

Уравнения связи и решение обратной задачи о положениях для плоских механизмов параллельной структуры произвольной геометрии

09, сентябрь 2015

Ларюшкин П. А.^{1,*}, Епанчинцева Д. С.¹

УДК: 621.865.8

¹Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
[*publications-rk3@yandex.ru](mailto:publications-rk3@yandex.ru)

Введение

Механизмы (манипуляторы) параллельной структуры – это динамично развивающийся класс манипуляционных механизмов, обладающий рядом преимуществ над классическими манипуляторами с последовательной кинематической структурой. Среди их основных достоинств, как правило, отмечают жесткость конструкции, малую массу подвижных частей и, следовательно, малую инерцию, высокую точность позиционирования и скорость работы. Исследование таких манипуляторов является актуальной задачей в современной науке о механизмах.

Отдельного рассмотрения заслуживают механизмы, обеспечивающие движение в плоскости и обладающие тремя степенями свободы: двумя поступательными и одной вращательной, и которые принято называть просто «плоскими». Помимо коммерческого применения, плоские манипуляторы параллельной структуры имеют важное значение в изучении особенностей параллельной кинематики в целом. Кроме того, эти механизмы очень часто используются в образовательном процессе при подготовке будущих специалистов в области параллельных манипуляторов, т.к. являются самыми простыми представителями данного класса механизмов, но в то же время позволяют изучать все особенности, связанные с параллельной структурой, такие как существенная ограниченность рабочей зоны, наличие особых положений (т.н. сингулярностей) и т.д.

В подавляющем большинстве работ, в которых анализируются плоские механизмы, их структура ограничена определенными геометрическими рамками. Так, например [1-5], начало координат зачастую задают в месте расположения первой (закрепленной на неподвижном основании) кинематической пары одной из кинематических цепей (которых, как правило, три), а сами первые пары цепей расположены на вершинах правильного треугольника. При этом форма подвижной платформы тоже, в большинстве случаев, принимается в виде правильного треугольника. Несмотря на то, что такая геометрия оптимальна с точки зрения площади рабочего пространства, в некоторых случаях может потребовать-

ся, например, расположить все приводные пары компактно или на одной линии. В настоящей статье рассматривается структура, выводятся уравнения связи и решается обратная задача о положениях для плоских манипуляторов параллельной структуры без геометрических ограничений на расположение первых пар кинематических цепей и форму подвижной платформы. Кроме того, все используемые в работе зависимости предполагают свободный выбор начала координат. Данный подход позволяет не только в некотором роде обобщить уравнения связи и их решения для плоских манипуляторов произвольной геометрии, но и получить одинаковые по виду уравнения для всех кинематических цепей механизма.

В данной работе будут рассмотрены три наиболее распространенных схемы плоских параллельных механизмов: $3\text{-}\underline{R}RR$, $3\text{-}R\underline{R}R$ и $3\text{-}R\underline{P}R$. Здесь цифра 3 обозначает количество кинематических цепей, буквы R и P – вращательную или призматическую (поступательную) кинематическую пару, соответственно. Пара, выделенная подчеркиванием, является приводной в кинематической цепи, а остальные две – пассивными. При этом стоит отметить, что число кинематических цепей, вообще говоря, может быть выбрано произвольным, и рассматриваемые в статье уравнения одинаково применимы как для $2\text{-}\underline{R}RR$ SCARA-подобных механизмов, так и для манипуляторов с резервированием степеней свободы.

1. $3\text{-}\underline{R}RR$ механизм

Схема плоского манипулятора параллельной структуры $3\text{-}\underline{R}RR$ представлена на рис. 1.

