электронный научно-технический журнал
ИНЖЕНЕРНЫЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51036. ISSN 2307-0595

Методические аспекты теории вычетов при вычислении контурных интегралов

09, сентябрь 2015

Титов К. В., к. т. н., доцент

УДК 539.3

[1]Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
kvtito@mail.ru

Введение.

В статье рассматривается методика использования вычетов при вычислении контурных интегралов и построение интерактивной обучающей модели в виде Maple-листинга, представленного его Word-аналогом. Предлагаемая интерактивная обучающая модель наилучшим образом раскрывает методы и принципы того, как работает математический аппарат, подчеркивая высокий "интеллект" систем символьной математики, объединяющийся с хорошими средствами математического численного моделирования [2]. Всё это способствует повышению фундаментальности математического образования, и отвечает современным европейским стандартам.

Постановка задачи и её решение.

Пусть задана функция $\varphi(\eta)$, аналитичная в односвязной области *D*, ограниченной контуром *Г*, и γ - замкнутый контур в *D*. Запишем интегральную формулу Коши [3] и формулу её производных в области *D*.

$$\varphi^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{\varphi(\eta)}{(\eta-z)^{k+1}}d\eta,\qquad k=0,1,2,\dots\quad z\in D,\quad \gamma\subset D \tag{1}$$

Контур γ охватывает точку *z*. Рассмотрим задачу вычисления контурного интеграла от аналитической всюду в *D* функции $f(\eta)$ за исключением может быть изолированной особой точки *z*. Например, если $f(\eta)$ имеет в *D* простой полюс *z*, то как вычислять интеграл

$$\oint_{\gamma} f(\eta)d\eta \tag{2}$$

Вот тогда возникает задача структурирования:

$$f(\eta)=\frac{\varphi(\eta)}{\eta-z},$$

позволяющая свести вычисление интеграла (2) к (1). В общем случае, когда *z* является полюсом порядка $(m+1)$, структурирование $f(\eta)$ выглядит так

$$f(\eta)=\frac{\varphi(\eta)}{(\eta-z)^{m+1}} \tag{3}$$

и вычисление интеграла (2) по-прежнему сводится к (1), то есть

$$\oint_{\gamma} f(\eta)d\eta=\oint_{\gamma}\frac{\varphi(\eta)d\eta}{(\eta-z)^{m+1}}=\frac{2\pi i}{m!}\cdot\varphi^{(m)}(z), \tag{4}$$

где

$$\varphi^{(m)}(z)=\frac{d^m}{d\eta^m}\varphi(\eta)\Big|_{\eta=z}$$

Надо сказать, что не всегда можно осуществить структурирование f(η) в явном виде (3). Тогда, исходя из (3), функцию $\varphi(\eta)$ следует определять так

$$\varphi(\eta)=(\eta-z)^{m+1}\cdot f(\eta) \tag{5}$$

При этом формула вычисления интеграла (4) остается в силе и будет выглядеть

$$\oint_{\gamma} f(\eta)d\eta=\frac{2\pi i}{m!}\cdot\lim_{\eta\to z}\left\{\frac{d^m}{d\eta^m}\left[(\eta-z)^{m+1}\cdot f(\eta)\right]\right\} \tag{6}$$

Подстановка η=z, которая была в (4), в формуле (6), как в общем случае, заменена вычислением предела при η->z.

Формула (6) представляет собой так называемый вычет [7], а все рассуждения, приведенные выше, – можно рассматривать как его вывод. Вычет используется при вычислении контурных интегралов и записывается в следующем виде

$$res\left[f(\eta),z\right]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(\eta)d\eta=\frac{1}{m!}\lim_{\eta\to z}\left\{\frac{d^m}{d\eta^m}\left[(\eta-z)^{m+1}\cdot f(\eta)\right]\right\} \tag{7}$$

Итак, задача вычисления интеграла (2) решена и сводится к (6) или (7). В связи с этим возникает другая задача вычисления в (6) или (7), как правило, довольно сложного предела. Это в первую очередь относится к мероморфным функциям, каковыми являются тригонометрические функции *csc*(*z*), *sec*(*z*) и другие. Например, теоретически и тем более практически даже с помощью таких инструментов как Mathcad, Maple невозможно определить пределы при n>10

$$\lim_{z\to 0}\left[\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{\sin z}\right)\right] \tag{8}$$

Для вычисления подобных (8) пределов можно предложить метод, который связан с делением многочлена на многочлен [4] и используется ниже на конкретных примерах.

