

## Построение фокусных линий конических сечений параллельными плоскостями

# 10, октябрь 2015

Полубинская Л.Г.<sup>1</sup>, Хуснетдинов Т.Р.<sup>1,\*</sup>

УДК: 514.758.3

<sup>1</sup>Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

\* [Timur\\_bmstu\\_rk@mail.ru](mailto:Timur_bmstu_rk@mail.ru)

### Введение

Если поверхность прямого кругового конуса рассечь плоскостью и вписать сферу, касательную к конусу и плоскости сечения, то точка касания сферы с секущей плоскостью является точкой фокуса сечения. Это известное положение теоремы Ж. Данделена является основой доказательства возникновения коник (эллипса, гиперболы, параболы) как плоских сечений *кругового конуса* [1]. О расположении фокусных линий (линии, образованные фокусами кривых) мало что известно.

Рассмотрим случаи пересечения конической поверхности параллельными плоскостями [2, 3]. Выделим три варианта сечений конической поверхности параллельными плоскостями:

1. В сечениях получаются параболы;
2. В сечениях получаются эллипсы;
3. В сечениях получаются гиперболы.

1. Рассмотрим одно изображение (одну проекцию) геометрических элементов. Секущая плоскость  $\alpha$  параллельна левой очерковой образующей и пересекает коническую поверхность по параболе  $p$ . Плоскость  $\alpha$  является проецирующей, поэтому и вся плоскость, и парабола, ей принадлежащая, спроецировались в одну прямую. Для нахождения фокуса параболы впишем сферу в коническую поверхность так, чтобы она была касательна и к плоскости  $\alpha$ . Центр сферы, радиус её и координаты точки касания с секущей плоскостью – точка  $A$  – фокус параболы определены с высокой точностью с помощью графического пакета Inventor (рис. 1) [4, 5, 6, 7].

Проделаем вышеописанную процедуру для плоскости  $\beta$ , параллельной плоскости  $\alpha$ . Плоскость  $\beta$  пересекает коническую поверхность по параболе  $l$ . Фокусом параболы  $l$  является точка  $D$  (рис. 2).

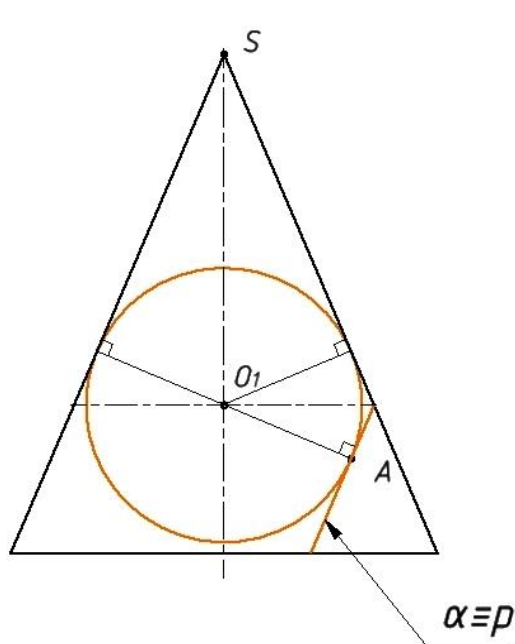


Рис.1. Определение фокуса первой параболы

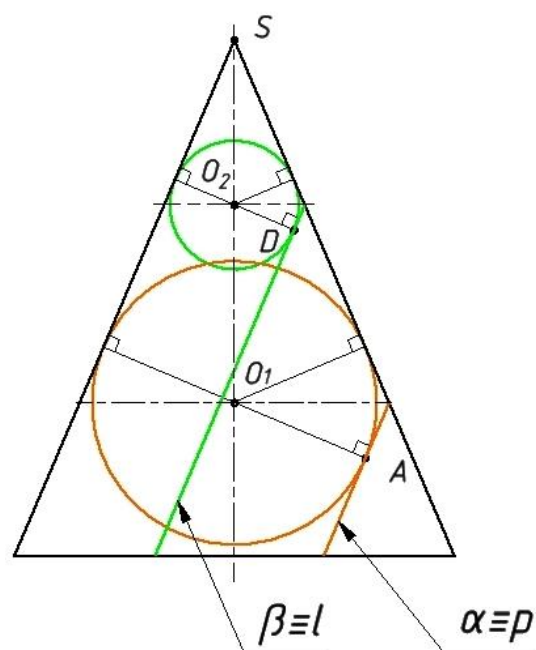


Рис.2. Определение фокуса второй параболы

Прямая  $t$ , проходящая через фокусы парабол  $r$  и  $l$ , то есть точки  $A$  и  $D$ , проходит через вершину  $S$  конической поверхности, т. к. предельное положение секущей плоскости – плоскость касательная к конической поверхности, в которой парабола сечения вырождается в прямую – образующую конуса. А сфера Данделена вырождается в точку, т.к. имеет центр, совпадающий с вершиной конуса и радиус равный 0. (рис. 3).

