

УДК 519.176+514.76+519.23

Вероятностные характеристики минимальных деревьев Штейнера на манхэттенской плоскости

Сальников В. Н.^{1,*}

^{*}vs.salnikov@gmail.com

¹МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Минимальные деревья Штейнера представляют широкий интерес в прикладных задачах, а так как точное решение является NP-трудным, то быстрые приближенные решения тоже весьма полезны. Эта работа является продолжением предыдущей деятельности автора по изучению вероятностных характеристик минимальных заполнений и здесь мы остановимся на соответствующих характеристиках минимальных деревьев Штейнера с манхэттенской метрикой. Для случая небольшого числа граничных вершин проводится полный анализ и вводится вероятностная мера. Также введено понятие существенной точки Штейнера, позволяющее ограничить неопределенность задачи.

Ключевые слова: вероятность; экстремальные сети, минимальные деревья Штейнера; манхэттенская плоскость

Введение

Обсуждение возможности оптимально соединить набор точек началось еще в 17 веке с частного случая Ферма для трех точек. Именно поэтому точка треугольника, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна, называется точкой Ферма. В дальнейшем задача Штейнера формулировалась в различных терминах. Мы будем рассматривать один из наиболее распространенных.

Пусть X — конечный набор точек метрического пространства (обычно плоскости). Будем называть конечный набор отрезков $T(X)$ соединяющим деревом, если концы отрезков содержат X и для любой пары точек из X существует и единственная построенная из этих отрезков ломаная, соединяющая выбранную пару. Будем обозначать через $l(T(X))$ сумму длин всех отрезков из $T(X)$ и называть ее длиной дерева. Если существует такое соединяющее дерево $T^*(X)$, что для любого другого соединяющего дерева $T(X)$ выполнено $l(T^*(X)) \leq l(T(X))$, то такое соединяющее дерево будем называть минимальным деревом Штейнера. Задача Штейнера заключается в поиске минимального дерева Штейнера для известного набора точек плоскости. К сожалению, задача Штейнера присутствовала уже

в одном из самых первых списков NP-трудных задач, опубликованных Ричардом Карпом в 1972 г. [1]. Позднее и аналогичная задача для дискретных пространств получила доказательство NP-трудности [2].

В зависимости от рассматриваемой метрики на плоскости решения могут отличаться (пример приведен на рис. 1). Отличаться могут не только длины ребер дерева, но и топологическая структура: в том же примере одно решение имеет дополнительную вершину, а другое — нет. Наибольшее внимание уделяют следующим метрическим пространствам:

- евклидова метрика (L_2);
- манхэттенская метрика (L_1) — в силу широкого практического применения: для городов эта метрика весьма естественна, так как они зачастую имеют характерную структуру параллельных и перпендикулярных улиц (откуда и пошло название данной метрики), в большинстве случаев электронные платы имеют параллельные и перпендикулярные дорожки, что обуславливает применение данной метрики при их проектировке и т.д.;
- метрические пространства на графах — в силу почти неограниченного уровня абстрактности.

Хорошей иллюстрацией изученности минимальных деревьев Штейнера для данных метрических пространств может выступать книга [3], содержащая наиболее полное представление того, что известно на данный момент.

В силу практического интереса мы остановимся на случае манхэттенской плоскости. Если не оговорено иначе, то именно эта метрика (и соответствующие величины, такие как, например, расстояние) имеется ввиду далее. Обычно задача поиска минимального дерева разбивается на два шага: первый — найти все возможные потенциальные структуры деревьев (будем называть их топологиями), соединяющие данный набор точек, а второй — найти наилучшего представителя с точки зрения минимальности длины. Для уменьшения вычислительной сложности обычно пытаются отбросить максимальное число заведомо не оптимальных топологий. Мы же попробуем сфокусироваться на вероятностных характеристиках топологий [4]), чтобы в дальнейшем можно было упорядочить варианты в соответствии с их вероятностью, и тем самым эффективнее искать (приближенное) решение.

