электронный научно-технический журнал
ИНЖЕНЕРНЫЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51036. ISSN 2307-0595

Компьютерные технологии в изучении теории рядов Лорана в техническом вузе

10, октябрь 2015

Титов К. В., к.т.н., доцент

УДК: 539.3

[1]Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
kvtito@mail.ru

Введение.

В статье рассматривается на конкретном примере теории рядов Лорана методика встраивания компьютерных технологий [1] в процесс обучения. Встраивание СКМ в лекционные и семинарские занятия [2] повышает уровень усвоения знаний у студентов. В создаваемой таким образом информационной среде, к которой студент уже адаптирован со школьной скамьи при работе на компьютере, с элементами творческой и игровой ситуации, процесс обучения идет гораздо быстрее и эффективнее. У студента создается некое ощущение того, что он находится в виртуальной научной лаборатории и проводит исследования, что очень важно для самоутверждения и, в конечном счете, для повышения КПД обучаемого.

Постановка задачи и её решение.

Рассмотрим разложение в ряд Лорана одного класса функций с бесконечным числом полюсов. К такому классу функций можно отнести

$$\frac{1}{(\cos z)^u}, \quad \frac{1}{(\sin z)^u}, \quad (\tan z)^u, \quad (\cot z)^u$$

(u- целое положительное число) и т.д. Надо сказать, что в той учебно-методической литературе, которая рекомендуется студентам при изучении этого раздела математики, нет таких примеров разложения в ряд Лорана. Возможно, это связано с трудностями при вычислении коэффициентов ряда в аналитическом (символьном) виде. С появлением таких систем компьютерной математики как Mathcad, Maple и др. вычисление коэффициентов ряда Лорана в символьном виде такого класса функций становится возможным [3, 4].

Разложения перечисленных выше функций в ряд Лорана не имеют принципиальных отличий. Поэтому достаточно показать, как это делается, например, для функции

$$f(z) = \frac{1}{\sin z} \tag{1}$$

Эта функция имеет бесконечное число простых полюсов. В области регулярности она представима рядом Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\cdot(z-z_0)^n \tag{2}$$

Также не существенно значение z_0 . Поэтому положим его равным значению одного из полюсов, например: $z_0=0$.

Таким образом, комплексная плоскость будет разбита на множество областей (колец)

$$(\lambda-1)\cdot\pi<|z|<\lambda\cdot\pi \quad , \quad \lambda=1,2,... \tag{3}$$

в каждой из которых функция (1) регулярна и единственным образом представима своим рядом Лорана (2). Например, рассмотрим кольцо со значением

$$\lambda=2 \tag{4}$$

Коэффициенты ряда (2) определяются по формулам

$$C_n=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\cdot\oint_{\gamma}\frac{f(z)\cdot dz}{(z-z_0)^{n+1}} \tag{5}$$

Интегрирование в (5) ведется по любому замкнутому контуру γ, целиком лежащему в кольце (3). Таким образом, в области ограниченной этим контуром, функция (1) в данном примере будет иметь три простых полюса

$$p_1=0,\ \ p_2=-\pi,\ \ \ p_3=\pi \tag{6}$$

По теореме Коши для многосвязной области интеграл в (5) можно заменить суммой трех аналогичных интегралов, но по контурам γ_1, γ_2, γ_3, охватывающим соответствующие полюса (6) в достаточно малой их окрестности.

Рассмотрим каждый из этих интегралов в отдельности

$$I_{n,1}=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\cdot\oint_{\gamma_1}\frac{\varphi_1(z)\cdot dz}{(z-z_0)^{n+2}} \tag{7}$$

где

$$\varphi_1(z)=\frac{z-p_1}{\sin z} \tag{8}$$

Применяя интегральную формулу Коши [5] для функции $\varphi_1(z)$ и ее производных, получим

$$I_{n,1}=0\,,\ \forall n\le-2 \qquad \text{и} \qquad I_{n,1}=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\lim_{z\to p_1}\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}\varphi_1(z)\,,\quad \forall n\ge-1 \tag{9}$$

Введем индекс k=0,1,2,…и заменим n=2k-1, n=2k. Нетрудно вычислить $I_{2k,1}$ в СКМ Maple: все они будут равны нулю. С другой стороны, выражение (9) представляет собой вычет [6] функции $\dfrac{1}{\sin z\cdot(z-p_1)^{n+1}}$ в полюсе p_1 (n+2)–го порядка.

