

Вопросы минимизации затрат суммарной характеристической скорости, необходимой для обслуживания и восполнения спутниковых систем на некомпланарных круговых орбитах

09, сентябрь 2013

DOI: 10.7463/0913.0598333

Баранов А. А., Гришко Д. А.

УДК 629.786, 629.783

Россия, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

andrey_baranov@list.ru

dim.gr@mail.ru

Введение

В настоящее время всё большее распространение и реализацию получают идеи создания различных по функциональному назначению спутниковых систем (СС) глобального или локального покрытия. В связи с этим актуальным является вопрос минимизации затрат суммарной характеристической скорости (СХС), требуемой для формирования и поддержания таких систем. Помимо активных космических аппаратов (КА), современные глобальные СС имеют резерв на случай выхода одного из КА из строя, следовательно необходимо перевести резервный КА на нужную позицию с наименьшими затратами топлива, так как оно необходимо для дальнейшего поддержания конфигурации системы. Кроме того, в связи с существенным уменьшением размеров и массы КА дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ) ожидается появление СС ДЗЗ, которые будут состоять из КА, вследствие их малости выводимых на орбиту кластерным запуском, что потребует дальнейшего экономичного с точки зрения затрат СХС разведения их по целевым орбитам. И наконец, при последовательном облёте нефункционирующих крупногабаритных объектов космического пространства (т.н. космический мусор) с целью увода их с орбиты требуется так распланировать схему облёта, чтобы потери топлива активного КА были минимальны.

В данной работе рассмотрены переходы между двумя некомпланарными круговыми орбитами, для которых существуют четыре основных варианта начальных условий, отличающихся друг от друга количеством орбитальных параметров, по которым имеется рассогласование. Были рассмотрены все четыре случая и проанализированы эффекты, возникающие при определённых сочетаниях начальных данных.

В основе предлагаемой оптимизации затрат СХС на маневрирование лежит использование орбиты ожидания, скорость изменения долготы восходящего узла (ДВУ) для

которой отличается от таковой для начальной и конечной орбит. Подразумевается, что оператор КА задаёт возможное количество витков ожидания, исходя из разумного соотношения между продолжительностью перехода между орбитами и требуемыми для этого затратами СХС. Для нахождения параметров маневров КА на околокруговых орбитах можно воспользоваться результатами решения линеаризованных дифференциальных уравнений движения КА [1, 2].

1. Задача перевода КА в целевую точку вдоль орбиты ($u_1 \neq u_2$)

Представляется целесообразным сначала рассмотреть задачу об изменении положения КА вдоль орбиты на угол Δu ($\Delta u > 0$, если новая точка расположена впереди исходной). Угол Δu измеряется в долях витка, его максимальное по модулю значение не может быть более 0,5. Требуемое изменение позиции осуществляется за счет перевода КА на более низкую (если необходимо сдвинуть КА вперед вдоль орбиты) или на более высокую орбиту ожидания (промежуточную орбиту). Предполагается, что маневры выполняются на первом и последнем витках перелета, которые отстоят друг от друга на N витков. Затраты трансверсальной скорости, необходимые для перевода КА на угол Δu вдоль орбиты, определяются по формуле [3]:

$$\Delta V \approx \frac{2|\Delta u|}{3N} V_0, \quad (1)$$

где $V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}$, r_0 – радиус круговой орбиты.

За время нахождения на промежуточной круговой орбите вследствие разной скорости изменения ДВУ рабочей и промежуточной орбит произойдет уход КА из плоскости рабочей орбиты [3]:

$$\Delta \Omega = \frac{4}{3} \delta \Omega \Delta u, \quad (2)$$

где $\delta \Omega = -\frac{2\pi\epsilon}{\mu p^2} \cos i$.

Здесь $\delta \Omega$ – изменение ДВУ за один виток, вследствие влияния второго члена разложения потенциала гравитационного поля в ряд по сферическим функциям геоцентрической широты; i – наклонение орбиты, p – фокальный параметр (для круговых орбит $p=a$), $\epsilon = 2,634 \cdot 10^{-10} \text{ км}^5/\text{с}^2$, $\mu = \gamma M = 398600.44 \text{ км}^3/\text{с}^2$ (γ – гравитационная постоянная, M – масса планеты).

Отклонение $\delta \Omega$ можно компенсировать бинормальным импульсом, прикладываемым в точке с аргументом широты $u=90^\circ$ или $u=270^\circ$. Оптимальным является одновременное приложение трансверсальной и бинормальной составляющих импульсов скорости в начале и в конце маневрирования в некоторой точке орбиты с аргументом широты u_0 , что предполагает использование также влияния изменённого наклонения на скорость эволюции ДВУ [4]:

$$u_0 = \arctg \frac{2}{Nk \sin i}, \quad (3)$$

$$\text{где } k = \frac{2\pi\epsilon}{\mu p^2} \sin i. \quad (4)$$

В этом случае затраты СХС на перевод КА вдоль орбиты определяются как:

$$\Delta V = 2\sqrt{\Delta V_t^2 + \Delta V_z^2} = \frac{2}{3}|\Delta u|V_0\sqrt{\frac{1}{N^2} + \frac{48\Omega^2\sin^2 2i}{N^2\delta\Omega^2\sin^4 i + 4\cos^2 i}} \quad (5)$$

Анализ формулы (5) показывает, что затраты суммарной характеристической скорости в первом приближении находятся в линейной зависимости от величины рассогласования по фазе Δu (рис. 1).