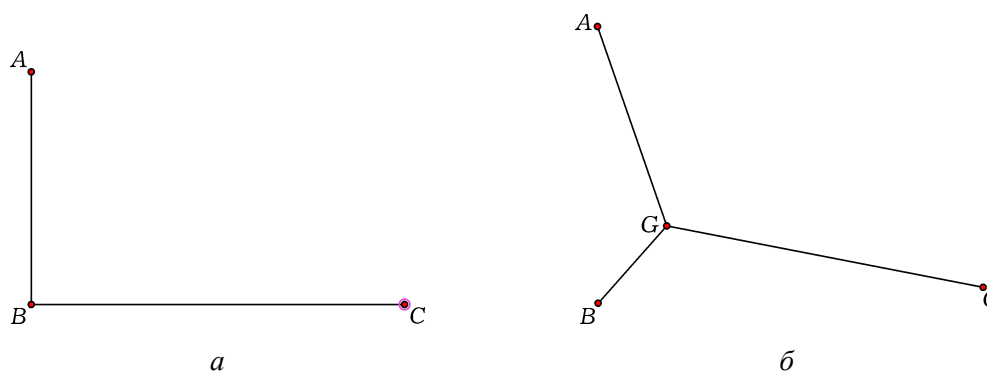


Рис. 1. Решения задачи Штейнера для трех точек в зависимости от рассматриваемой метрики: *а* — манхэттенская; *б* — евклидова

1. Определения и свойства

Исходные вершины будем называть терминалами или граничными точками, а дополнительные — точками Штейнера.

Решение задачи Штейнера может быть не единственным, особенно в случае выбранной метрики, но нас будет интересовать поиск хотя бы одного. Так как расстояние между точками (x_1, y_1) , (x_2, y_2) равно длине ломаной $(x_1, y_1) \rightarrow (x_1, y_2) \rightarrow (x_2, y_2)$, то можно, например, рассматривать только горизонтальные и вертикальные линии в поисках решения. Более того, можно доказать [6], что положения точек Штейнера можно искать только среди вершин так называемой решетки Ханана, получающейся проведением вертикальных и горизонтальных отрезков через все граничные вершины. Этот важный факт мы будем использовать в дальнейшем, так как он позволяет существенно снизить неопределенность задачи.

Если рассматривать лишь горизонтальные и вертикальные отрезки, то степень любой вершины не более 4. Более того, точки Штейнера не могут иметь степень 1, иначе их можно убрать вместе с инцидентным ребром, тем самым уменьшив общую длину дерева. Без ограничения общности можно считать, что точек Штейнера степени 2, инцидентных паре горизонтальных или паре вертикальных отрезков тоже нет, так как их можно заменить одним отрезком без дополнительной вершины. Таким образом можно ввести обозначения для трех типов точек Штейнера: угловая точка (степени 2), Т-точка (степень 3) и перекресток (степень 4).

Коротко остановимся на теореме о структурных свойствах минимальных деревьев Штейнера для выбранной метрики, опубликованной в уже упомянутой книге Хванга и коллег [3]. Соединяющее дерево называется полным, если все граничные вершины имеют степень 1. Очевидно, что любое соединяющее дерево, в котором есть граничные вершины больших степеней, можно разбить на поддеревья с граничными вершинами лишь степени 1. Такие поддеревья называются полными компонентами. Также нам понадобятся два преобразования, не меняющих полной длины дерева: скольжение и флип. Скольжение заключается в перемещении сегмента s , соединяющего два параллельных сегмента p_1, p_2 , в положение параллельного сегмента t , который также соединяет p_1 и p_2 . В зависимости от направления движения можно определить левое, правое, верхнее и нижнее скольжение. Флип подразумевает переход от одного угла — угловой точки Штейнера вместе с парой инцидентных ребер — к дополнительному углу, вместе с которым исходный угол составляет прямоугольник. Аналогично в зависимости от исходного положения угла (например, левый-нижний угол означает наличие левой и нижней сторон прямоугольника) возможны левый-нижний, левый-верхний, правый-нижний и правый-верхний флипы.

Дерево называется каноническим, если без изменения длины невозможно выполнить следующие операции:

- 1) левое скольжение;

- 2) левый-верхний или левый-нижний флипы;
- 3) верхнее или нижнее скольжение с дальнейшим преобразованием из предыдущего пункта.

Дерево называется деревом Хванга если оно имеет структуру как на рис. 2, а именно: есть так называемый корневой терминал r , от которого идет горизонтальная линия с чередующимися терминалами с разных сторон, заканчивающаяся угловой точкой Штейнера, соединенной с терминалом t (и возможен единственный дополнительный «нарост» для типа 2). Естественно аналогично называются повернутые деревья (на угол, кратный 90°) и деревья, им симметричные. Теперь, когда все необходимые определения введены, можно сформулировать следующий результат.