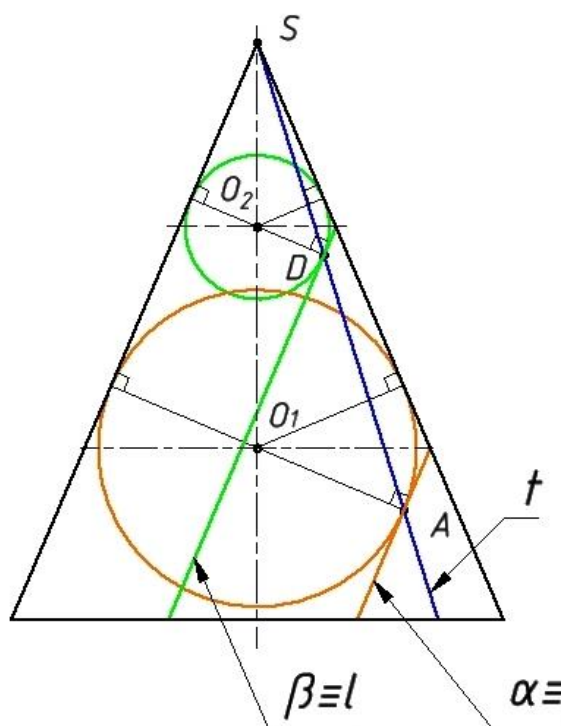


Рис.3. Фокусная линия для семейства парабол

2. Секущая плоскость  $\varrho$  пересекает все образующие конической поверхности, но не перпендикулярна оси вращения конической поверхности. Такая плоскость пересекает коническую поверхность по эллипсу  $k$ . Заметим, что в этом случае можно вписать в коническую поверхность 2 сферы, расположенные по разные стороны от плоскости  $\varrho$ , так, чтобы они были касательными и к плоскости  $\varrho$ . В результате получатся 2 точки касания, что соответствует наличию 2-х фокусов у кривой сечения. Центры сфер, радиусы их и координаты точек касания с секущей плоскостью – точки  $G$  и  $H$  – фокусы эллипса  $k$  определены с высокой точностью с помощью графического пакета Inventor. (рис. 4) [4, 5, 6, 7].

Проделаем вышеописанную процедуру для плоскости  $\lambda$ , параллельной плоскости  $\varrho$ . Плоскость  $\lambda$  пересекает коническую поверхность по эллипсу  $m$ . Фокусами эллипса  $m$  являются точки  $L$  и  $N$  (рис. 5). Построим фокусы для каждого эллипса  $m$  отдельно, чтобы не загромождать чертеж, а затем наложим эти изображения одно на другое (рис. 6).

