электронный научно-технический журнал
ИНЖЕНЕРНЫЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51036. ISSN 2307-0595

Оценка трудоемкости метода сил и метода конечных элементов при расчете балок

07, июль 2015

Ганыш С. М.[1,*]

УДК: 539.3

[1]Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
*S.Ganysh-Rk5@yandex.ru

Введение

Метод сил и метод перемещений являются наиболее распространенными методами для расчета стержневых систем в курсе Сопротивления Материалов [1,2]. При этом метод перемещений не редко применяют в форме метода конечных элементов [3,4]. Сложность применения того или иного метода связана со степенями статической и кинематической неопределимости. При разработке преподавателями новых домашних заданий и задач для контрольно-самостоятельных мероприятий важно понимать, какое время в среднем затратит студент для решения той или иной задачи. Также не маловажным является способность молодых преподавателей решать задачи контрольно-самостоятельных мероприятий со скоростью не ниже определенной. В рамках статьи рассматривается подход, позволяющий оценить временные затраты задачи по величине статической и кинематической неопределимостей.

1. Основные этапы расчета методом сил

Наиболее широко применяемым в машиностроении общим методом раскрытия статической неопределимости стержневых и рамных систем является метод сил. В методе заданная статически неопределимая система освобождается от дополнительных связей, а их действие заменяется усилиями. Величина усилий в дальнейшем подбирается так, чтобы перемещения в системе соответствовали тем ограничениям, которые накладываются на систему отброшенными связями.

Независимо от особенностей рассматриваемой конструкции, можно выделить следующую последовательность расчета статически неопределимых систем методом сил:

- Определение степени статической неопределимости;
- Выбор основной системы;

- Формирование эквивалентной системы;
- Запись системы канонических уравнений;
- Построение единичных эпюр и эпюры от действующей на рассматриваемую конструкцию нагрузки;
- Вычисление коэффициентов податливости системы канонических уравнений;
- Решение системы канонических уравнений и определение неизвестных реакций отброшенных связей;
- Построение на основе найденных реакций окончательных эпюр внутренних силовых факторов.

2. Основные этапы расчета методом конечных элементов

Одной из разновидностей метода перемещений является метод конечных элементов. В методе конечных элементов континуальная модель заменяется дискретной – конечно-элементной, в которой матрица жесткости стандартного конечного элемента известна заранее. Можно выделить следующие этапы расчета методом конечных элементов:

- Дискретизация задачи;
- Определение локальных матриц жесткости системы;
- Составление вектора узловых сил и вектора узловых перемещений для всей конструкции;
- Ансамблирование локальных матриц жесткости отдельных конечных элементов в глобальной матрицы жесткости всей конструкции;
- Решение канонического уравнения метода конечных элементов. Определение неизвестных узловых перемещений;
- Постпроцессорная обработка: определение по найденному вектору перемещений усилий и напряжений в стержнях.

3. Определение трудоемкости метода сил и метода перемещений

Исследования проводились при следующих допущениях: в задачах отсутствует распределенная нагрузка; в задачах не применяются свойства симметрии и другие способы упрощения решения задачи. По результатам исследования большого числа задач было установлены основные факторы, влияющие на сложность решения задачи.

Факторы, влияющие на временные затраты методом сил:

- Степень статической неопределимости;
- Количество стержней в системе.

Факторы, влияющие на временные затраты методом конечных элементов:

- Степень кинематической неопределимости;
- Количество стержней в системе;
- Количество стержней, длина которых отлична от некоторой стандартной L.

Для определения временных затрат, связанных с описанными выше факторами преподавателям кафедры были предложены задачи для проведения эксперимента. Эксперимент представляет собой расчет задачи с таймером, с помощью которого засекаются времена, затрачиваемые на разные этапы решения задачи. Усредненные результаты представлены в таблице №1.

	Метод сил		**Метод конечных элементов**	
Задача	**С решением СЛАУ**	**Без решения СЛАУ**	**С решением СЛАУ**	**Без решения СЛАУ**
ССН = 1	~7 мин	~6 мин	–	–
ССН = 2	~14 мин	~12 мин	–	–
ССН = 3	~25 мин	~19 мин	–	–
СКН = 1	–	–	~7 мин	~6 мин
СКН = 2	–	–	~12 мин	~10 мин
СКН = 3	–	–	~18 мин	~12 мин

Выделим основные временные интервалы при решении задач методом сил и методом конечных элементов.