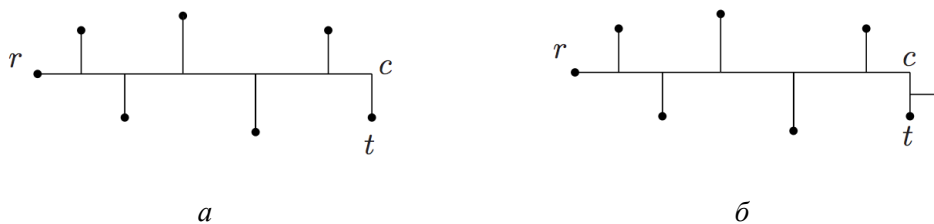


Рис. 2. Деревья Хванга: a — типа 1; b — типа 2

Теорема 1 (теорема Хванга). Для любого конечного множества точек манхеттенской плоскости существует соединяющее его минимальное дерево Штейнера, такое, что все его полные компоненты являются деревьями Хванга.

Если известно разбиение граничных точек на подмножества, соответствующие полным компонентам, то данная теорема позволяет эффективно строить минимальное дерево Штейнера. Более того, в силу определенной структуры деревьев Хванга, соответствующее разбиение можно искать чуть более эффективно, но тем не менее, перебор остается экспоненциальной сложности, что делает практическое применение затруднительным для большого числа терминалов.

2. Вероятностные свойства

В одной из прошлых работ [4] мы рассматривали иной объект, но весьма схожий концептуально, называемый минимальным заполнением [7, 8, 5]. Чтобы избежать большого числа не важных для данной работы определений, мы не будем останавливаться на всех результатах названной работы, но приведем основные, чтобы было понятнее дальнейшее изложение. Задача поиска минимальных заполнений очень близка к задаче Штейнера (а в случае метрики L_∞ в точности совпадает [9]). Она так же является NP-трудной и обычно решается в два аналогичных шага. Нам удалось ввести для так называемых аддитивных метрических пространств вполне естественную вероятностную меру на пространстве топологий, которую можно эффективно аналитически вычислять. Этот результат важен, так как,

например, для поиска приближенного решения задач с большим числом терминалов, можно рассматривать лишь топологии, существенно более вероятные, чем другие.

Основным ограничением для текущей задачи является отсутствие связи между порождающим деревом (для аддитивного метрического пространства) и минимальным деревом Штейнера, которая имела место в случае минимальных заполнений. В силу указанной выше теоремы Хванга, было бы вполне разумно отталкиваться от полных компонент для введения вероятностной меры, но насколько нам известно, на текущий момент информация о структуре разбиения множества терминалов на подмножества, соответствующие полным компонентам, весьма ограничена. Поэтому мы будем работать с полным набором терминалов, но в силу сложности задачи, на текущий момент ограничимся рассмотрением множеств, состоящих из четырех точек. Основной вопрос, который нас будет волновать — сколько точек Штейнера в минимальном дереве Штейнера.

Итак, наше множество терминалов состоит из четырех точек $p_i = (x_i, y_i)$, $i = 0, \dots, 3$ (здесь и далее x_i, y_i всегда будут обозначать координаты граничных точек).

Если у пары терминалов совпадают x -координаты, то можно поменять оси x и y местами, чтобы избежать такого совпадения. Если же после изменения осей снова найдется пара точек с совпадающими координатами, то либо есть две непересекающиеся пары (одна с совпадающими x -координатами, другая — y -координатами, и тогда решение — пара отрезков, соединяющих эти пары и, если отрезки не пересекаются, соединяющий их отрезок) либо есть три точки, как на рис. 1, a и дополнительная точка p (и решение тогда — угол из этих трех точек и минимальный отрезок, соединяющий p с этим углом). В любом случае, для введенной в дальнейшем меры случай совпадающих x_i будет иметь меру нуль, поэтому будем предполагать, что все x_i различны.

Без ограничения общности будем считать, что $x_0 = y_0 = 0$, граничные точки упорядочены в соответствии с ростом x -координаты, и ось y направлена таким образом, что $y_1 \geq 0$. Как уже упоминалось, можно считать, что точки Штейнера находятся на решетке Ханана и, следовательно, имеют координаты вида (x_i, y_j) для некоторых i, j . В силу различности всех x_i , корректно говорить, что точка p расположена на i -м уровне, если ее x -координата равна x_i .