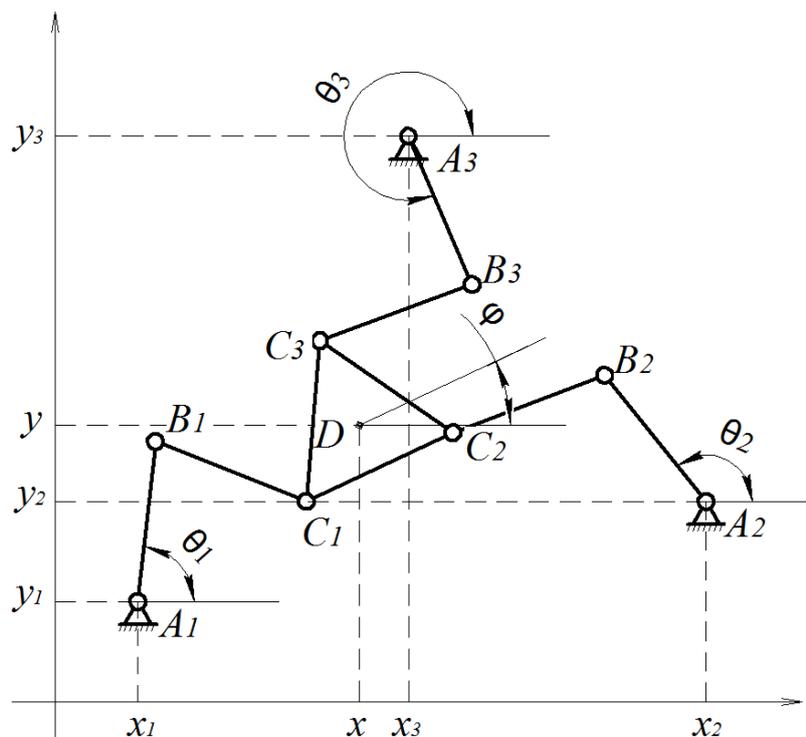


Рис. 1. Схема плоского $3\text{-}\underline{R}RR$ манипулятора

Данный механизм состоит из трех цепей, содержащих по три вращательных кинематических пары A_i, B_i, C_i ($i=1,2,3$). Оси вращения всех пар параллельны друг другу и перпендикулярны плоскости, в которой движется механизм. Вращательные пары A_i закреплены на неподвижном основании и их положение задается координатами x_i, y_i в неподвижной прямоугольной системе координат. Положение выходного звена механизма задается положением точки D и описывается координатами x и y , а также углом поворота φ этого звена относительно некоторого начального положения (рис. 2). Перемещение выходного звена осуществляется за счет вращения приводных (входных) пар A_i . Углы поворота θ_i этих пар являются обобщенными координатами для данного механизма.

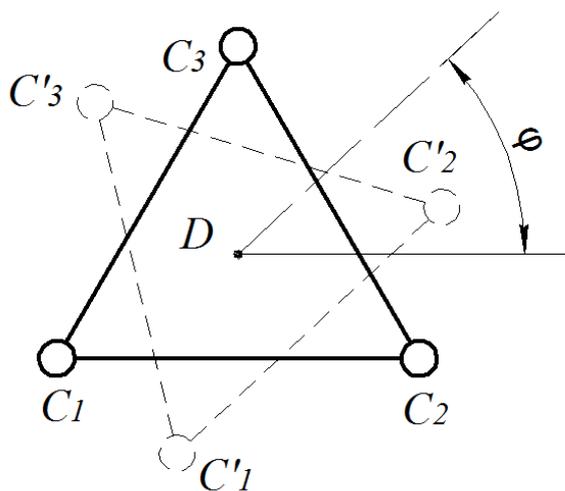


Рис. 2. Угол поворота φ выходного звена плоского манипулятора

Геометрия выходного звена, т.е. взаимное расположение точек C_1, C_2, C_3 и D , задается углами γ_i , а также расстояниями C_iD (рис. 3). При этом, как видно, форма выходного звена не ограничена геометрией правильного треугольника.