Временные этапы метода сил:

- Этап подготовки к решению (определение ССН, определение основной и эквивалентной систем) – T_{1C};
- Этап построения эпюр – T_{2C};
- Этап перемножения эпюр и определения коэффициентов матрицы податливости – T_{3C};
- Этап решения СЛАУ – T_{4C}.

Временные этапы метода конечных элементов:

- Этап подготовки к решению (дискретизация системы) – $T_{1КЭ}$;
- Этап составления локальных матриц жесткости и векторов узловых сил и перемещений – $T_{2КЭ}$;
- Этап составления глобальной матрицы жесткости – $T_{3КЭ}$;
- Этап решения СЛАУ – $T_{4КЭ}$.

Этап подготовки для метода конечных элементов – практически не зависит от сложности задачи. Будем считать время, затрачиваемое на его выполнение постоянной величиной. Таким образом, $T_{1КЭ} = const$.

Этап подготовки для метода сил – зависит от того, рассматриваем ли мы выбор оптимальной основной системы. Для принятых в рамках работы допущений, затраты практически не зависит от сложности задачи. Будем считать время, затрачиваемое на его выполнение постоянной величиной. Таким образом, $T_{1C} = const$.

Из эксперимента определено, что:

$$T_{1КЭ} = T_{1C} = 2 \text{ мин}. \quad (1)$$

Этапы решения СЛАУ для метода сил и метода конечных элементов равнозначны, о чем говорилось ранее. Это дает нам следующее соотношение: $T_{4КЭ} = T_{4C}$. Величина T_{4C} зависит от степени статической неопределимости, величина $T_{4КЭ}$ от степени кинематической неопределимости.

Экспериментально установлены следующие значения временных затрат:

Степень статической/кинематической неопределимости	**Временные затраты Т4С и Т4К**
1	1 мин
2	2 мин
3	6 мин
4	12 мин

Для больших значений степени статической и кинематической неопределимостей применяется интерполяция: по значениям в таблице определяются коэффициенты кубического полинома, который и будет являться интерполяционным.

Полином имеет вид:

$$T_4 = A \cdot x^3 + B \cdot x^2 + C \cdot x + D, \quad (2)$$

где x – степень статической или кинематической неопределимостей. Подставляя в формулу (2) значения из таблицы, приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} 1 = A \cdot 1^3 + B \cdot 1^2 + C \cdot 1 + D \\ 2 = A \cdot 2^3 + B \cdot 2^2 + C \cdot 2 + D \\ 6 = A \cdot 3^3 + B \cdot 3^2 + C \cdot 3 + D \\ 12 = A \cdot 4^3 + B \cdot 4^2 + C \cdot 4 + D \end{cases} \quad (3)$$

Решив систему (3) и подставляя найденные коэффициенты в уравнение (2) получаем следующую формулу:

$$T_{4C} = T_{4КЭ} = -0.167x^3 + 2.5x^2 - 5.333x + 4. \quad (4)$$

Рассмотрим временные затраты для этапов 2-3 для метода сил. Величина T_{2C} складывается из 2 слагаемых: время на поиск неизвестных реакций и время построения эпюр. Время на поиск реакций – будем считать независимой от сложности задачи величиной. Среднее время на поиск реакций для одной из эпюр – 45 секунд или 0.75 минуты.

Время, затрачиваемое на построение эпюры, зависит от числа участков, на которых эта эпюра строится. Экспериментально установлено, что среднее время на один участок

равно 30 секунд, что составляет 0.5 минуты. Количество эпюр зависит от степени статической неопределимости и равно ССН+1.

Таким образом, можно получить формулу, вычисляющую время, требуемое на построение 1 эпюры:

$$T_{2C} = 0.75 \cdot (x+1) + 0.5 \cdot (x+1) \cdot y, \tag{5}$$

где x – степень статической неопределимости, y – число участков стержневой системы.