Назовем точку Штейнера существенной, если она не является угловой. Угловые точки мы считаем несущественными, так как весь соответствующий угол можно заменить на диагональный отрезок, убрав тем самым угловую точку и не изменив длины дерева. Угловые точки так же добавляют неоднозначности решения: основная идея канонических деревьев в том, чтобы избежать конструкций в форме буквы Н, перемещая перемычку в крайнее положение и попытке оставить лишь углы определенного типа. Так как мы зафиксировали решетку Ханана, то для положения перемычки остается меньшее число возможных положений, но все еще возможна неоднозначность, а вопрос угловых точек мы будем решать заменой соответствующего угла на диагональный сегмент.

Утверждение 1. Для четырех терминалов может быть не более двух существенных точек Штейнера, и можно считать, что они располагаются на разных уровнях.

Доказательство. Понятно, что существенные точки Штейнера не могут располагаться на уровнях 0 и 3 (иначе они угловые, либо есть совпадающие x -координаты у терминалов). То, что существенных точек Штейнера не может быть более двух, очевидно, учитывая возможную структуру дерева с не более чем с 4 вершинами степени 1. Пусть обе существенные точки находятся на одном уровне. Без ограничения общности можно считать что они на уровне 1 (иначе рассмотрим симметричную конфигурацию граничных точек). Одна из них заведомо соединена с p_1 , другая — назовем ее s — соединена с первой и либо с парой p_2, p_3 , либо с p_0 и одной из точек p_2, p_3 . В первом случае, перемещая s на уровень 2, уменьшаем полную длину дерева (разница $|x_2 - x_1| - 2|x_2 - x_1|$, рис. 3, а), во втором случае аналогичное перемещение не изменяет длины дерева (рис. 3, б), но разносит существенные точки на разные уровни. Утверждение доказано.

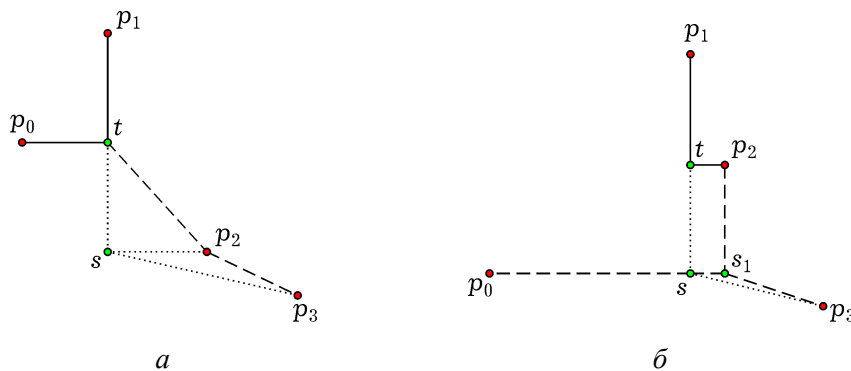


Рис. 3. Изменение длины дерева при разнесении существенных точек на разные уровни (линии из точек — исходная структура, пунктирные линии — новая): а — длина дерева уменьшается; б — длина дерева не изменяется

Теперь посмотрим, в каких случаях нужны две существенные точки, а когда можно обойтись меньшим количеством.

Если есть существенная точка на уровне 1, то ее координаты имеют вид (x_l, y_l) для некоторого $l = 0, 1, 2, 3$. Аналогично, для уровня 2 существенная точка может иметь координаты вида (x_2, y_m) . В итоге получаем 16 различных случаев в зависимости от l и m и обозначим их c_{lm} . Случаи c_{1m} и c_{l2} не имеют двух существенных точек, так как хотя бы один из кандидатов совпадает с терминалом, а все остальные имеют две Т-точки. Аналогично рассуждению в доказательстве утверждения 1 легко видеть, что существенная точка на уровне 1, если она есть, соединена с парой p_0, p_1 и либо с существенной точкой на уровне 2, если она есть, либо с p_2 ; если существенной точки на уровне 1 нет, то p_1 напрямую соединена с p_0 . Таким образом доказано, следующее утверждение.

Утверждение 2. Для случая четырех терминалов общего положения, минимальное дерево Штейнера может содержать не более чем по одной существенной точке Штейнера

на уровнях 1 и 2, и как только их количества зафиксированы, соединяющие ребра восстанавливаются единственным способом.