Под знаком следующего интеграла $I_{n,2}$ структурируем [4] функцию

$$\varphi_2(z)=\frac{z-p_2}{\sin z\cdot(z-p_1)^{n+1}} \tag{10}$$

регулярную в области, охватываемой контуром $\gamma 2$. Тогда

$$I_{n,2} = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot i}\cdot\oint_{\gamma_2}\frac{\varphi_2(z)dz}{z-p_2}$$

И его значение, аналогично предыдущему определяется

$$I_{n,2} = \lim_{z\to p_2}\varphi_2(z) \qquad (11)$$

Аналогично

$$I_{n,3} = \lim_{z\to p_3}\varphi_3(z) \qquad (12)$$

где

$$\varphi_3(z) = \frac{z-p_3}{\sin z\cdot(z-p_1)^{n+1}} \qquad (13)$$

Нетрудно вычислить сумму последних двух интегралов (например, в системе компьютерной математики Mathcad)

$$I_{2k-1,2} + I_{2k-1,3} = \frac{-2}{\pi^{2k}}, \quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots \qquad (14)$$

(для $n\neq 2k-1$ эта сумма равна нулю). Выражения (11) и (12) также представляют собой вычеты функции $\frac{1}{\sin z\cdot(z-p_1)^{n+1}}$ в простых полюсах p2 и p3.

С учетом полученных результатов, запишем значения коэффициентов (5)

$$C_{2k-1} = \frac{1}{(2k)!}\cdot\lim_{z\to p_1}\frac{d^{2k}}{dz^{2k}}\frac{z-p_1}{\sin z} - \frac{2}{\pi^{2k}}, \quad k=0,1,\ldots \qquad (15)$$

$$C_{2k-1} = \frac{-2}{\pi^{2k}}, \quad k=-1,-2,\ldots \qquad (15a)$$

и соответствующий кольцу (3) ряд Лорана (см. также [7], т.3, стр. 245)

$$\frac{1}{\sin z} = -2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi^{2k}}{z^{2k+1}} - \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2k)!}\lim_{z\to p_1}\frac{d^{2k}}{dz^{2k}}\frac{z}{\sin z} - \frac{2}{\pi^{2k}}\right]\cdot z^{2k-1} \qquad (16)$$

Для больших значений k вычисление коэффициентов (15) становится затруднительным, но как было сказано ранее, эту проблему можно решить с помощью СКМ Maple. Поэтому в среде Maple была написана достаточно универсальная и вместе с тем обучающая программа, позволяющая находить в любом кольце свой ряд Лорана для указанных выше функций. Текст последней может быть легко модифицирован для работы с другими функциями такого класса, для которых также получены ряды Лорана, приводимые ниже. Ниже приведен текст такой программы для функции (1).

Разложение в кольце в ряд Лорана функций с бесконечным числом полюсов

```
restart;
```

Выбор кольца разложения: `(lambda-1)*Pi<abs(z)<lambda*Pi`

```
lambda:=2:
```

Количество членов разложения

```
N:=10:
```

Предполагаемый максимальный порядок полюса

```
NN:=4:
```

Точка, в окрестности которой производится разложение

```
z0:=0:
```

Количество полюсов в правой части полукруга радиуса

```
(lambda-1)*Pi<r<lambda*Pi
```