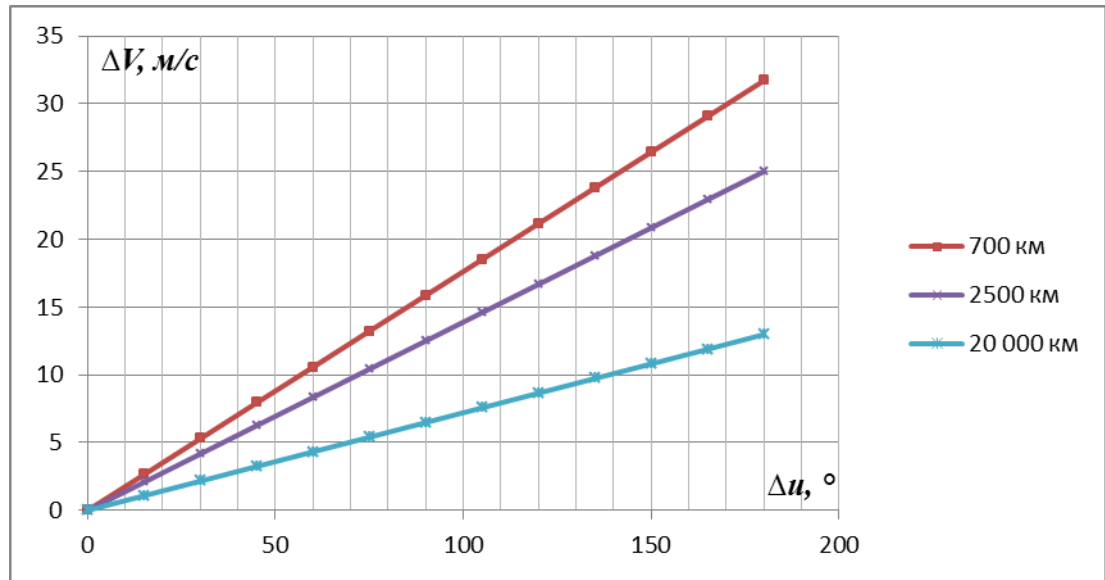


Рисунок 1. Зависимость затрат СХС перелёта от рассогласования по фазе для разных высот при наклонении 51.6° для 100 витков ожидания

Вместе с тем, сравнение энергетики переходов с использованием графиков, представленных на рис. 1, проводится при фиксированном числе витков для всех высот, что приводит к разному времени перелёта. Представляет интерес сравнение изохронных затрат скорости для разных высот, для чего необходимо пересчитать количество витков ожидания для всех высот на время, необходимое, к примеру, для совершения 100 витков на базовой высоте 300 км (рис. 2). Рис. 2 даёт представление о том, что для низких орбит (<2500 км) энергетика перевода КА в другую точку орбиты практически одинакова, но растёт с увеличением радиуса орбиты. При рассмотрении изохронного количества витков затраты характеристической скорости для высоких орбит больше соответствующих затрат для низких орбит, то есть наблюдается противоположная ситуация по сравнению с рис. 1.

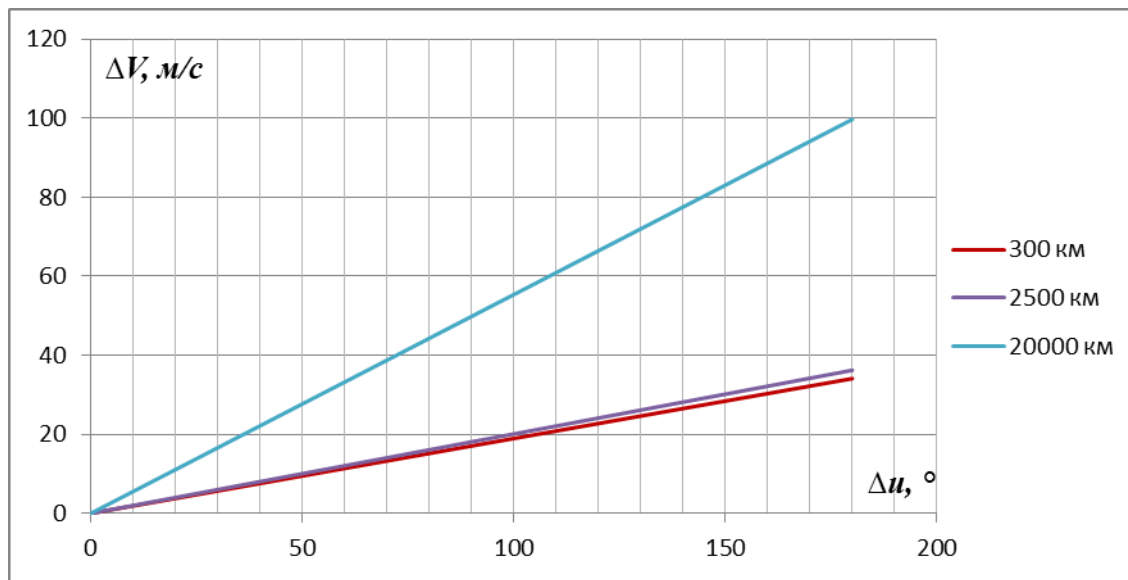


Рисунок 2. Зависимость затрат скорости перелёта от рассогласования по фазе для разных высот при наклонении 51.6° для изохронного количества витков N : $N=100$ для 300 км, $N=65$ для 2500 км, $N=13$ для 20000 км

В формуле (5) наклонение может быть варьируемым параметром при решении задач проектной баллистики. На рис. 3 приведены затраты скорости для высоты 700 км, необходимые для устранения рассогласования по фазе для различных наклонений. Видно, что максимум затрат скорости приходится на значения, близкие к 45° , а минимум на полярные и экваториальные орбиты.