Обозначим через z_{lm} длину дерева, соответствующую случаю c_{lm} за вычетом x_3 : в силу упорядоченности точек по x -координате, вклад x -координат в длину дерева во всех случаях будет в точности x_3 и, следовательно, не влияет на оптимальность того или иного случая. Выпишем явные формулы для z_{lm} :

$$\begin{array}{ll} z_{00}: & |y_3| + |y_2| + |y_1|, & z_{20}: & 3|y_2| + |y_2 - y_1| + |y_3|, \\ z_{01}: & |y_3 - y_1| + |y_2 - y_1| + 2|y_1|, & z_{21}: & |y_2| + 3|y_2 - y_1| + |y_3 - y_1|, \\ z_{02}: & |y_3 - y_2| + |y_2| + |y_1|, & z_{22}: & |y_2| + |y_2 - y_1| + |y_3 - y_2|, \\ z_{03}: & |y_3 - y_2| + |y_3| + |y_1|, & z_{23}: & |y_2| + |y_2 - y_1| + 2|y_3 - y_2|, \\ z_{10}: & |y_3| + |y_2| + 2|y_1|, & z_{30}: & 3|y_3| + |y_1 - y_3| + |y_2|, \\ z_{11}: & |y_3 - y_1| + |y_2 - y_1| + |y_1|, & z_{31}: & |y_3| + 3|y_1 - y_3| + |y_2 - y_1|, \\ z_{12}: & |y_3 - y_2| + |y_2 - y_1| + |y_1|, & z_{32}: & |y_3| + |y_1 - y_3| + 2|y_3 - y_2|, \\ z_{13}: & |y_3 - y_2| + |y_3 - y_1| + |y_1|, & z_{33}: & |y_3| + |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|. \end{array}$$

Некоторые случаи, а именно c_{01} , c_{10} , c_{20} , c_{21} , c_{23} , c_{30} , c_{31} , c_{32} , заведомо не оптимальны: если все y -координаты попарно различны, то можно указать лучшее решение среди других случаев (и не хуже в случае совпадающих y -координат), а именно c_{11} , c_{00} , c_{00} , c_{22} , c_{22} , c_{00} , c_{33} , c_{33} соответственно (в некоторых из случаев один раз применяется неравенство $|a + b| \leq |a| + |b|$). Таким образом, остается 8 случаев. Для их рассмотрения зафиксируем положительное значение y_1 (случай нулевого y_1 тривиален, так как на первом уровне заведомо нет существенной точки и он будет иметь меру нуль в дальнейшем) и рассмотрим все возможные значения для y_2 и y_3 . Так как все модули в формулах z_{lm} содержат либо одну координату, либо разность между двумя, то для раскрытия модулей важно лишь взаимное расположение (больше, меньше, равно) точек 0 , y_1 , y_2 , y_3 . Таким образом, плоскость возможных значений y_2 , y_3 при фиксированном y_1 разделяется на небольшое число областей, для каждой из которых можно выбрать оптимальное решение среди случаев z_{lm} . Результат соответствующего анализа представлен на рис. 4: каждая область отмечена буквой со следующим значением: C — две существенных точки, B — менее двух существенных точек, A — возможны случаи как с одной так и с двумя существенными точками, дающие одинаковый результат (соответствующий пример представлен на рис. 5).

Тем самым получаем следующий результат.

Теорема 2. В случае четырех терминалов возможны следующие случаи:

- случай общего положения: если существует координатная ось (без ограничения общности x), вдоль которой координаты всех терминалов различны, то решение задачи Штейнера содержит такое количество существенных точек Штейнера, как указано на рис. 4 (после изометричного сдвига границы, совмещающего точку с меньшей x -координатой с точкой $(0,0)$), причем для областей из рис. 4 однозначно строится соответствующее минимальное дерево;