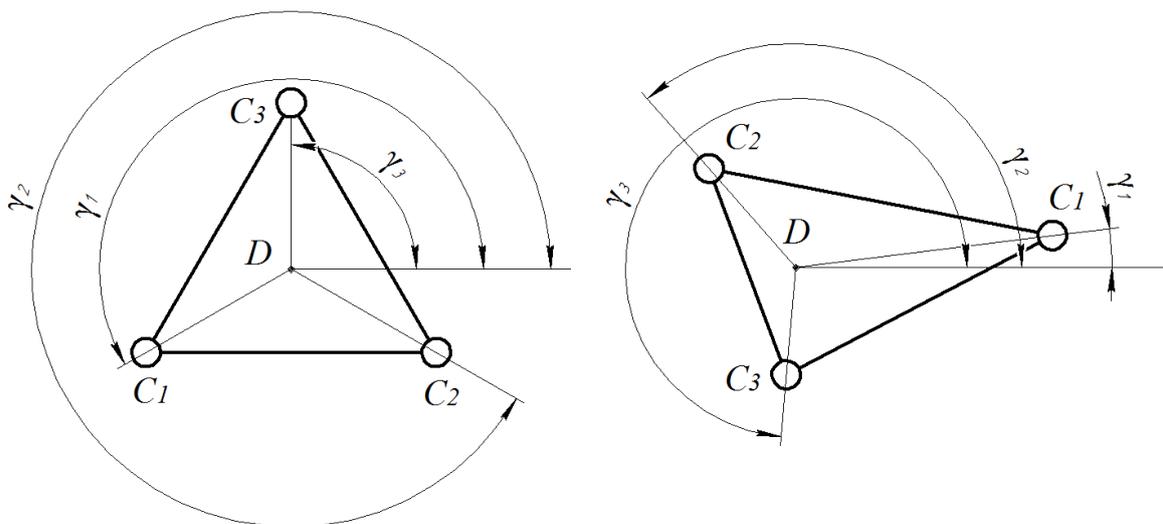


Рис. 3. Примеры геометрии выходного звена плоского манипулятора

Необходимо отметить, что все углы θ_i , γ_i и φ откладываются в направлении против часовой стрелки от осей, параллельных горизонтальной оси неподвижной прямоугольной системы координат. При этом сама система координат и ее начало задаются произвольно. Для анализа механизма необходимо получить уравнения связи между координатами выходного звена x , y , φ и обобщенными координатами – углами поворота θ_i входных пар. Рассмотрим одну кинематическую цепь (рис.4).

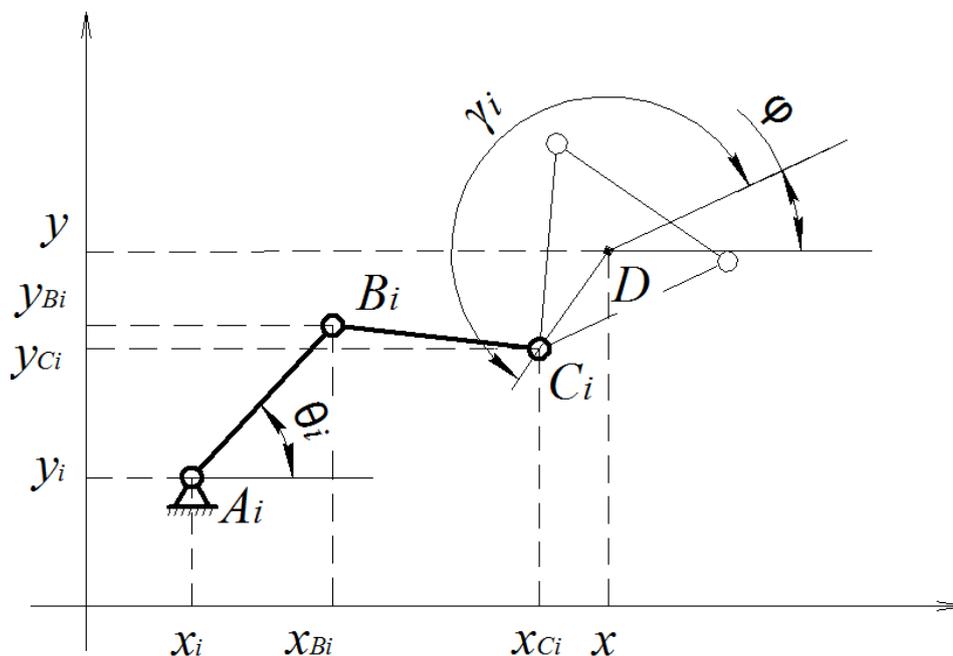


Рис. 4. Расчетная схема кинематической цепи плоского 3-RRR манипулятора

Обозначим $A_iB_i=l_{1,i}$, $B_iC_i=l_{2,i}$, $C_iD=l_{3,i}$. Тогда для любой кинематической цепи положение точки B_i может быть определено следующим образом

$$\begin{aligned} x_{B_i} &= x_i + l_{1,i} \cos \theta_i, \\ y_{B_i} &= y_i + l_{1,i} \sin \theta_i. \end{aligned} \quad (1)$$

Координата точки C_i определяется из уравнений

$$\begin{aligned} x_{C_i} &= x + l_{3,i} \cos(\gamma_i + \varphi), \\ y_{C_i} &= y + l_{3,i} \sin(\gamma_i + \varphi). \end{aligned} \quad (2)$$