Рассмотрим время, затрачиваемое на перемножение эпюр. Время, затрачиваемое на получение одного коэффициента податливости δ_{ij}, зависит от кол-ва участков. Экспериментально установлено, что время на один участок равно 0.5 минуты. Рассмотрим зависимость количества определяемых коэффициентов δ_{ij} от ССН. В матричной форме, для системы n уравнений метода сил можно записать следующую зависимость:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{21} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & & & \\ \delta_{n1} & \dots & & \delta_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta_{1f} \\ \delta_{2f} \\ \dots \\ \delta_{nf} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{6}$$

Уравнение содержит $n^2 + n$ коэффициентов. Однако не все коэффициенты являются независимыми. Известно, что матрица податливости является симметричной. Поэтому коэффициенты $\delta_{ij} = \delta_{ji}$. Тогда количество неизвестных коэффициентов в зависимости от количества уравнений определяется соотношением:

$$z = \frac{(n^2 - n)}{2} + 2 \cdot n. \tag{7}$$

Соответственно временные затраты на 3м этапе принимают вид:

$$T_{3C} = 0.5 \cdot y \cdot \left[\frac{(x^2 - x)}{2} + 2 \cdot x \right]. \tag{8}$$

Рассмотрим временные затраты для этапов 2-3 для метода конечных элементов. При анализе второго этапа было выяснено, что его сложность практически не зависит от степени кинематической неопределимости. Основным критерием является количество участков стержня, так как каждый дополнительный участок – добавляет дополнительный конечный элемент. При этом важно отметить, что время, затрачиваемое на формирование одной матрицы жесткости для стержня с длиной L и с произвольной длиной различно. Время для формирования одной матрицы с длиной L – 1 минута, на формирование матрицы с произвольной длиной – 2 минуты. На формирование векторов узловых сил и перемещений уходит еще 1 минута. Получаем следующее соотношение:

$$T_{2КЭ} = 1 + 1 \cdot (y - y_1) + 2 \cdot y_1, \tag{9}$$

где y – количество участков стержня, y_1 – количество участков стержня с длиной, отличной от L.

Для этапа формирования глобальной матрицы жесткости всей конструкции также установлено, что сложность этапа практически не зависит от степени кинематической неопределимости. Время, затрачиваемое на этот этап, определяется по формуле:

$$T_{ЗКЭ} = 0.5 + 1 \cdot y. \tag{10}$$

Окончательно, временные затраты для метода сил и метода конечных элементов определяются по соотношениям:

$$\begin{aligned} T_{\Sigma}^{C} &= \sum_{i=1}^{4} T_{iC} \\ T_{\Sigma}^{КЭ} &= \sum_{i=1}^{4} T_{iКЭ} \end{aligned} \tag{11}$$

Заключение

В статье рассмотрен подход к оценке трудоемкости решения стержневых систем методом сил и методом конечных элементов.

Проведена серия экспериментов, которая позволила выявить основные критерии, отвечающие за сложность решения задачи, а также получить значения коэффициентов в соотношениях для оценки времени расчета. Эксперимент проводился на преподавателях, поэтому полученные выше результаты пригодны для оценки умения молодых преподавателей быстро решать задачи контрольно-самостоятельных мероприятий. В соотношениях (1)-(11) коэффициенты могут быть получены с помощью эксперимента на преподавателях, в этом случае результаты могут быть использованы для оценки сложности задач контрольно-самостоятельных мероприятий.

Анализ результатов показал, что начиная с ССН=СКН=2, время решения задачи при совпадении степени статической и кинематической неопределимости – задача методом конечных элементов решается быстрее, чем методом сил. Однако все это справедливо при допущении об отсутствии распределенной нагрузки в системе.

Список литературы

1. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. 10-е изд., перераб. и доп. (сер. Механика в технич. ун-те; т. 2) М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2000. 592 с.
2. Спицына Д.Н. Строительная механика стержневых машиностроительных конструкций: Учеб. пособие для вузов. / под ред. С. Д. Пономарева. М.: Высшая Школа. 1977. 248 с.
3. Белкин А.Е., Нарская Н.Л. Расчет плоских рам методом перемещений: учеб. пособие. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2013. 32 с.
4. Сабоннадьер Ж.-К., Кулон Ж.-Л. Метод конечных элементов и САПР. М.: Мир. 1989. 192 с.