

О некоторых примерах для иллюстрации метода Радона

13, сентября 2015

Чадов В. Б.

УДК 372.851

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

e.shishowa2013@yandex.ru

Введение

Многие проблемы естествознания и техники (астрофизики, физики плазмы, сейсмологии, медицины и т.п.) сводятся [1], [2] к решению обратных задач. Напомним, в чем разница между прямыми и обратными задачами. Например, пусть дано обыкновенное дифференциальное уравнение и дополнительные условия (начальные или краевые). Требуется найти решение такой задачи. Это прямая задача.

Внесем некоторые изменения. Пусть тот же тип уравнения и тот же вид условий. Но некоторые параметры, входящие в уравнение или в условия неизвестны. Зато известно решение. Требуется найти соответствующие значения параметров. Это – обратная задача. Например, когда по результатам рентгеновского или ультразвукового просвечивания с различных направлений некоторого тела требуется представить структуру внутренности этого тела.

В варианте математической постановки - это восстановление значения функции по известным значениям интегралов от этой функции, вычисленным по элементам некоторого множества поверхностей, т.е. сама функция неизвестна, известно лишь множество линейных или поверхностных интегралов от этой функции, полученных в результате экспериментов.

Восстановление искомой функции можно начинать с нахождения значений функции в точках некоторой сетки с последующей аналитической аппроксимацией дискретного результата.

Не касаясь всех аспектов проблемы, остановимся на самом элементарном, т.е. на нахождении значения искомой функции в конкретной заданной точке. Эта задача была решена в 1917 г. австрийским математиком И. Радонем для случая интегрирования по прямым линиям на плоскости. К настоящему времени преобразование Радона разработано для пространств любой конечной размерности и предполагает интегрирование не только по гиперплоскостям.

Для простоты обратимся к случаю функций двух действительных переменных, исследованному И. Радонем.

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на координатной плоскости. Уравнения прямых, вдоль которых должны вычисляться интегралы, запишем в виде нормального уравнения прямой на плоскости

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0, \quad (1)$$

где p — величина перпендикуляра, проведенного из точки $(0,0)$ на прямую, φ — угол, образованный этим перпендикуляром с осью абсцисс. Обозначим через z переменную вдоль искомой прямой, а через p — переменную вдоль соответствующего перпендикуляра. Тогда

$$x = p \cos \varphi - z \sin \varphi, y = p \sin \varphi + z \cos \varphi. \quad (2)$$

Введем функцию $F(p, \varphi)$ как интеграл вдоль прямой (1):

$$F(p, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p \cos \varphi - z \sin \varphi, p \sin \varphi + z \cos \varphi) dz, \quad (3)$$

Пусть этот интеграл сходится. Тогда функцию $F(p, \varphi)$ будем называть прямым преобразованием Радона функции $f(x, y)$.

Если ввести преобразование Фурье для прямого преобразования Радона

$$\tilde{R}(\omega, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega q \varphi) F(q, \varphi) dq, \quad (4)$$

то формулу обратного преобразования Радона можно представить в виде

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \exp\{i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)\} \tilde{R}(q, \varphi) q dq d\varphi \quad (5)$$

Можно доказать [4], что двумерное преобразование Фурье является композицией преобразования Радона на плоскости и одномерного преобразования Фурье. Существуют обобщения преобразования Радона для n -мерного пространства.

Преобразование Радона очень мало представлено в учебной литературе. Числовые примеры, иллюстрирующие применение этого метода, практически отсутствуют.

Для лучшего восприятия примера желательна максимальная прозрачность всех этапов решения. Поскольку подробные вычисления по приведенным выше формулам требуют много времени, то в условиях ограниченного времени аудиторного занятия целесообразно использовать наиболее простые и не требующие много времени на вычисления примеры, наглядно иллюстрирующие метод.

Рассмотрим преобразование Радона, не используя преобразование Фурье.

1. Нахождение функции точки на плоскости по значениям интегралов вдоль прямых

Пусть $f(x, y)$ — некоторая вещественная функция, определенная во всех вещественных точках $P = (x, y)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

- а) $f(x, y)$ — непрерывна на всей плоскости;
- б) двойной интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad (6)$$

взятый по всей плоскости, сходится;

- в) если для произвольной точки $P(x, y)$ и любого $r > 0$

$$f_p(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} f(x + r \cos \varphi, y + r \sin \varphi) d\varphi, \quad (7)$$

то для каждой точки $P(x, y)$ выполняется условие

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f_p(r) = 0 \quad (8)$$

Рассмотрим простой случай. Пусть интеграл F от $f(x, y)$ по прямой, задаваемой уравнением

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = p \quad (9)$$

$$F(p, \varphi) = F(-p, \varphi + \pi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p \cos \varphi - z \sin \varphi, p \sin \varphi + z \cos \varphi) dz \quad (10)$$

существует на всех касательных к произвольной окружности с центром в точке P . Соотношение (10) определяет прямое преобразование Радона.

В [3] доказывается справедливость следующих утверждений.

Утверждение 1. Если проинтегрировать по φ функцию $F(p, \varphi)$, полученную в (10), т.е.

$$F_p^*(q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x \cos \varphi + y \sin \varphi + q, \varphi) d\varphi, \quad (11)$$

то этот интеграл сходится абсолютно для всех P и q .

Утверждение 2. Значение функции $f(P)$ однозначно определяется функцией $F_p^*(q)$ и может быть вычислено следующим образом

$$f(P) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dF_p^*(q)}{q} \quad (12)$$

С использованием соотношений (11) и (12) осуществляется обратное преобразование Радона.