Расстояние между точками B_i и C_i постоянно, поэтому

$$(x_{C_i} - x_{B_i})^2 + (y_{C_i} - y_{B_i})^2 = l_{2,i}^2. \quad (3)$$

Подставляя (1) и (2) в (3), получаем общий вид уравнений связи для данного механизма:

$$(x + l_{3,i} \cos(\gamma_i + \varphi) - x_i - l_{1,i} \cos \theta_i)^2 + (y + l_{3,i} \sin(\gamma_i + \varphi) - y_i - l_{1,i} \sin \theta_i)^2 - l_{2,i}^2 = 0. \quad (4)$$

Количество уравнений (4) равно числу кинематических цепей механизма. Для плоского 3-RRR манипулятора таких уравнений будет три.

Для кинематических цепей рассматриваемой структуры возможно аналитическое решение обратной задачи о положениях. Иными словами, из уравнения (4) можно явным образом выразить θ_i .

Обозначим

$$\begin{aligned} [\Pi] &= x + l_{3,i} \cos(\gamma_i + \varphi) - x_i - l_{1,i} \cos \theta_i, \\ [\text{III}] &= y + l_{3,i} \sin(\gamma_i + \varphi) - y_i - l_{1,i} \sin \theta_i. \end{aligned}$$

Тогда (4) запишется в виде

$$[\Pi]^2 + [\text{III}]^2 - l_{2,i}^2 = 0.$$

Раскрывая $[\Pi]^2$, получаем

$$\begin{aligned} [\Pi]^2 &= x^2 + xl_{3,i} \cos(\gamma_i + \varphi) - xx_i - xl_{1,i} \cos \theta_i + xl_{3,i} \cos(\gamma_i + \varphi) + l_{3,i}^2 \cos^2(\gamma_i + \varphi) - \\ &- x_i l_{3,i} \cos(\gamma_i + \varphi) - l_{1,i} l_{3,i} \cos(\gamma_i + \varphi) \cos \theta_i - xx_i - x_i l_{3,i} \cos(\gamma_i + \varphi) + x_i^2 + x_i l_{1,i} \cos \theta_i - \\ &- xl_{1,i} \cos \theta_i - l_{1,i} l_{3,i} \cos(\gamma_i + \varphi) \cos \theta_i + x_i l_{1,i} \cos \theta_i + l_{1,i}^2 \cos^2 \theta_i. \end{aligned}$$

Далее сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$\begin{aligned} [\Pi]^2 &= \cos \theta_i \left[-xl_{1,i} - l_{1,i} l_{3,i} \cos(\gamma_i + \varphi) + x_i l_{1,i} - xl_{1,i} - l_{1,i} l_{3,i} \cos(\gamma_i + \varphi) + x_i l_{1,i} \right] + \\ &+ l_{1,i}^2 \cos^2 \theta_i + \left[x^2 + xl_{3,i} \cos(\gamma_i + \varphi) - xx_i + xl_{3,i} \cos(\gamma_i + \varphi) + l_{3,i}^2 \cos^2(\gamma_i + \varphi) - \right. \\ &\left. - x_i l_{3,i} \cos(\gamma_i + \varphi) - xx_i - x_i l_{3,i} \cos(\gamma_i + \varphi) + x_i^2 \right]. \end{aligned}$$

Приведя подобные слагаемые, получим

$$\begin{aligned} [\Pi]^2 &= l_{1,i}^2 \cos^2 \theta_i + 2 \cos \theta_i \left[x_i l_{1,i} - xl_{1,i} - l_{1,i} l_{3,i} \cos(\gamma_i + \varphi) \right] + \\ &+ \left[x^2 + 2xl_{3,i} \cos(\gamma_i + \varphi) - 2xx_i + l_{3,i}^2 \cos^2(\gamma_i + \varphi) - 2x_i l_{3,i} \cos(\gamma_i + \varphi) + x_i^2 \right]. \end{aligned}$$