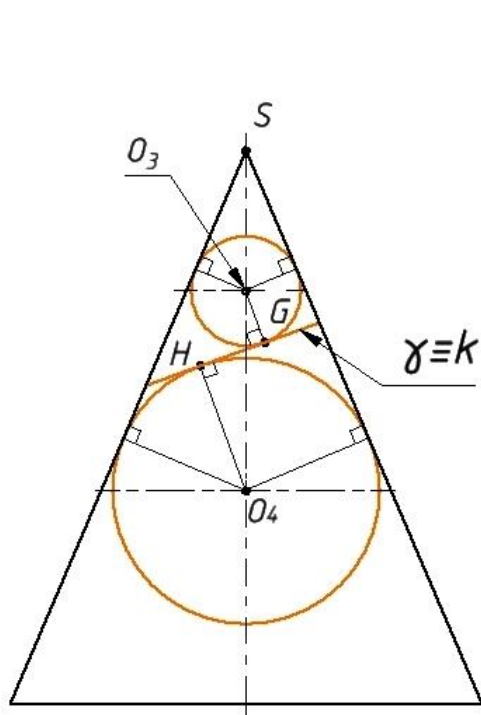


Рис.4. Определение фокусов первого эллипса

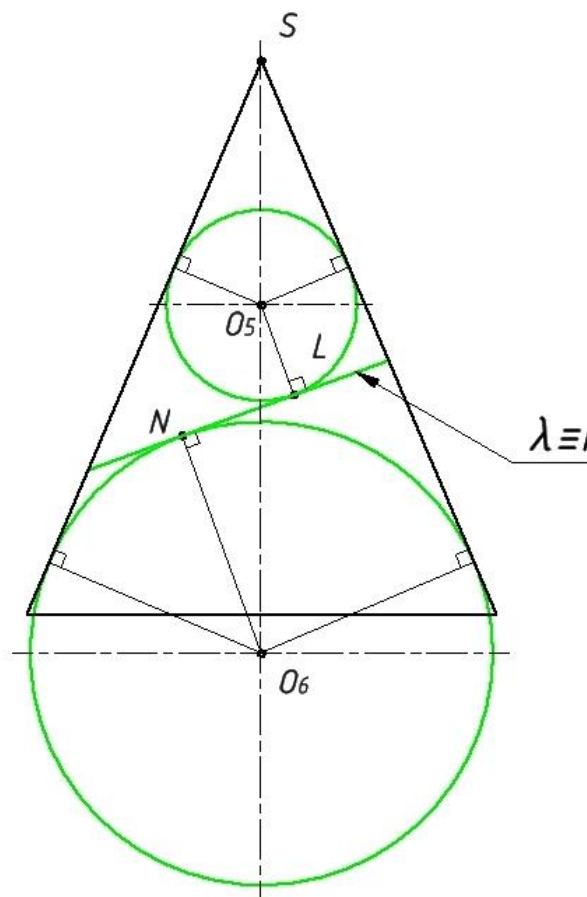


Рис.5. Определение фокусов второго эллипса

Фокусная линия  $f$ , проходящая через фокусы  $H$  и  $N$  эллипсов  $k$  и  $m$ , и фокусная линия  $d$ , проходящая через фокусы  $G$  и  $L$  эллипсов  $k$  и  $m$  пересекаются в вершине  $S$  конической поверхности, т. к. предельное положение секущей плоскости – плоскость, проходящая через вершину конуса, в которой эллипс сечения вырождается в точку –

вершину конуса. И обе сферы Данделена вырождаются в точку, т.к. имеют центр, совпадающий с вершиной конуса и радиус равный 0 (рис. 7).