Пусть $f(\eta)$ аналитическая функция в кольце $r<|\eta-z|<R,$ а γ произвольный замкнутый контур, целиком лежащий в этом кольце. Тогда эту функцию в кольце можно разложить в ряд Лорана

$$f(\eta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(\eta-z)^n, \tag{9}$$

где

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\eta)d\eta}{(\eta - z)^{n+1}}. \qquad (10)$$

При этом, как следует из (10), интеграл (2) равен коэффициенту C_{-1} ряда Лорана.

Другой способ вычисления интеграла (2), как было указано ранее, связан с вычетом. Если $f(\eta)$ имеет единственную особую точку $\eta=z$ - полюс порядка p, то для вычисления интеграла (2) структурируем подынтегральную функцию так, как это было описано выше

$$f(\eta) = \frac{\varphi(\eta)}{(\eta - z)^p}, \qquad (11)$$

где $\varphi(\eta)$ аналитичная в круге $|\eta - z| < R,$ в котором раскладывается в ряд Тейлора [5],

$$\varphi(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cdot (\eta - z)^k, \quad \text{где} \quad A_k = \frac{\varphi^{(k)}(z)}{k!} \qquad (12)$$

Следовательно

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(\eta)d\eta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\varphi(\eta)d\eta}{(\eta - z)^p} = \frac{\varphi^{(p-1)}(z)}{(p-1)!}$$

или

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(\eta)d\eta = \frac{1}{(p-1)!} \cdot \lim_{\eta \to z} \left\{ \frac{d^{(p-1)}}{d\eta^{(p-1)}} \left[(\eta - z)^p \cdot f(\eta) \right] \right\} \qquad (13)$$

Если (11) подставить в (10), то получим

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\varphi(\eta)d\eta}{(\eta - z)^{n+p+1}} \qquad (14)$$

На основании изложенного можно сделать следующие выводы:

1) из (14) следует, что ряд Лорана в его главной части будет иметь p слагаемых;
2) если p=0, то ряд Лорана вырождается в ряд Тейлора;
3) коэффициенты ряда Лорана функции $f(\eta)$, аналитической в кольце, связаны с коэффициентами ряда Тейлора функции $\varphi(\eta)$, аналитической в круге, следующим образом
4) $A_s=C_{s-p}$, s=0,1,2,… (15)

Последний вывод следует из того, что, если левую и правую части (12) (ряда Тейлора) умножить на $(\eta\text{-}z)^{-p}$, то мы получим (9) ряд Лорана для $f(\eta)$. И, следовательно, коэффициенты этих рядов связаны соотношением $A_s=C_{s-p}$, s=0,1,2,…Это ещё один способ получения ряда Лорана.

Возможен случай, когда $f(\eta)$ имеет единственную особую точку в круге $|\eta - z| < r,$ не совпадающую с z. Центр кольца разложения в этом случае не будет совмещен с полюсом. Пусть такой точкой будет $\eta=a$, являющаяся полюсом порядка p. Тогда вместо (11) надо записать

$$f(\eta) = \frac{\varphi(\eta)}{(\eta - a)^p} \qquad (16)$$

Функция $\varphi(\eta)$ по-прежнему будет аналитической в круге $|\eta - z| < R$ и раскладываться в ряд Тейлора (12). Однако, согласно теореме Коши для многосвязной области интеграл (2), а теперь это (10), будет равен

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} F(\eta)d\eta = \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{\gamma_z} F(\eta)d\eta + \oint_{\gamma_a} F(\eta)d\eta\right], \tag{17}$$

где γ_a и γ_z - контуры, охватывающие полюсы a и z функции $F(\eta)$, проходимые в положительном направлении. Причём внутри контура γ_a не содержится полюс z, а внутри γ_z - полюс a. Ряд Лорана (9) в этом случае будет иметь коэффициенты

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{\varphi(\eta)d\eta}{(\eta - z)^{n+1}\cdot(\eta - z)^p} = \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{\gamma_z} \frac{\frac{\varphi(\eta)}{(\eta - a)^p}}{(\eta - z)^{n+1}}d\eta + \oint_{\gamma_a} \frac{\frac{\varphi(\eta)}{(\eta - z)^{n+1}}}{(\eta - a)^p}d\eta\right] \tag{18}$$

Каждый из интегралов в правой части (18) вычисляется с помощью вычетов

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_z} \frac{f(\eta)d\eta}{(\eta - z)^{n+1}} = \frac{1}{n!}\cdot\lim_{\eta\to z}\left[\frac{d^n}{d\eta^n} f(\eta)\right], \qquad n\geq 0 \tag{19}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_a} \frac{\frac{\varphi(\eta)}{(\eta - z)^{n+1}}}{(\eta - a)^p}d\eta = \frac{1}{(p-1)!}\lim_{\eta\to a}\left\{\frac{d^{p-1}}{d\eta^{p-1}}\left[\frac{(\eta - a)^p\cdot f(\eta)}{(\eta - z)^{n+1}}\right]\right\}, \quad -\infty < n < +\infty \tag{20}$$