Обозначим квадратные скобки

$$\begin{aligned} [a_{i,\cos}] &= 2 \left[x_i l_{1,i} - xl_{1,i} - l_{1,i} l_{3,i} \cos(\gamma_i + \varphi) \right], \\ [b_{i,\cos}] &= \left[x^2 + 2xl_{3,i} \cos(\gamma_i + \varphi) - 2xx_i + l_{3,i}^2 \cos^2(\gamma_i + \varphi) - 2x_i l_{3,i} \cos(\gamma_i + \varphi) + x_i^2 \right]. \end{aligned}$$

Тогда

$$[\Pi]^2 = l_{1,i}^2 \cos^2 \theta_i + [a_{i,\cos}] \cos \theta_i + [b_{i,\cos}].$$

Аналогичным образом можно записать

$$[\text{III}]^2 = l_{1,i}^2 \sin^2 \theta_i + [a_{i,\sin}] \sin \theta_i + [b_{i,\sin}],$$

где

$$\begin{aligned} [a_{i,\sin}] &= 2 \left[y_i l_{1,i} - yl_{1,i} - l_{1,i} l_{3,i} \sin(\gamma_i + \varphi) \right], \\ [b_{i,\sin}] &= \left[y^2 + 2yl_{3,i} \sin(\gamma_i + \varphi) - 2yy_i + l_{3,i}^2 \sin^2(\gamma_i + \varphi) - 2y_i l_{3,i} \sin(\gamma_i + \varphi) + y_i^2 \right]. \end{aligned}$$

Тогда уравнение (4) может быть записано следующим образом:

$$l_{1,i}^2 \cos^2 \theta_i + [a_{i,\cos}] \cos \theta_i + [b_{i,\cos}] + l_{1,i}^2 \sin^2 \theta_i + [a_{i,\sin}] \sin \theta_i + [b_{i,\sin}] - l_{2,i}^2 = 0.$$

Откуда получаем

$$[a_{i,\sin}] \sin \theta_i + [a_{i,\cos}] \cos \theta_i + [b_{i,\cos}] + [b_{i,\sin}] + l_{1,i}^2 - l_{2,i}^2 = 0. \quad (5)$$

Выражение $[a_{i,\sin}] \sin \theta_i + [a_{i,\cos}] \cos \theta_i$ можно преобразовать следующим образом (по формуле сложения гармонических колебаний):

$$[a_{i,\sin}] \sin \theta_i + [a_{i,\cos}] \cos \theta_i = \sqrt{[a_{i,\sin}]^2 + [a_{i,\cos}]^2} \sin(\theta_i + \phi),$$

где дополнительный угол ϕ определяется из системы уравнений

$$\begin{cases} \sin \phi = \frac{[a_{i,\cos}]}{\sqrt{[a_{i,\sin}]^2 + [a_{i,\cos}]^2}}, \\ \cos \phi = \frac{[a_{i,\sin}]}{\sqrt{[a_{i,\sin}]^2 + [a_{i,\cos}]^2}}. \end{cases}$$

Тогда из (5) получим

$$\sin(\theta_i + \phi) = \frac{l_{2,i}^2 - l_{1,i}^2 - [b_{i,\cos}] - [b_{i,\sin}]}{\sqrt{[a_{i,\sin}]^2 + [a_{i,\cos}]^2}}. \quad (6)$$

Уравнение (6) имеет два решения:

$$\begin{aligned} \theta_{i,1} &= \arcsin \left(\frac{l_{2,i}^2 - l_{1,i}^2 - [b_{i,\cos}] - [b_{i,\sin}]}{\sqrt{[a_{i,\sin}]^2 + [a_{i,\cos}]^2}} \right) - \phi, \\ \theta_{i,2} &= \pi - \arcsin \left(\frac{l_{2,i}^2 - l_{1,i}^2 - [b_{i,\cos}] - [b_{i,\sin}]}{\sqrt{[a_{i,\sin}]^2 + [a_{i,\cos}]^2}} \right) - \phi. \end{aligned} \quad (7)$$

Обратная задача о положениях данного механизма решается вычислением по формуле (7) углов θ_i для каждой кинематической цепи, соответствующих положению выходного звена, которое задается координатами x , y , ϕ .

Таким образом, в общем случае для любого несингулярного положения имеется два решения обратной задачи о положениях (рис. 5). Для механизма с тремя кинематическими цепями число решений и соответствующих им конфигураций промежуточных звеньев будет равно восьми.