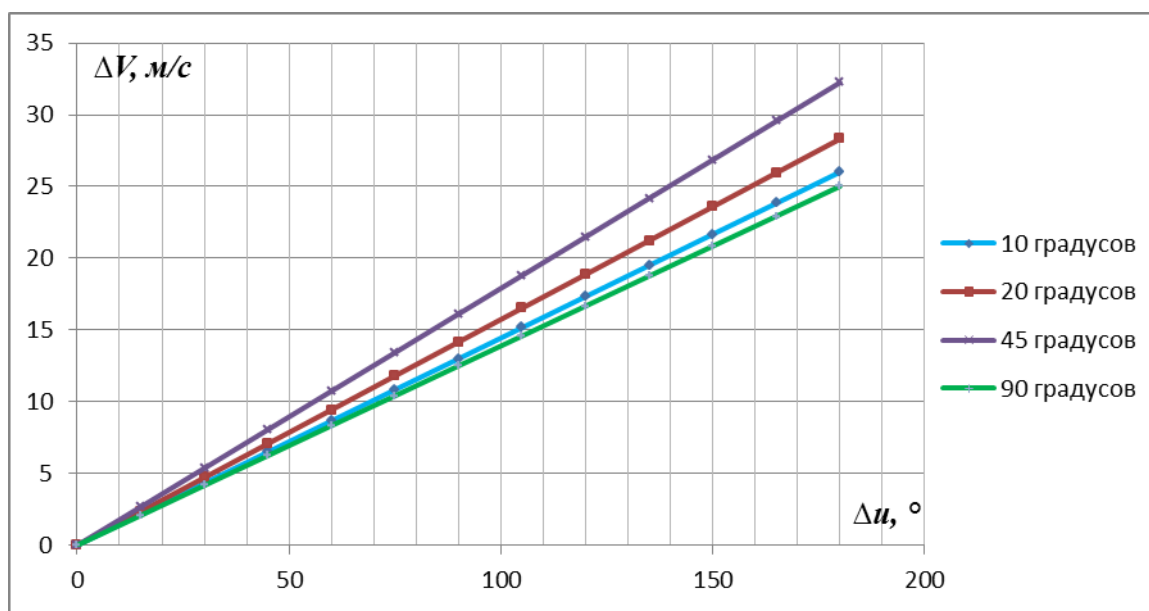


Рисунок 3. Зависимость затрат СХС от Δu для различных наклонений

Записав выражение для $\delta\Omega$ в виде: $\delta\Omega = \beta \cos i$, где $\beta = -\frac{2\pi\epsilon}{\mu r^2}$, и воспользовавшись формулой (5), можно показать, что максимум затрат суммарной характеристической скорости имеет место при наклонении:

$$i_{max} = \arcsin \sqrt{\frac{-8 + \sqrt{64 + 16\beta^2 N^2}}{2\beta^2 N^2}} \quad (6)$$

Так как i_{max} – функция фокального параметра и числа витков ожидания N , то рассмотрев варианты высот орбит 300 км, 700 км и 20000 км, можно констатировать, что, в отличие от зависимости i_{max} от N зависимость i_{max} от p крайне слабая, а точки $i=0$ и $i=\pi/2$ являются точками минимума (рис. 4) и не зависят от β . Как показывает анализ уравнения (5), с ростом величины фокального параметра зависимость ΔV от i ослабевает так, что для высот функционирования группировок ГЛОНАСС и GPS поверхность, показанная на рис. 4б, не содержит заметного экстремума по наклонению и фактически может рассматриваться только как функция фокального параметра.

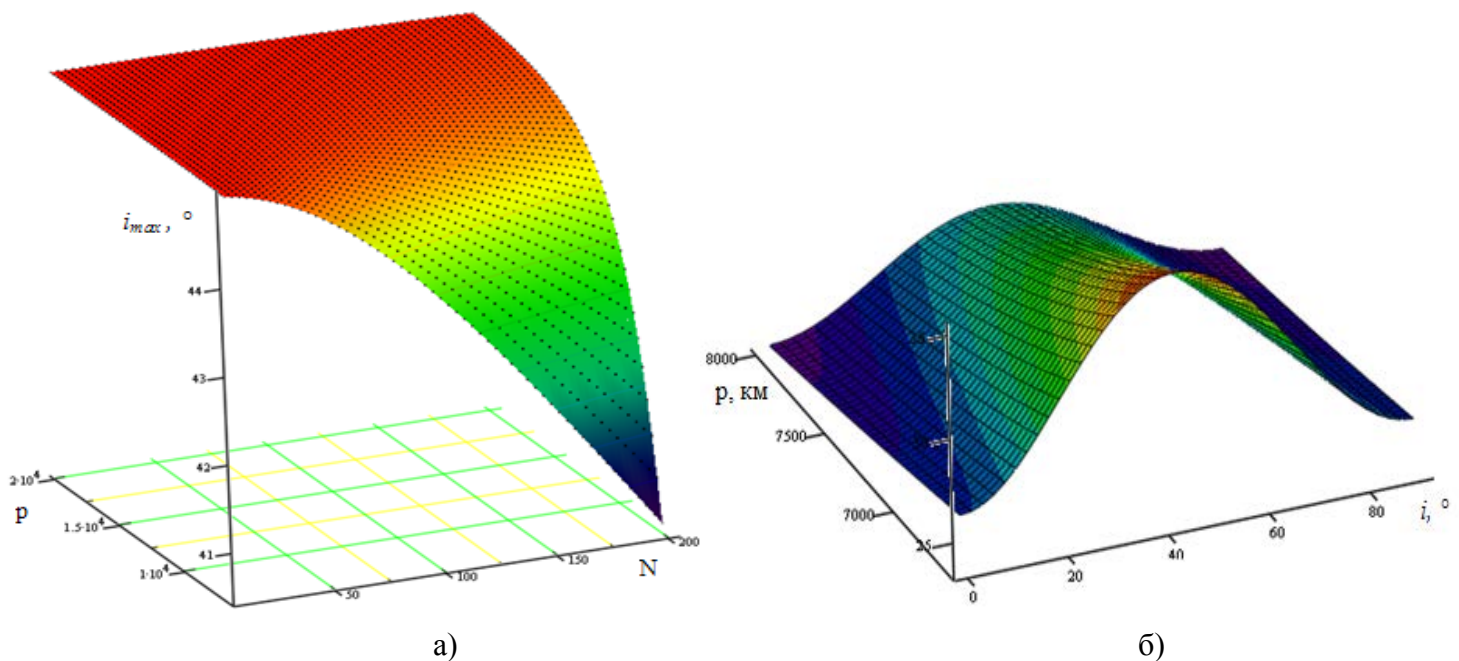


Рисунок 4 а) Зависимость величины наклонения, при котором достигается экстремум, от фокального параметра и количества витков перелёта б) Зависимость характеристической скорости перелёта от фокального параметра и наклонения орбиты при фиксированном числе витков перелёта $N=100$

Влияние наклонения орбиты на затраты СХС при изменении Δu в первую очередь необходимо рассматривать с качественной точки зрения. Как будет показано ниже, при рассмотрении общих случаев взаимного расположения начальной и конечной орбит, изменение наклонения в направлении значения 45° оказывается более затратным.