без учета z0

```
J:=lambda-1:
```

Другие параметры

```
u:=1:
```

Выберите любую из указанных в заголовке функций, после чего программа будет определять для неё ряд Лорана:

```
f:=(z)->1/(sin(z))^u:
phi:=(z)->f(z)/((z-z0)^(n+1)):
q:=array(0..2*J): p:=array(0..2*J):p[0]:=z[0]:
```

Задание полюсов f(z)

```
for j from 1 to J do
p[2*j-1]:=j*Pi: p[2*j]:=-j*Pi od:
```

Синтез вспомогательной функции psi(z0)<>0

```
B0:=limit(f(z),z=z0):
for n from 1 to NN do psi:=(z)->f(z):
if B0=undefined or B0=infinity or B0=-infinity then psi(z):=f(z)*(z-z0)^n:
q[0]:=n: B0:=limit(psi(z),z=z0):else break fi od:
psi(z):
```

Определение порядка полюса

```
for j from 1 to 2*J do
B:=limit(f(z),z=p[j]):
for n from 1 to NN do
if B=-infinity or B=infinity or B=undefined then B:=limit(f(z)*((z-p[j])^n),z=p[j]):
q[j]:=n:else break fi  od: od:
eval(q):
```

Вычисление коэффициентов ряда Лорана с помощью вычетов

```
for n from -N to N do vp:=0:
for j from 1 to 2*J do `вычет в полюсе p[j]`:
if q[j]-1=0 then vp:=vp+limit(phi(z)*(z-p[j]),z=p[j]) fi: if q[j]>1 then vp:=vp+(1/(q[j]-1)!)*limit(diff(phi(z)*((z-p[j])^q[j]),z$(q[j]-1)),z=p[j]) fi:
od:`вычет в полюсе z0`:
if n=-q[0] then vz0:=limit(psi(z),z=z0) fi:
```

```
    if                          n>-q[0]                          then
vz0:=(1/(n+q[0])!)*limit(diff(psi(z),z$(n+q[0])),z=z0) fi:
    if n<-q[0] then vz0:=0 fi:
    C[n]:=vz0+vp: od: R:=0:
    for n from -N to N do
    if C[n]<>0 then R:=R+C[n]*(z-z0)^n fi od: eval(R);
```

$$\ldots-\frac{2\pi^6}{z^7}-\frac{2\pi^4}{z^5}-\frac{2\pi^2}{z^3}-\frac{1}{z}+\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{\pi^2}\right)z+\left(\frac{7}{360}-\frac{2}{\pi^4}\right)z^3+\left(\frac{31}{15120}-\frac{2}{\pi^6}\right)z^5+\ldots$$

Ряд Лорана в кольце (3) других функций:

$$\frac{1}{\cos z}=\ldots\frac{-\pi^7}{64z^8}-\frac{\pi^5}{16z^6}-\frac{\pi^3}{4z^4}-\frac{\pi}{z^2}+1-\frac{4}{\pi}+\left(\frac{1}{2}-\frac{16}{\pi^3}\right)z^2+\left(\frac{5}{24}-\frac{64}{\pi^5}\right)z^4+\left(\frac{61}{720}-\frac{256}{\pi^7}\right)z^6+\ldots$$

$$\tan z=\ldots-\frac{\pi^6}{32z^7}-\frac{\pi^4}{8z^5}-\frac{\pi^2}{2z^3}-\frac{2}{z}+\left(1-\frac{8}{\pi^2}\right)z+\left(\frac{1}{3}-\frac{32}{\pi^4}\right)z^3+\left(\frac{2}{15}-\frac{128}{\pi^6}\right)z^5+\left(\frac{17}{315}-\frac{512}{\pi^8}\right)z^7+\ldots$$

Следующее разложение в ряд Лорана справедливо в кольце

$$(\lambda-1)2\pi<|z|<\lambda 2\pi,\ \lambda=2:$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\cos(z)}}=\frac{-1}{z}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi^{2\cdot k}\cdot 2^{2\cdot k+1}}{z^{2\cdot k+1}}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left[\sum_{n=\lambda}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{2\cdot k}}\right]\cdot\frac{z^{2\cdot k-1}}{\pi^{2\cdot k}\cdot 2^{2\cdot k-1}}\right].$$