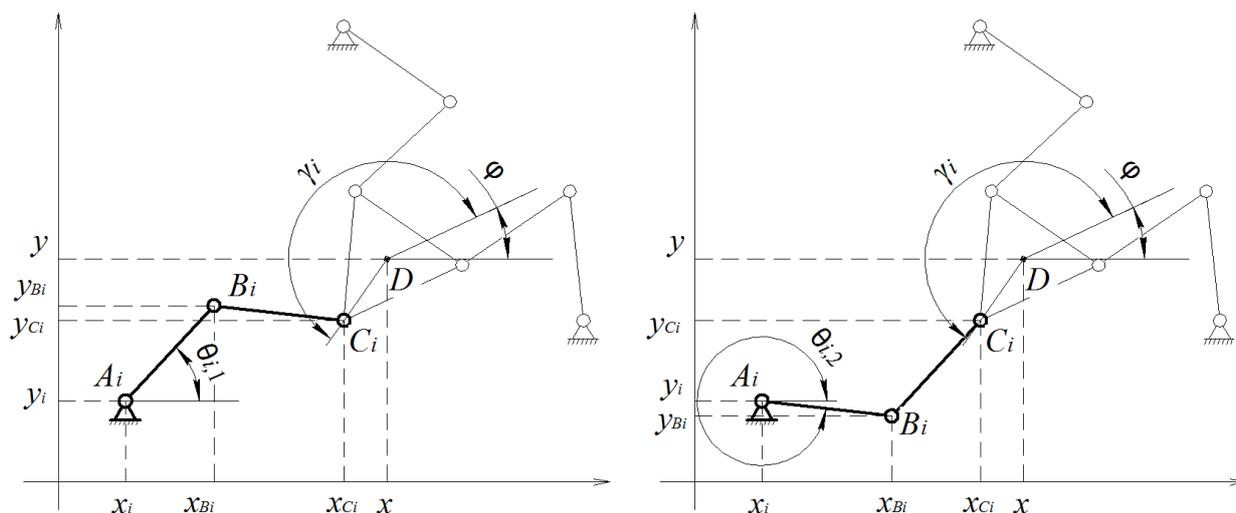


Рис. 5. Возможные конфигурации кинематической цепи плоского 3-RRR манипулятора

2. 3-RPR и 3-RRR механизм

Рассмотренный выше 3-RRR механизм является, пожалуй, самым известным из всех манипуляторов, реализующих движение в плоскости. Тем не менее, 3-RRR и 3-RPR также довольно часто рассматриваются исследователями [4,5].

Для начала рассмотрим 3-RPR манипулятор (рис. 6).

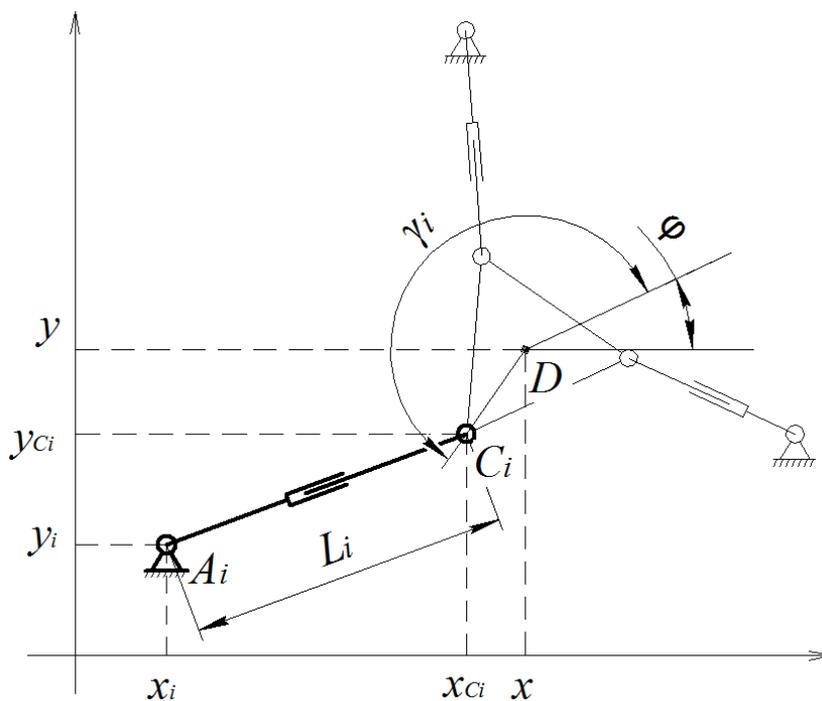


Рис. 6. Схема цепи плоского 3-RPR манипулятора

Кинематическая цепь такого механизма представляет собой телескопическую штангу с неподвижными вращательными парами на концах. Записывая координаты точки C_i