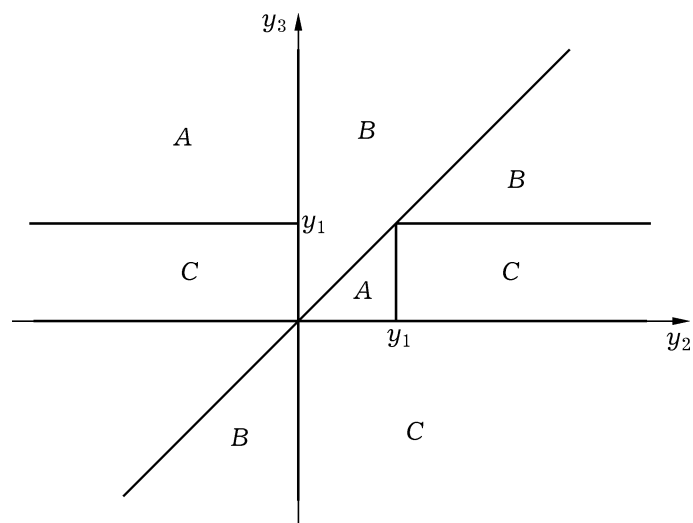


Рис. 4. Области A, B, C в плоскости параметров y_2, y_3

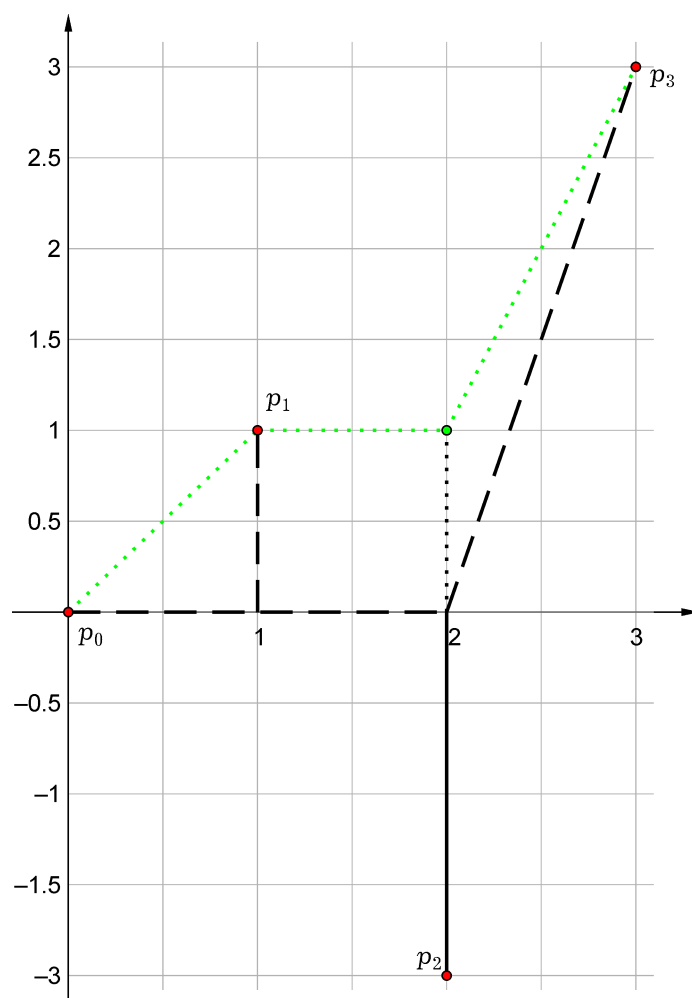


Рис. 5. Пример такого расположения граничных точек, при котором возможно решение как с двумя существенными точками, так и с одной: сплошные линии принадлежат обоим решениям, линии из точек соответствуют решению с одной существенной точкой (случай c_{11} в тексте), пунктирные — случаю с двумя существенными точками (случай c_{00}), причем оба случая имеют длину 9

• «вырожденный» случай: если соответствующей координатной оси нет, то либо есть две непересекающиеся пары (одна с совпадающими x -координатами, другая — с y -координатами, и тогда решение — пара отрезков, соединяющих эти пары и, если отрезки не пересекаются, соединяющий их отрезок;) либо есть 3 точки как на рис.1 (верхний) и дополнительная точка p (и решение тогда — угол из этих трех точек и минимальный отрезок, соединяющий p с этим углом).