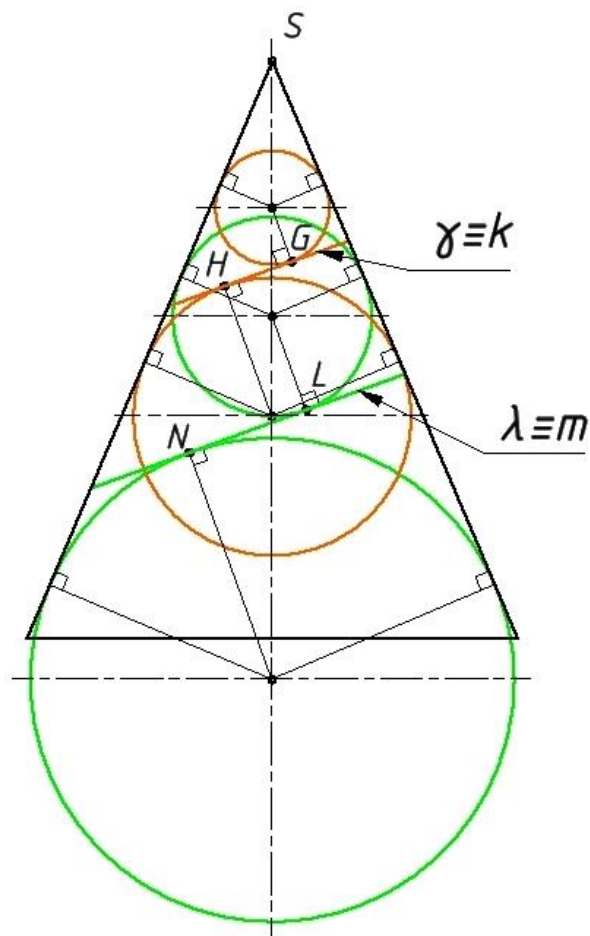


Рис.6. Наложение рисунков 4 и 5

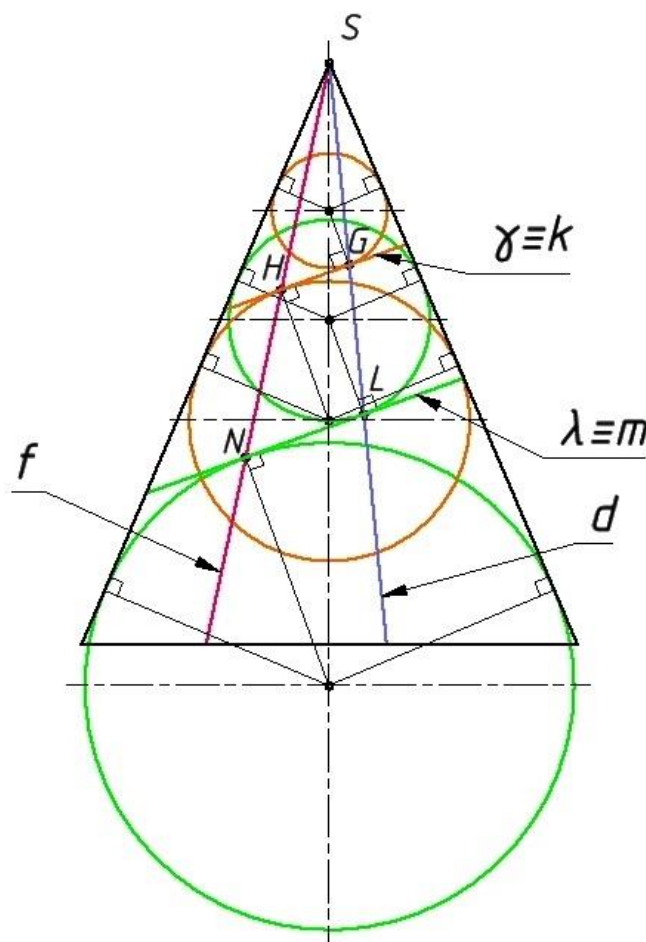


Рис.7. Фокусные линии для семейства эллипсов

3. Секущая плоскость  $\sigma$  расположена под меньшим углом к оси конуса, чем образующая конической поверхности, и пересекает коническую поверхность по гиперболе  $b$ . (рис. 8) [4, 5, 6, 7].

Выполним построения, аналогичные построению эллипса, с учетом того, что коническая поверхность имеет две полости. В результате сечения каждой полости конуса плоскостью  $\sigma$  получается гипербола – кривая, имеющая 2 ветви, в каждой из которых есть фокус. Плоскость  $\sigma$  является проецирующей, поэтому и вся плоскость, и гипербола, ей принадлежащая, спроецировались в одну прямую.

Итак, впишем в обе полости конической поверхности по сфере так, чтобы они были касательными и к плоскости  $\sigma$ . В результате получатся 2 точки касания, что соответствует наличию 2-х фокусов у кривой сечения. Центры сфер, радиусы их и координаты точек касания с секущей плоскостью – точки Т и М – фокусы гиперболы  $b$  определены с высокой точностью с помощью графического пакета Inventor (рис. 8) [4, 5, 6, 7].

Выполним описанную выше последовательность действий для плоскости  $\tau$ , параллельной плоскости  $\sigma$ . Плоскость  $\tau$  пересекает коническую поверхность по гиперболе  $n$ . Фокусами гиперболы  $n$  являются точки  $K$  и  $B$  (рис. 9).