через координаты точки D и зная координаты точки A_i , можно без труда получить уравнение связи для такой цепи

$$L_i^2 = (x_{C_i} - x_{A_i})^2 + (y_{C_i} - y_{A_i})^2.$$

С учетом (2) получим

$$L_i^2 = (x + l_{3,i} \cos(\gamma_i + \varphi) - x_{A_i})^2 + (y + l_{3,i} \sin(\gamma_i + \varphi) - y_{A_i})^2. \quad (8)$$

Обобщенной координатой в уравнении (8) является длина $L_i=A_iC_i$. Обратная задача о положениях для i -й цепи 3-RPR механизма в таком случае имеет очевидное решение

$$L_i = \left| \sqrt{(x + l_{3,i} \cos(\gamma_i + \varphi) - x_{A_i})^2 + (y + l_{3,i} \sin(\gamma_i + \varphi) - y_{A_i})^2} \right|. \quad (9)$$

Знак модуля необходим, чтобы исключить отрицательное решение уравнения (9), т.к. длина не может иметь отрицательное значение. Таким образом обратная задача о положениях для данного механизма имеет всего одно решение.

Теперь перейдем к рассмотрению 3-RRR манипулятора. Конструктивно 3-RRR механизм полностью идентичен 3-RRR схеме, рассмотренной ранее, с той разницей, что приводной парой в кинематической цепи является не первая пара (A_i), а вторая (B_i).

Варианты расчетных схем цепи данного механизма в общем (несингулярном) случае представлены на рис. 7.

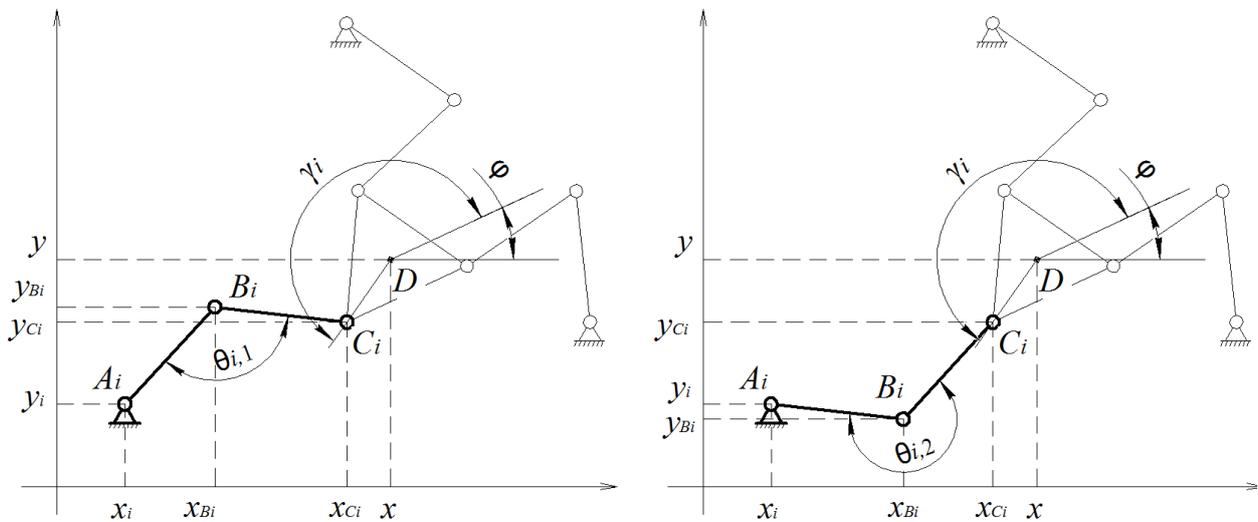


Рис. 7. Возможные схемы цепи плоского 3-RRR манипулятора

Обобщенной координатой в данном случае является угол θ_i между звеньями A_iB_i и B_iC_i , откладываемой от направления $\overline{B_iA_i}$ против часовой стрелки.