Теперь, когда сформулирована теорема 2, определим вероятность каждого из случаев вполне естественным путем: пропорционально объему (естественно, ограниченному в определенном смысле) соответствующей области в пространстве (y_1, y_2, y_3) . Так как геометрия областей на рис. 4 не столь тривиальна и не ограничена, необходимо ограничить искусственно и рассмотреть предел при увеличении ограничения. В классических работах (например, см. [10]) обычно рассматривается шар увеличивающегося радиуса. Так как мы знаем, что значения x -координат не важны, а важен лишь их порядок, то мы воспользуемся равномерной границей: $|y_i| < E$. Так как сечение для каждого значения y_1 известно, то легко посчитать площади областей A, B, C , ограниченных квадратом со стороной $2E$. Получим $E^2 - Ey_1 + y_1^2/2, 3E^2/2 - Ey_1 + y_1^2/2, 3E^2/2 + 2Ey_1 - y_1^2$ для A, B и C соответственно. Случай отрицательного y_1 полностью симметричен, поэтому объемы равны удвоенным интегралам от 0 до E упомянутых площадей. Таким образом, получаем объемы $4E^3/3, 7E^3/3$ и $13E^3/3$ для A, B, C соответственно. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 3. Для четырехточечных граничных множеств на манхеттенской плоскости случай двух существенных точек Штейнера более вероятен в следующем смысле: при любых размерах куба, ограничивающего пространство параметров (в данном случае y -координат трех точек), объем области, соответствующей двум существенным точкам Штейнера, превышает объемы остальных областей.

Заключение

Как мы видим, для небольшого числа терминалов возможно произвести все вычисления до конца и составить карту областей в зависимости от координат, причем в силу выбранной метрики границы областей весьма простые. Таким образом, есть шанс произвести аналогичные расчеты для большего числа терминалов (возможно, при помощи вычислительной техники). Важно заметить, что введение понятия существенной точки Штейнера избавляет от большого числа неоднозначностей решения и тем самым дает лучшее понимание полученных решений.

Учитывая тот факт, что даже на небольшом числе граничных точек заметна разница между размерами различных областей, в случае большего числа граничных точек данная особенность может выражаться еще сильнее, тем самым позволяя исключать из рассмотрения большое число топологий. Отметим еще, что случаи одной существенной точки Штейнера и отсутствия таких точек были объединены вместе для окончательной карты, но

в процессе вычислений эти случаи были рассмотрены отдельно. Не представляет труда сделать аналогичную схему, где эти варианты рассматриваются независимо, что важно для случаев с большим числом граничных точек.

Работа частично поддержана РФФИ (проект 13-01-00664а) и Программой Президента РФ поддержки ведущих научных школ России (проект НШ 581.2014.1).

Список литературы

1. Karp R.M. Reducibility among combinatorial problems // Proc. of a Symp. on the Complexity of Computer Computations. The IBM Research Symposia Series. New York: Plenum Press, 1972. P. 85–103.
2. Garey M.R., Graham R.L., Johnson D.S. The Complexity of Computing Steiner Minimal Trees // SIAM J. Appl. Math. 1977. Vol. 32, no. 4. P. 835–859. DOI: [10.1137/0132072](https://doi.org/10.1137/0132072)
3. Hwang F.K., Richards D.S., Winter P. The Steiner Tree Problem. New York: North-Holland, 1992. (ser. Annals of Discrete Mathematics, vol. 53).
4. Salnikov V.N. Probabilistic properties of topologies of minimal fillings of finite metric spaces // Journal of Mathematical Sciences. 2014. Vol. 203, iss. 6. P. 873–883. DOI: [10.1007/s10958-014-2179-2](https://doi.org/10.1007/s10958-014-2179-2)
5. Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. One-dimensional Gromov minimal filling problem // Sbornik: Mathematics. 2012. Vol 203, no. 5. P. 677–726. DOI: [10.1070/SM2012v203n05ABEH004239](https://doi.org/10.1070/SM2012v203n05ABEH004239)
6. Hanan M. On Steiner's problem with rectilinear distance // SIAM J. Appl. Math. 1966. Vol. 14, no. 2. P. 255–265. DOI: [10.1137/0114025](https://doi.org/10.1137/0114025)
7. Gromov M. Filling Riemannian manifolds // J. Differential Geom. 1983. Vol. 18, no. 1. P. 1–147. Режим доступа: <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214509283> (дата обращения 31.05.2015).
8. Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. Gromov minimal fillings for finite metric spaces // Publications de l'Institut Mathématique. 2013. Vol. 94, iss. 108. P. 3–15. DOI: [10.2298/PIM1308003I](https://doi.org/10.2298/PIM1308003I)
9. Ivanov A., Tuzhilin A. Minimal fillings of finite metric spaces: The state of the art // A. Bark, O. Musin, eds. Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics. Providence: AMS., 2014. P. 9–35. (ser. Contemporary Mathematics, vol. 625). DOI: [10.1090/conm/625](https://doi.org/10.1090/conm/625)
10. Gilbert E.N. Random minimal trees // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. 1965. Vol. 13, no. 2. P. 376–387. DOI: [10.1137/0113021](https://doi.org/10.1137/0113021)