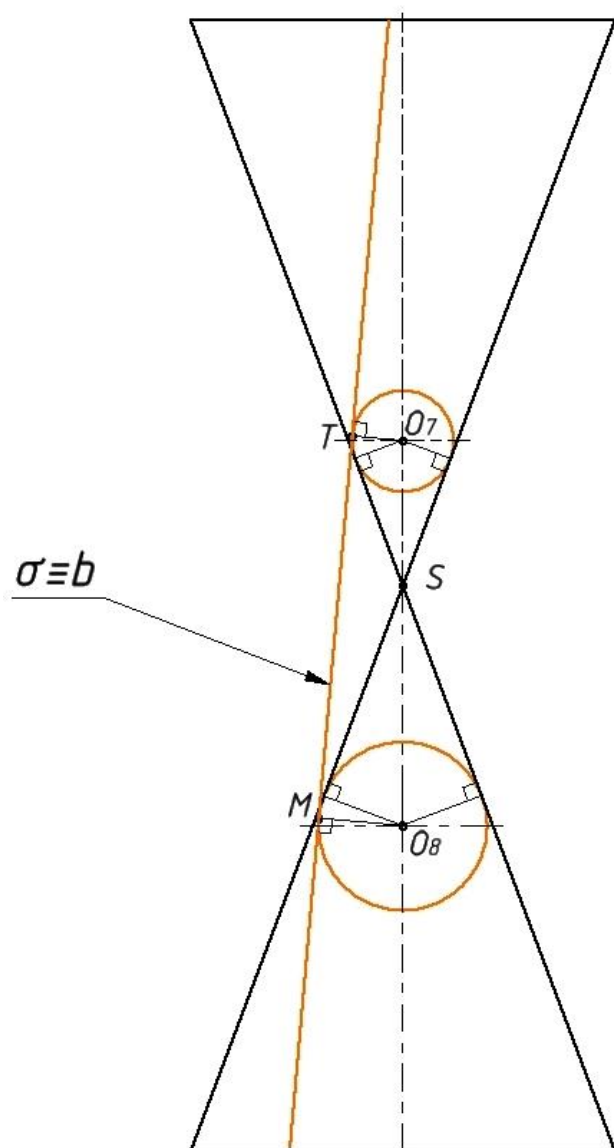


Рис.8. Определение фокусов первой гиперболы

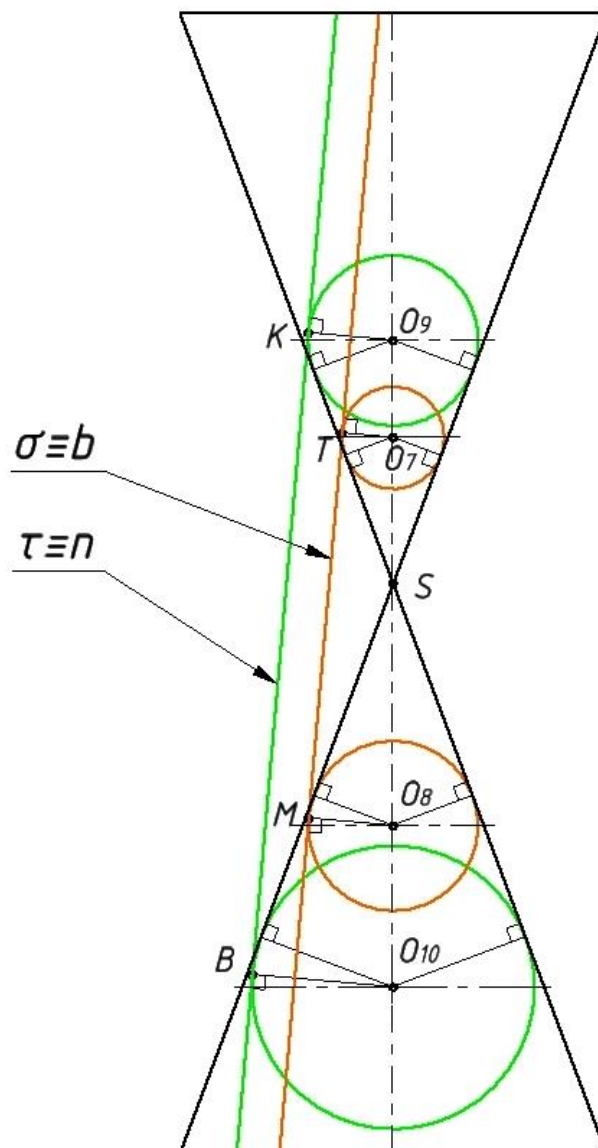


Рис.9. Определение фокусов второй гиперболы

Фокусная линия  $g$ , проходящая через фокусы  $K$  и  $T$  гипербол  $b$  и  $n$ , и фокусная линия  $q$ , проходящая через фокусы  $M$  и  $B$  гипербол  $b$  и  $n$ , пересекаются в вершине  $S$  конической поверхности, т. к. предельное положение секущей плоскости – плоскость, проходящая через вершину конуса, в которой гипербола сечения вырождается в две пересекающиеся образующие конуса – асимптоты гиперболы. И обе сферы Данделена вырождаются в точку, т. к. имеют центр, совпадающий с вершиной конуса и радиус равный 0 (рис. 10).