В [3] доказывается, что преобразование Радона перестановочно с движениями евклидовой плоскости. Таким образом для упрощения решения точка P может быть перемещена в точку $(0,0)$. Таким образом достаточно решать задачу восстановления значения для точки $(0,0)$.

2. Некоторые примеры, иллюстрирующие применение преобразования Радона

Рассмотрим на простых примерах технику получения результата по приведенному выше алгоритму метода Радона. Будем использовать функции, значения которых в точке $(0,0)$ могут быть получены заранее. Наиболее удобными являются функции, задающие поверхности вращения с осями вращения, совпадающими с осью OZ .

Пример 1. Выберем функцию $f(x, y)$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x^2 + y^2 \leq a^2 \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 > a^2 \end{cases} \quad (13)$$

Функция удовлетворяет требованиям а), б), в). Интегралы вдоль прямых (в силу симметрии) можно представить в виде

$$F(p, \varphi) = \begin{cases} 2\sqrt{a^2 - p^2}, & \text{если } p \leq a, \\ 0, & \text{если } p > a \end{cases}, \quad (14)$$

Такой же результат получается из геометрических соображений как площадь прямоугольника.

Предположим, что функция $f(x, y)$ неизвестна, а известна только функция $F(p, \varphi)$. Требуется найти значение неизвестной функции в точке $(0, 0)$.

Решение. Тогда результат интегрирования по формуле (11) при $q \leq a$ можно записать в виде

$$F^*(q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\sqrt{a^2 - q^2} d\varphi = 2\sqrt{a^2 - q^2} \quad (15)$$

где q - радиус окружности, касательной к прямой (4). При $q > a$ $F^*(q) = 0$. По формуле (12) при $r \leq a$, r – переменная интегрирования окончательно получаем

$$f(0, 0) = -\frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{2d(\sqrt{a^2 - r^2})}{r} = +\frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \frac{a}{a} = 1 \quad (16)$$

Таким образом, полученное по методу Радона значение точно совпадает с известным из условия значением функции.

Пример 2. Выберем функцию в виде

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2, & \text{если } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 > 1 \end{cases} \quad (17)$$

Интегралы вдоль прямых при $p \leq 1$ примут вид

$$F(p, \varphi) = \int_{-\sqrt{1-p^2}}^{\sqrt{1-p^2}} (1 - p^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} (1 - p^2)^{\frac{3}{2}}, \quad (18)$$

где p - параметр прямой, по которой производится интегрирование. При $p > 1$ $F(p, \varphi) = 0$.

По данным интегралов требуется найти значение функции в точке $(0, 0)$.

Решение. По формуле (11) значение

$$F^*(q) = \frac{4}{3} (1 - q^2)^{\frac{3}{2}} \quad (19)$$

Тогда по формуле (12) из [5] получаем

$$f(0, 0) = -\frac{4}{3\pi} \int_0^1 \frac{3(-2q)\sqrt{1-q^2}}{2q} dq = \frac{2}{\pi} (q\sqrt{1-q^2} + \sin^{-1} q) \Big|_0^1 = 1. \quad (20)$$

Сравнивая полученный результат со значением искомой функции, снова получаем точное совпадение.

Пример 3. Пусть функция задана в виде

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2}, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 > 1 \end{cases} \quad (21)$$

Интегралы вдоль прямых с учетом [5] примут вид

$$F(p, \varphi) = \int_{-\sqrt{1-p^2}}^{\sqrt{1-p^2}} \sqrt{1 - p^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{1 - p^2 - x^2} + (1 - p^2) \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{1-p^2}} \right) \Big|_{-\sqrt{1-p^2}}^{\sqrt{1-p^2}} = \frac{\pi}{2} (1 - p^2) \quad (22)$$

Такое же выражение можно получить и из геометрических соображений как формулу для вычисления площади полукруга. Снова предположим, что известны только (22), а (21) неизвестна. Требуется найти значение неизвестной функции в точке (0,0).

Решение. Тогда по формуле (11) получаем

$$F^*(q) = \frac{\pi}{2} (1 - q^2) \frac{1}{2\pi} 2\pi = \frac{\pi}{2} (1 - q^2) \quad (23)$$

По формуле (12) окончательно имеем

$$f(0,0) = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\pi}{2} \frac{d(1-q^2)}{q} = -\frac{1}{2} \int_0^1 (-2) dq = 1 \quad (24)$$

Сравнивая полученный результат (24) и значение (21) в точке (0,0), получаем их равенство.

Заключение

Использование функций с точечной симметрией существенно упрощает расчеты, поскольку вычисления по формуле (11) сводятся к табличным интегралам.

Из приведенных примеров можно заключить, что метод Радона позволяет получить точное совпадение результатов вычислений с заданными значениями функции.

Приведенные примеры достаточно наглядны и не требуют много времени для их изложения, что очень важно при жестких рамках аудиторных занятий.

Список литературы

- [1].Арсенин В.Я. Задачи вычислительной диагностики в медицине. / Сборник: Некорректные задачи естествознания. М.: Изд-во МГУ. 1987. С.171-184
- [2].Грузман И.С. Математические задачи компьютерной томографии. // Соросовский образовательный журнал. 2001. № 5. С. 117-121.
- [3].Хелгасон С. Преобразование Радона. / Пер. с англ. А.Г. Сергеева, под ред. Б.И. Завьялова с предисловием В.С. Владимирова. М.: Мир. 1983. 148 с. [Helgason S. The Radon transform. Birkhäuser. 1980. 192 p.]
- [4].Мешков В.З., Астахов А.Т. Преобразование Радона. / Ред. Тихомирова О.А. Воронеж: Изд-во ВГУ. 2005. 16 с.
- [5].Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. 10-е изд., стер. М.: Наука. 1964. 608 с.