Затраты СХС, требуемой для перевода спутника в целевую точку орбиты, гиперболически зависят от количества витков ожидания на промежуточной орбите для всех высот. Рассмотрим изохронную зависимость по базовому числу витков для высот 700 км и 2500 км. Как видно из рис. 5, помимо существенного рассогласования при малых N существует такая область значений N , в которой кривые затрат СХС перелёта пересекаются.

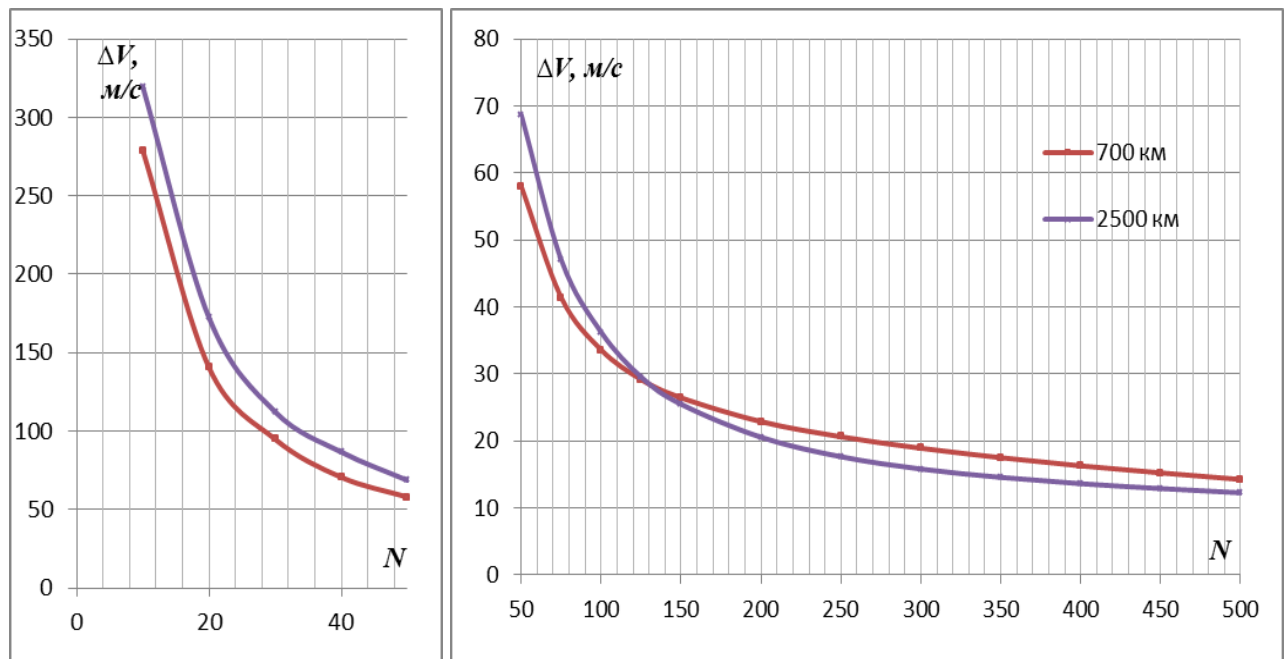


Рисунок 5. Зависимость затрат СХС от изохронных N для различных высот

Точка пересечения характеризуется резким уменьшением абсолютного значения производной функции ΔV по переменной N и может рассматриваться как некое компромиссное количество витков ожидания между временем перелёта и затратами на его осуществление. Вычисление этой точки для разной комбинации высот можно выполнить аналитически:

$$N = \sqrt{\frac{-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 4\gamma\alpha}}{2\gamma}}, \quad (7)$$

где:

$$\begin{cases} \gamma = A \cdot K + C \cdot K - A \cdot P \cdot D - A \cdot P \cdot F \\ \xi = A \cdot M + B \cdot K + C \cdot M - B \cdot P \cdot D - B \cdot P \cdot F - A \cdot P \cdot E \\ \alpha = B \cdot M - B \cdot P \cdot E \end{cases}$$

При этом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = \frac{-2\pi\varepsilon}{\mu} \\ A = \beta^2 \cdot \sin^4 i \\ B = 4 \cdot p_1^4 \\ C = 4 \cdot \beta^2 \cdot \sin^2 2i \\ D = T_1^2 \cdot T_2^2 \cdot \beta^2 \cdot \sin^4 i \\ E = 4 \cdot T_2^4 \cdot p_2^4 \\ F = 4 \cdot T_1^2 \cdot T_2^2 \cdot \beta^2 \cdot \sin^2 2i \\ K = T_1^4 \cdot \beta^2 \cdot \sin^4 i \\ M = 4 \cdot T_2^2 \cdot T_1^2 \cdot p_2^4 \\ P = \frac{p_1}{p_2} \end{array} \right.$$

T_1 и T_2 – периоды двух сравниваемых орбит, p_1 и p_2 – их фокальные параметры.