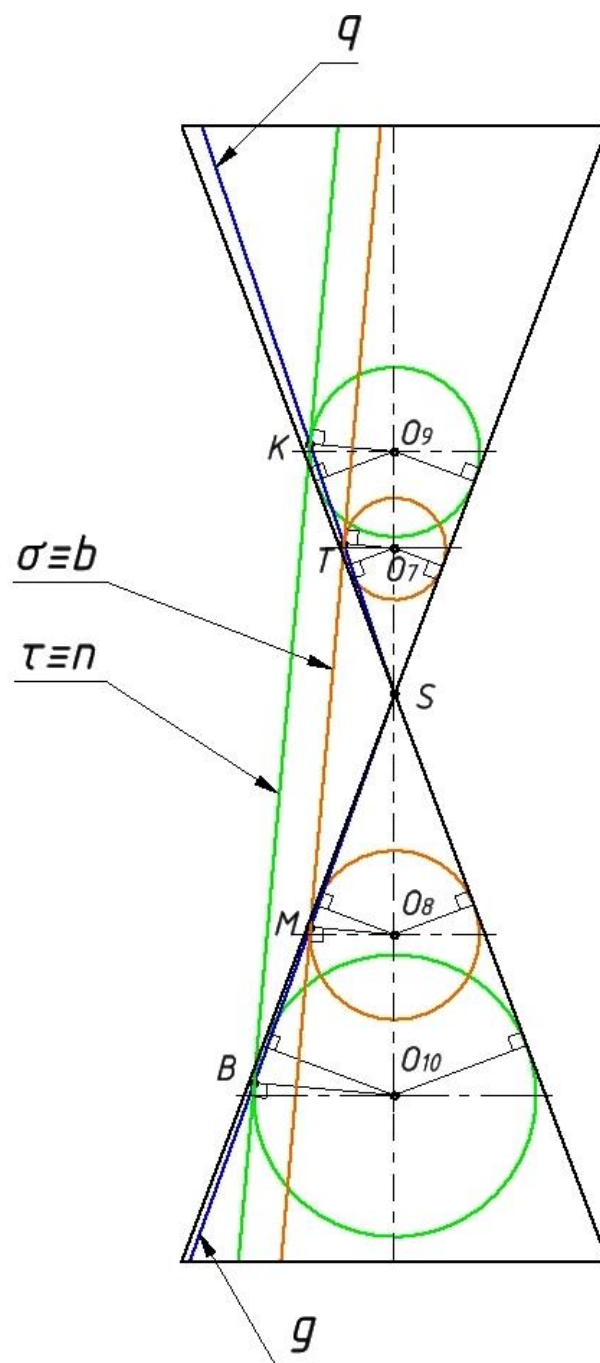


Рис.10. Фокусные линии для семейства гипербол

### Заключение

На основе сделанных построений можно сделать заключение, что фокусные линии, полученные в параллельных конических сечениях, носят линейный характер. Во всех вариациях расположения параллельных плоскостей фокусной линией является прямая, проходящая через вершину конической поверхности. Этот факт может быть использован при построении семейства плоских кривых второго порядка (эллипсов, парабол и гипербол), получаемых при сечениях параллельными плоскостями конической поверхности, сокращая время на построение этих кривых.

## Список литературы

- [1]. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. М.: Наука. 1981. 344 с.
- [2]. Гордон В.О., Семенцов-Огиевский М.А. Курс начертательной геометрии. М.: Высшая школа. 2008. 270 с.
- [3]. Левицкий В.С. Машиностроительное черчение и автоматизация выполнения чертежей: учебник для бакалавров. 8-е изд., перераб. и доп. Серия: Бакалавр. М.: Издательство Юрайт. 2011. 435 с.
- [4]. Нилов Ф.К. Сферы Данделена. Лекция на Малом мехмате МГУ, 2011 г. / Лекция 22 (291) 7.04.2012. Режим доступа: <http://www.geometry.ru/video.htm> (дата обращения 24.07.2015).
- [5]. Хейфец А.Л., Васильева В.Н. Параметризация как метод построения сфер Данделена для произвольных квадрик вращения // IV Международная интернет-конференция «Проблемы качества графической подготовки студентов в техническом вузе: традиции и инновации» КГП-2014 (февраль-март 2014 г.). Режим доступа: <http://dgng.pstu.ru/conf2014/papers/98/> (дата обращения 24.07.2015).
- [6]. Федоренков А.П., Полубинская Л.Г. Autodesk Inventor. Шаг за шагом. М.: Эксмо. 2008. 336 с.
- [7]. Хуснетдинов Т.Р. Начертательная геометрия в моделях // Инженерный вестник. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электронный научно-технический журнал. 2013. №5. С.7-18. Режим доступа: <http://engbul.bmstu.ru/doc/585671.html> (дата обращения 24.07.2015).