\cos\theta\cos\varphi(\cos\theta\sin\varphi\overline{e}_r + \cos\varphi\overline{e}_\varphi - \sin\theta\sin\varphi\overline{e}_\theta) + r\cos\theta(\sin\theta\overline{e}_r + \cos\theta\overline{e}_\theta) =$$

$$= \frac{1}{2} r\sin 2\theta\cdot\overline{e}_r + r\cos\theta\cdot\overline{e}_\varphi + r\cos^2\theta\cdot\overline{e}_\varphi$$

$$\operatorname{rot}\overline{a}_{(r,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\overline{e}_r}{r^2\cos\theta} & \dfrac{\overline{e}_\varphi}{r} & \dfrac{\overline{e}_\theta}{r\cos\theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} \\ \dfrac{1}{2} r\sin 2\theta & r^2\cos^2\theta & r^2\cos^2\theta \end{vmatrix} = 2\sin\theta\cdot\overline{e}_r - \overline{e}_\varphi + 2\cos\theta\cdot\overline{e}_\varphi$$

$$\operatorname{rot}\overline{a}\,(x,y,z) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\overline{i} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\overline{j} + 2\overline{k}$$

$$\operatorname{rot}\overline{a}(r,\varphi,\theta) = r\sin\varphi(\cos\theta\cos\varphi\overline{e}_r - \sin\varphi\overline{e}_\varphi - \sin\theta\cos\varphi\overline{e}_\theta) - r\cos\varphi(\cos\theta\sin\varphi\overline{e}_r + \cos\varphi\overline{e}_\varphi - \sin\theta\sin\varphi\overline{e}_\theta) +$$

$$+2(\sin\theta\overline{e}_r + \cos\varphi\overline{e}_\theta) = 2\sin\theta\overline{e}_r - \overline{e}_\varphi + 2\cos\theta\overline{e}_\theta$$

Заключение.

Представленный алгоритм позволяет быстро и без ошибок вычислить координаты векторных полей и их характеристик (градиентов, дивергенций, роторов, операторов Лапласа) при переходе от декартовой системы координат к цилиндрической или сферической системам координат.

Список литературы

[1]. Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля: Учебник для вузов. Изд. 3-е, испр. / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2008. 492с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. VII).

[2]. Сержантова М.М., Логинова Л.А., Познякова Л.В. Теория поля: Учебное пособие / Под ред. М.М. Сержантовой. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 1992. 58 с.