В результате применения (7) получаем, что кривые пересекаются в общем случае дважды. Например, для высот 700 и 2500 км формула (7) даёт значения $N_1=121$ и $N_2=844$ витка. Отметим, что принципиальное изменение динамики убывания функции $\Delta V(N)$ происходит именно в точке N_1 , которую можно рассматривать как точку компромиссного значения продолжительности перелёта. Рис. 5 и формула (7) применимы для оценки оптимального времени ожидания на фазирующей орбите путём нахождения точки пересечения кривой затрат скорости с аналогичной кривой, получающейся для орбиты с высотой, близкой к заданной.

2. Задача перевода КА в целевую точку орбиты, имеющей существенное отклонение долготы восходящего узла ($u_1 \neq u_2$, $\Omega_1 \neq \Omega_2$)

В случае необходимости перевода КА на рабочую орбиту, имеющую существенное отличие в ДВУ, затраты СХС на перелёт резко возрастают [5, 6]. Выражение для оптимальных затрат суммарной характеристической скорости для перевода КА в целевую точку орбиты с ДВУ, отличающейся на $\Delta\Omega$, имеет вид [3]:

$$\Delta V = \frac{2}{3} V_0 \sqrt{\frac{(\Delta u + n)^2}{(N+n)^2} + \frac{(3\Delta\Omega - (4\Delta u + 7n)\delta\Omega)^2}{(N+n)^2 \delta\Omega^2 \operatorname{tg}^2 i + \frac{4}{\sin^2 i}}} \quad (8)$$

Здесь угол Δu также выражен в долях витка, но его значения теперь принимаются лежащими в интервале $[0;1]$, n - разница в числе витков полета спутника и целевой точки, в которую надо перевести КА [5].

Зависимость затрат СХС от рассогласования в ДВУ при повороте против направления прецессии близка к линейной, но сильно зависит от наклонения орбиты, причём интенсивность роста затрат резко возрастает в интервале значений $i \in [60^\circ; 90^\circ]$ (рис. 6). Важным моментом является существенное сокращение затрат СХС при использовании естественной прецессии ДВУ (направление поворота плоскости совпадает с направлением

прецессии). Помимо уменьшения величины и скорости роста соответствующих значений СХС изменяется и направление кривизны кривой.

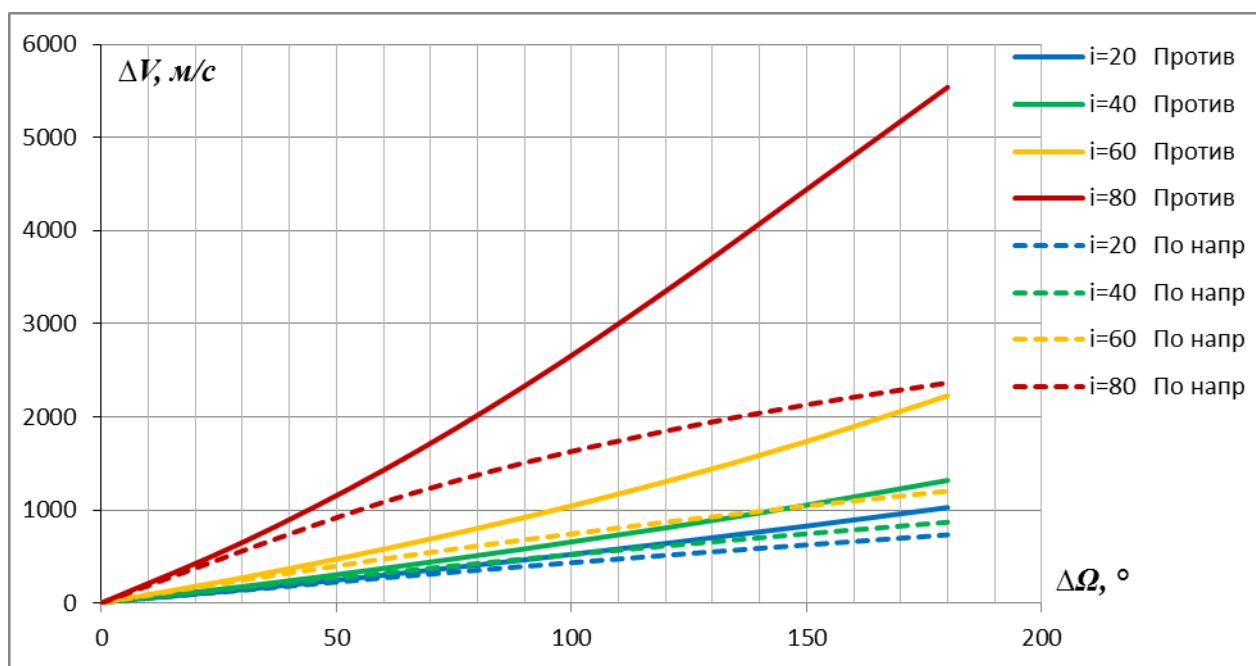


Рисунок 6. Зависимость затрат скорости от рассогласования по ДВУ для разных наклонений для высоты 700 км и $N=1000$ при повороте плоскости по и против направления естественной прецессии ДВУ

Влияние особенностей гравитационного поля Земли заметно проявляется и в случае малых отклонений по ДВУ, не видных на рис. 6. На рис. 7 представлены результаты расчётов для различных наклонений в малом диапазоне углов $\Delta\Omega$. Функция затрат СХС в этом случае представляет собой кривую с затухающими колебаниями, причём интенсивность этих колебаний зависит как от наклона, так и от величины большой полуоси (вид зависимости аналогичный, меньшим высотам соответствует большая интенсивность колебаний). Из рис. 7 видно, что для наклонений, лежащих в интервале 20° - 40° , эти колебания выражены наиболее ярко.