Этот список разложений можно было бы продолжить. Не вдаваясь в подробности, следует отметить, что значения коэффициентов (15) могут быть использованы при вычислении сумм, например, вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{2k}}=\frac{\pi^{2k}}{2}\cdot\left[\frac{1}{(2k)!}\cdot\lim_{z\to 0}\left(\frac{d^{2k}}{dz^{2k}}\frac{z}{\sin z}\right)\right],\text{ при k=5 получим }\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{10}}=\frac{73\cdot\pi^{10}}{6842880}$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2\cdot n-1)^{2\cdot i+1}}=\frac{\pi^{2\cdot i+1}}{4^{i+1}}\cdot\left[\frac{1}{(2\cdot i)!}\cdot\lim_{z\to 0}\left[\frac{d^{2\cdot i}}{dz^{2\cdot i}}\left(\frac{1}{\cos(z)}\right)\right]\right]\ \text{, при i=2}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2\cdot n-1)^5}=\frac{5}{1536}\cdot\pi^5$$

Для сравнения стоит привести результат вычисления той же суммы (мощнейшим ядром символьных вычислений) в Mathcad и увидеть насколько он сложнее.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2\cdot n-1)^5}=\text{hypergeom}\left[\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right),-1\right]$$

Последние вычисления показывают, что в СКМ можно получать далеко не очевидные результаты, которые вне этих инструментов найти было достаточно сложно или просто невозможно. Причём эти результаты иногда имеют отношение к совершенно другим разделам математики, как это было показано выше.

Заключение.

Рассмотренная выше интерактивная обучающая программа может быть также встроена в образовательный процесс и расширяет (насыщает), таким образом, контент электронного ресурса www.bmstu.ru/ps/~kvtitov как инструмента компьютерных технологий в обучении. Работая в среде СКМ в интерактивном режиме, пользователь (им может быть студент или кто-то иной) освобождается от рутинной работы вычислений и сосредотачивается на исследовательской работе или изучении методологии, что очень важно для понимания решаемой им задачи.

Следует ещё раз подчеркнуть, что без СКМ в настоящее время нельзя эффективно вести научные исследования и проектные работы, а также учебный процесс в вузах. Использование этих систем в инженерной, научной и преподавательской работе повышает её эффективность. Особенно велико значение математических систем в образовании в процессе обучения студентов.

Список литературы.

[1]. Титов К.В. Компьютерная математика: Учебное пособие + Доп. мат. [Эл. ресурс]. (Серия: Высшее образование). М.: ИЦ РИОР, НИЦ ИНФРА-М. 2015. 282 с. www.dx.doi.org/10.12737/5954. Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=523231 (Дата обращения: 2.09.2015)

[2]. Константин Викторович Титов / Персональная страница на сайте МГТУ им. Н.Э. Баумана. Режим доступа: http://www.bmstu.ru/ps/~kvtitov/ (Дата обращения: 2.09.2015)

[3]. Дьяконов В.П. Maple 6: учебный курс. СПб.: Питер. 2001. 608 с.

[4]. Титов К.В. Особенности разложения в ряд Лорана мероморфных функций. // Необратимые процессы в природе и технике: Труды Пятой Всероссийской конференции 26 -28 января 2009 г. В 3-х частях. Часть II. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. Центр прикладной физики МГТУ. 2009. 720 с. С. 301-304.

[5]. Ефимов А.В., Демидович Б.П. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа. 6-е изд., стер. Перепечатка третьего издания 1995 г. М.: ООО "Изд. дом Альянс". 2010. 368 с.

[6]. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. 16-е изд., стер. СПб: Ленанд. 2015. 440 с. ISBN 978-5-9710-1423-2

[7]. Смирнов В.И. Курс высшей математики. В 5-ти т. Т. 3. Ч. 2. 9-е изд. М.: Наука. 1974. 672 с.