Контурный интеграл (19), очевидно, для всех $n<0$ равен нулю. Для остальных $n\geq 0$ значения (19) представляют коэффициенты ряда Тейлора функции $f(\eta)$, разложенной по степеням $(\eta\text{-}z)^n$. Контурный интеграл (20) определяет коэффициенты главной части ряда Лорана функции $f(\eta)$, разложенной по степеням $(\eta\text{-}z)^n$, и, кроме того, вместе с коэффициентами (19) аддитивно задает коэффициенты правильной части ряда Лорана [4].

Укажем также на вычисление предела в устранимой особой точке мероморфной функции. Пусть задана функция $f(\eta)=csc(\eta)=1/sin(\eta)$, имеющая простой полюс в точке $\eta=z=0$. Здесь невозможно структурирование $f(\eta)$ в явном виде. Поэтому воспользуемся формулой (5) и найдем функцию $\varphi(\eta)$, аналитическую в окрестности точки z

$$\varphi(\eta) = \eta\cdot f(\eta) \tag{21}$$

Точка $\eta=z$ в (21) теперь будет устранимой особой точкой $\lim\limits_{\eta\to z}\varphi(\eta)\neq\infty$, в которой функция $\varphi(\eta)$ принимает конечное значение. Именно от этой функции в (8) необходимо вычислить производную и предел.

Заключение.

Таким образом, весь необходимый алгоритм решения поставленной задачи сформирован. Остается только записать листинг-программу в одной из систем компьютерной математики, например, в среде Maple [6]. Компьютерная листинг-программа, подобная той, которая есть в [4], решения задачи оригинальна и написана так, чтобы её можно было использовать как обучающую. Такой подход позволяет студенту лучше понять работу математического аппарата при его изучении. Рассмотренная интерактивная обучающая листинг-модель может быть также встроена в образовательный процесс и расширяет (насыщает) таким образом контент электронного ресурса www.bmstu.ru/ps/~kvtitov как инструмента компьютерных технологий в обучении. Листинг-модель имеет также практическое значение при решении конкретных задач.

Список литературы

[1]. Титов К.В., Будилович М.В., Дубограй И.В. Построение интерактивной обучающей модели метода решения нормальной однородной системы дифференциальных уравнений n-го порядка. // Инженерный журнал: наука и инновации: Электронное научно-техническое издание. 2014. № 11(35) 11 с. Режим доступа: http://engjournal.ru/catalog/pedagogika/hidden/1306.html (Дата обращения: 2.09.2015) DOI: 10.18698/2308-6033-2014-11-1306

[2]. Титов К.В. Компьютерная математика: Учебное пособие + Доп. мат. [Эл. ресурс]. (Серия: Высшее образование). М.: ИЦ РИОР, НИЦ ИНФРА-М. 2015. 282 с. www.dx.doi.org/10.12737/5954. Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=523231 (Дата обращения: 2.09.2015)

[3]. Ефимов А.В., Демидович Б.П. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа. 6-е изд., стер. Перепечатка третьего издания 1995 г. М.: ООО "Изд. дом Альянс". 2010. 368 с.

[4]. Титов К.В. Особенности разложения в ряд Лорана мероморфных функций. // Необратимые процессы в природе и технике: Труды Пятой Всероссийской конференции 26 -28 января 2009 г. В 3-х частях. Часть II. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. Центр прикладной физики МГТУ. 2009. 720 с. С. 301-304.

[5]. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Уч. пособие. 13-е изд. В 2-х т. Т. 2. М.: Наука. 1985. 560с.

[6]. Дьяконов В.П. Maple 6: учебный курс. СПб.: Питер. 2001. 608 с.

[7]. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. 16-е изд., стер. СПб: Ленанд. 2015. 440 с. ISBN 978-5-9710-1423-2

[8]. Fabrice Bellard. Computation of 2700 billion decimal digits of Pi using a Desktop Computer. Feb 11, 2010. (4th revision). Режим доступа: http://www.indabook.org/preview/r9aqEXDUM3iq-AxO68lQHpNHBh_68TeSlkKpf8mu5yk,/Computation-of-2700-billion-decimal-digits-of-Pi.html?query=What-is-2-Pi (Дата обращения: 2.09.2015)

[9]. Chudnovsky D.V. and Chudnovsky G.V. Approximations and complex multiplication according to Ramanujan. In Ramanujan Revsited, Academic Press Inc., Boston. 1998. P. 375-396 & P. 468-472.