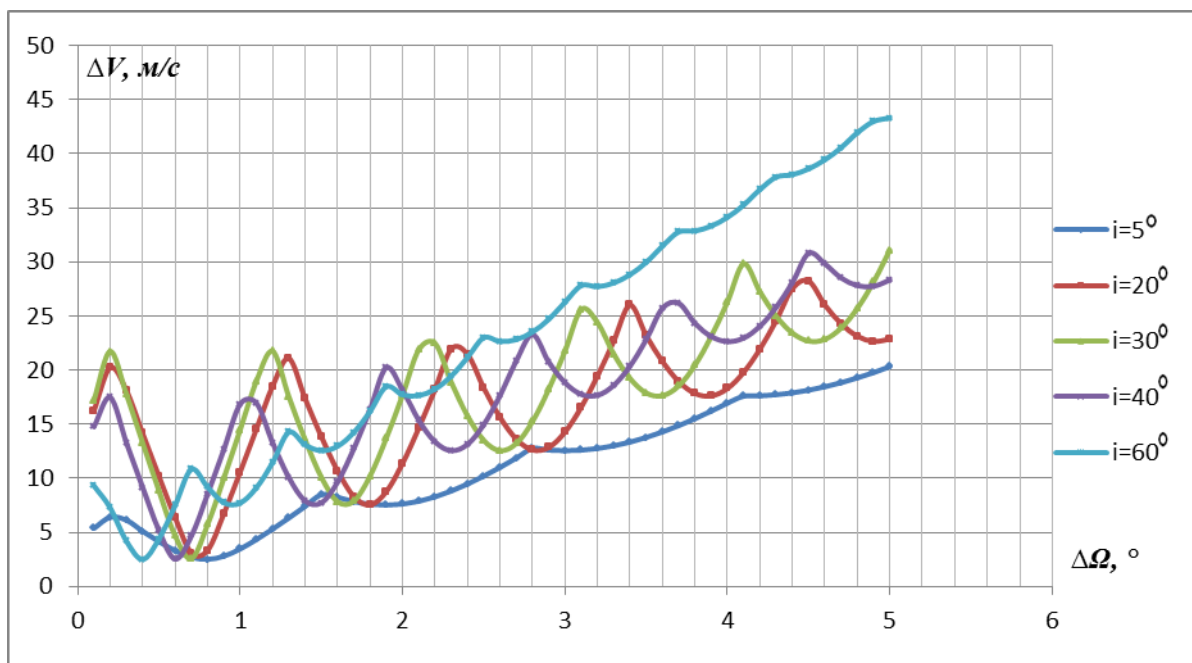


Рисунок 7. Зависимость затрат скорости от рассогласования по ДВУ для разных наклонений для высоты 700 км и $N=1000$

На основании рис. 7 можно сделать следующий важный вывод: при фиксированных наклонении и высоте начальной орбиты возможен перевод КА в плоскость с большей ДВУ, но с меньшими затратами скорости, причём отличие для средних наклонений при $N=1000$ может достигать 20 м/с (до 86%). Это обстоятельство имеет вполне логичное объяснение: при учёте фазирования вводится специальный параметр n , который по своему определению является целочисленным, что исключает возможность точной компенсации расхождений в ДВУ одной лишь операцией фазирования в плоскости орбиты и необходима непосредственная коррекция оставшегося отличия ДВУ. Ниже приведена зависимость дробной части абсолютного значения n от угла между плоскостями для высоты 700 км. График, представленный на рис. 8, однозначно связывает дробный остаток n с амплитудами колебаний затрат характеристической скорости перелёта (рис. 7): в том случае, когда разница в числе витков полета n близка к целочисленному значению и фазированием удаётся практически полностью совместить плоскости, функция $\Delta V(\Delta\Omega)$ имеет минимумы. Как видно из рис. 7, этот эффект слабо выражен для малых и высоких наклонений, и следовательно не может быть использован для КА ДЗЗ, которые в связи с требованиями к постоянству условий съёмки выводятся на солнечно-синхронные орбиты.

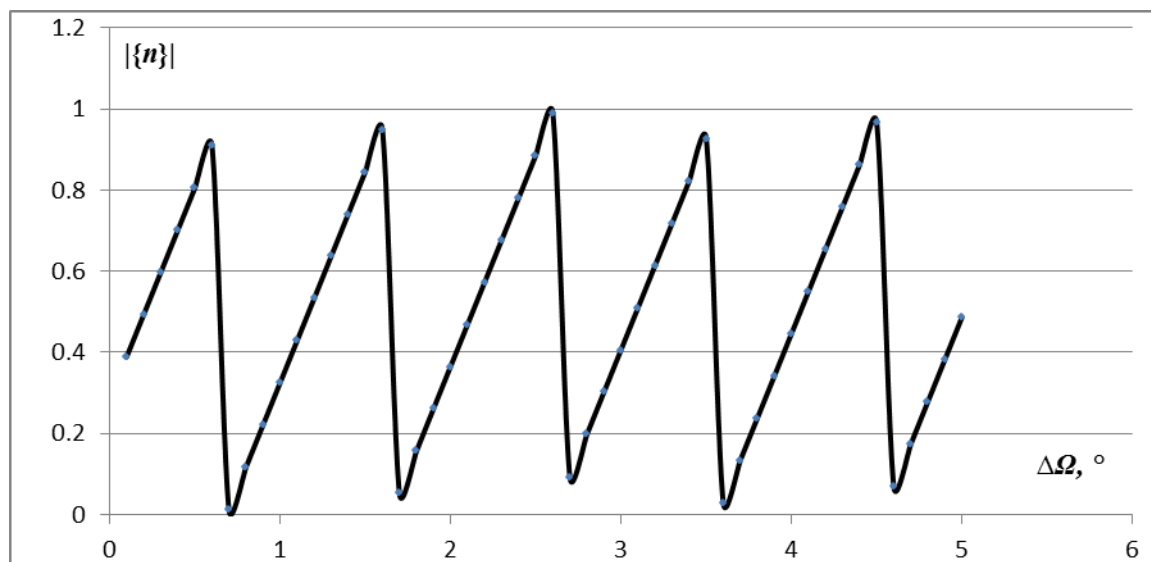


Рисунок 8. Зависимость дробной части абсолютного значения n от угла между плоскостями для высоты 700 км и $N=1000$ витков