Расстояние A_iC_i может быть определено из формулы (8). Связь между данной длиной, углом θ_i и длинами $l_{1,i}$, $l_{2,i}$, имеет вид (т.е. «теорема косинусов»)

$$A_iC_i^2 = l_{1,i}^2 + l_{2,i}^2 - 2l_{1,i}l_{2,i} \cos \theta_i.$$

Тогда, с учетом (8), имеем

$$\cos \theta_i = \frac{l_{1,i}^2 + l_{2,i}^2 - (x + l_{3,i} \cos(\gamma_i + \varphi) - x_{Ai})^2 + (y + l_{3,i} \sin(\gamma_i + \varphi) - y_{Ai})^2}{2l_{1,i}l_{2,i}}. \quad (10)$$

Из (10) получаем решение обратной задачи о положениях для i -й цепи 3-RRR

$$\theta_i = \pm \arccos \left(\frac{l_{1,i}^2 + l_{2,i}^2 - (x + l_{3,i} \cos(\gamma_i + \varphi) - x_{Ai})^2 + (y + l_{3,i} \sin(\gamma_i + \varphi) - y_{Ai})^2}{2l_{1,i}l_{2,i}} \right). \quad (11)$$

Из рис. 7 видно, что для одной цепи в общем случае возможны два варианта решения обратной задачи о положениях. Нетрудно заметить, что оба этих решения получаются из уравнения (11), т.к. тупой угол, обозначенный $\theta_{i,2}$, по сути эквивалентен углу $-\theta_{i,1}$.

Таким образом, в общем случае, обратная задача о положениях для 3-RRR механизма параллельной структуры, как и для 3-RRR механизма, будет иметь восемь решений и соответствующих им конфигураций промежуточных звеньев (по два на каждую цепь).

Заключение

В данной работе представлены схемы, уравнения связи и решения обратной задачи о положениях для трех наиболее часто используемых и исследуемых механизмов параллельной структуры, реализующих движение в плоскости. При выводе всех зависимостей геометрия механизмов полагалась произвольной, т.е. на форму выходного звена и на расположение точек закрепления кинематических пар на неподвижном основании не накладывалось каких-либо геометрических ограничений. Также свободным является выбор начала отсчета и направления осей неподвижной системы абсолютных координат. Единственным требованием к данной системе является то, что она должна быть прямоугольной. Всё это позволяет получить идентичные уравнения для всех кинематических цепей одного механизма. Кроме того, количество цепей также может быть принято любым. Поскольку уравнения связи являются основными базовыми уравнениями для анализа механизма, такой подход позволяет легко адаптировать модель кинематики механизма к любому изменению геометрии и конфигурации механизма.

Список литературы

1. Ширинкин М.А., Глазунов В.А., Палочкин С.В. Разработка манипуляционного механизма параллельной структуры с четырьмя степенями свободы // Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности. Иваново: ИГТА. 2010. №1. С. 102-107.
2. Bonev I.A., Zlatanov D., Gosselin C.M. Singularity Analysis of 3-DOF Planar Parallel Mechanisms via Screw Theory // ASME. Journal of Mechanical Design. 2003. Vol. 125(3). Pp. 573-581. DOI: [10.1115/1.1582878](https://doi.org/10.1115/1.1582878)
3. Merlet J-P., Gosselin C.M., Mouly N. Workspaces of Planar Parallel Manipulators // Romansy 11. Theory and Practice of Robots and Manipulators. International Centre for

- Mechanical Sciences. Vienna: Springer. 1997. Vol. 381. Pp. 37-44. DOI: [10.1007/978-3-7091-2666-0_5](https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2666-0_5)
4. Wenger P., Chablat D. Kinematic Analysis of a Class of Analytic Planar 3-RPR Parallel Manipulators / Proceedings of the 5th International Workshop on Computational Kinematics // Computational Kinematics. Parallel Manipulators (1). Germany: Springer Berlin Heidelberg. 2009. Pp. 43-50. DOI: [10.1007/978-3-642-01947-0_6](https://doi.org/10.1007/978-3-642-01947-0_6)
 5. Kong X. Forward Kinematics and Singularity Analysis of a 3-RPR Planar Parallel Manipulator // Advances in Robot Kinematics: Analysis and Design. Germany: Springer Netherlands. 2008. Pp. 29-38. DOI: [10.1007/978-1-4020-8600-7_4](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8600-7_4)