Probabilistic Properties of Rectilinear Steiner Minimal Trees

Salnikov V. N.^{1,*}

[*vs.salnikov@gmail.com](mailto:vs.salnikov@gmail.com)

¹Lomonosov Moscow State University, Russia

Keywords: probability, extreme networks, Steiner minimal trees, Manhattan plane

This work concerns the properties of Steiner minimal trees for the Manhattan plane in the context of introducing a probability measure. This problem is important because exact algorithms to solve the Steiner problem are computationally expensive (NP-hard) and the solution (especially in the case of big number of points to be connected) has a diversity of practical applications. That is why the work considers a possibility to rank the possible topologies of the minimal trees with respect to a probability of their usage. For this, the known facts about the structural properties of minimal trees for selected metrics have been analyzed to see their usefulness for the problem in question. For the small amount of boundary (fixed) vertices, the paper offers a way to introduce a probability measure as a corollary of proved theorem about some structural properties of the minimal trees.

This work is considered to further the previous similar activity concerning a problem of searching for minimal fillings, and it is a door opener to the more general (complicated) task. The stated method demonstrates the possibility to reach the final result analytically, which gives a chance of its applicability to the case of the bigger number of boundary vertices (probably, with the use of computer engineering).

The introducing definition of an essential Steiner point allowed a considerable restriction of the ambiguity of initial problem solution and, at the same time, comparison of such an approach with more classical works in the field concerned. The paper also lists main barriers of classical approaches, preventing their use for the task of introducing a probability measure.

In prospect, application areas of the described method are expected to be wider both in terms of system enlargement (the number of boundary vertices) and in terms of other metric spaces (the Euclidean case is of especial interest). The main interest is to find the classes of topologies with significantly greater/smaller probability in order to limit heavily the number of checked topologies.

References

1. Karp R.M. Reducibility among combinatorial problems. *Proc. of a Symp. on the Complexity of Computer Computations. The IBM Research Symposia Series*, New York, Plenum Press, 1972, pp. 85–103.
2. Garey M.R., Graham R.L., Johnson D.S. The Complexity of Computing Steiner Minimal Trees. *SIAM J. Appl. Math.*, 1977, vol. 32, no. 4. pp. 835–859. DOI: [10.1137/0132072](https://doi.org/10.1137/0132072)
3. Hwang F.K., Richards D.S., Winter P. *The Steiner Tree Problem*. New York, North-Holland, 1992. (ser. Annals of Discrete Mathematics, vol. 53).
4. Salnikov V.N. Probabilistic properties of topologies of minimal fillings of finite metric spaces. *Journal of Mathematical Sciences*, 2014, vol. 203, iss. 6, pp. 873–883. DOI: [10.1007/s10958-014-2179-2](https://doi.org/10.1007/s10958-014-2179-2)
5. Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. One-dimensional Gromov minimal filling problem. *Sbornik: Mathematics*, 2012, vol. 203, no. 5, pp. 677–726. DOI: [SM2012v203n05ABEH004239](https://doi.org/10.1007/s10958-012-0000-0)
6. Hanan M. On Steiner's problem with rectilinear distance. *SIAM J. Appl. Math.*, 1966, vol. 14, no. 2, pp. 255–265. DOI: [10.1137/0114025](https://doi.org/10.1137/0114025)
7. Gromov M. Filling Riemannian manifolds. *J. Differential Geom.*, 1983, vol. 18, no. 1, pp. 1–147. Accessed: <http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214509283> (date 31.05.2015).
8. Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. Gromov minimal fillings for finite metric spaces. *Publications de l'Institut Mathématique*, 2013, vol. 94, iss. 108. pp. 3–15. DOI: [10.2298/PIM1308003I](https://doi.org/10.2298/PIM1308003I)
9. Ivanov A., Tuzhilin A. Minimal fillings of finite metric spaces: The state of the art. In: A. Bark, O. Musin, eds. *Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics*. Providence, AMS., 2014. pp. 9–35. (ser. Contemporary Mathematics, vol. 625). DOI: [10.1090/conm/625](https://doi.org/10.1090/conm/625)
10. Gilbert E.N. Random minimal trees. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1965, vol. 13, no. 2, pp. 376–387. DOI: [10.1137/0113021](https://doi.org/10.1137/0113021)