При расчёте затрат суммарной характеристической скорости для изменения ДВУ на малые углы также необходимо учитывать знак $\Delta\Omega$. На рис. 9 приведены кривые затрат СХС для двух наклонений для случая поворота плоскости на углы 0.1° – 5° против и по направлению прецессии ДВУ для высоты 700 км. Из графика, представленного рис. 9, видно, что при развороте плоскости против направления прецессии кривая затрат СХС находится в противофазе с колебаниями кривой, полученной для попутного разворота, но при этом имеет место незначительный сдвиг вследствие влияния эволюции ДВУ. Вследствие малости разности ДВУ на рис. 9 не наблюдается резкого отличия соответствующих кривых, которое имеет место на рис. 6.

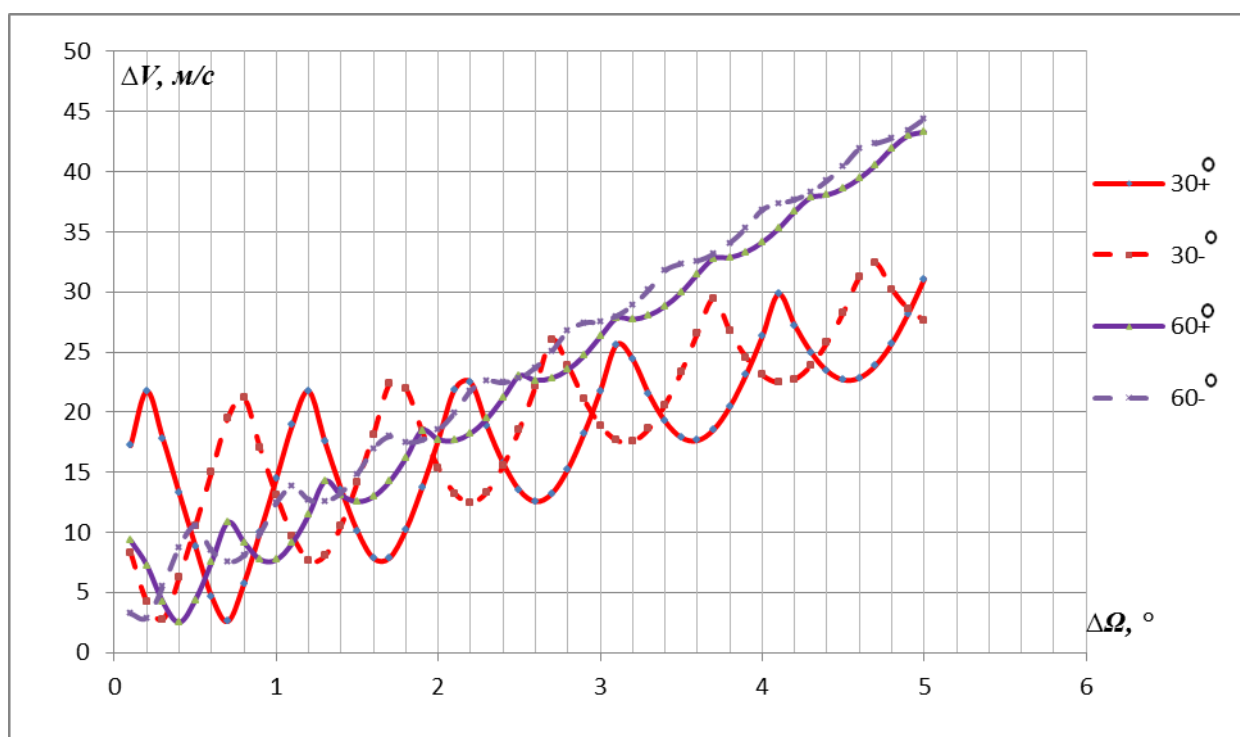


Рисунок 9. Затраты скорости, необходимые для поворота плоскости для наклонений 30° и 60° против направления прецессии (+) и по направлению прецессии (-)

Влияние направления поворота плоскости также хорошо заметно на зависимости СХС от числа витков перелёта для разной величины угла рассогласования орбит по ДВУ (рис. 10). С ростом значения требуемого угла поворота плоскости это влияние всё более заметно в области относительно малых значений N . Разворот плоскости в направлении естественной прецессии линии узлов позволяет, к примеру, при требуемом угле разворота плоскости на 30° получить выигрыш в 60 м/с в случае 450 витков ожидания (≈ 31 день).

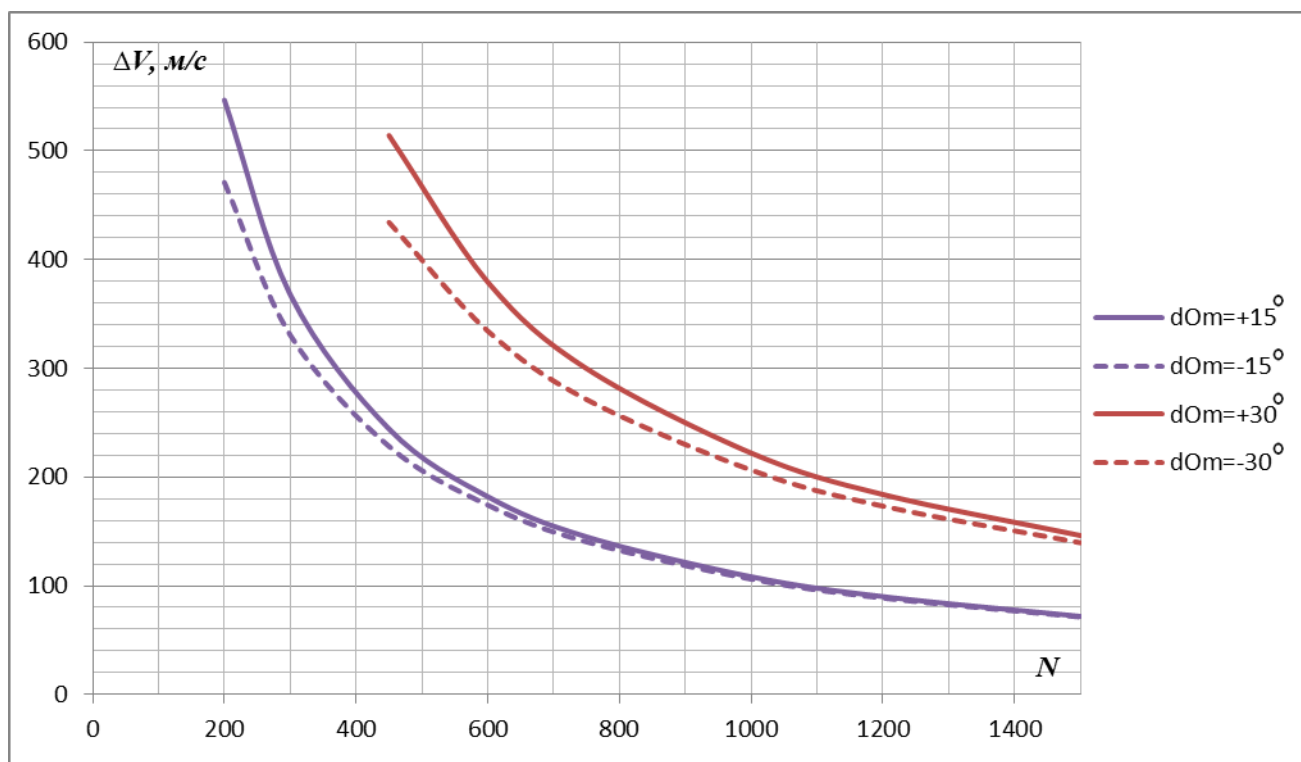


Рисунок 10. Зависимость затрат характеристической скорости от количества витков для разных направлений и величин изменения ДВУ для высоты 700 км.

Из графика, представленного на рис. 10, видно, что при фиксированной величине угла поворота плоскости для заданной орбиты существует такое значение N витков ожидания, при котором затраты СХС, необходимой для поворота плоскости по или против направления прецессии практически одинаковы. Например, для случая высоты 700 км, при наклонении 51.6° при требуемой компенсации $\Delta\Omega = \pm 15^\circ$ значение граничного N близко к 800 (≈ 55 дней). Этот эффект может быть учтён при проектировании схем обслуживания группировки КА с разных орбитальных станций. В целом, можно сказать, что при решении данной задачи использование естественной прецессии ДВУ в любом случае заметно уменьшает затраты СХС, и чем меньше времени даётся на манёвр, тем больше выигрыш по требуемому значению ΔV .

Из рис. 11 видно, что характер поведения кривой затрат СХС для малых отклонений по ДВУ качественно зависит от количества витков, которое задаётся исходя из текущей обстановки. Заметно, что кривая СХС выходит на колебательный режим в том случае, если число витков ожидания на промежуточной орбите превышает 500. То есть можно говорить о таком граничном числе витков ожидания, начиная с которого нецентральность гравитационного поля приводит к длительным колебаниям кривой СХС. Вместе с тем, из рис. 11 заметно, что отличие кривых для $N=1000$ и для $N=1500$ незначительно.

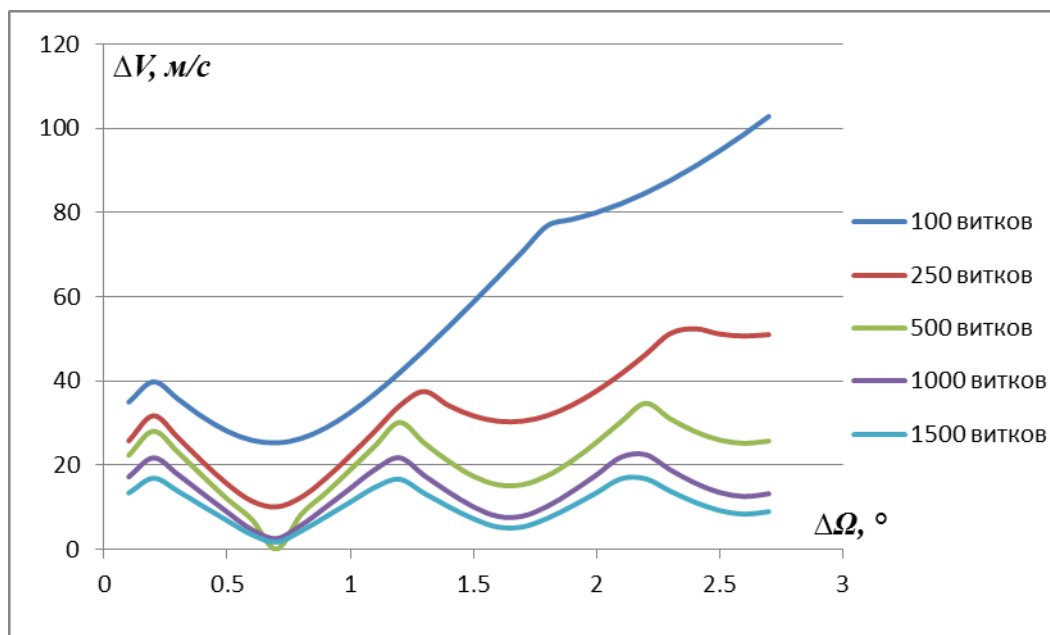


Рисунок 11. Характер поведения кривой СХС для наклона $i=30^\circ$ и высоты 700 км при разном количестве витков ожидания

Диапазон изменения затрат СХС при различных отклонениях по фазе $\Delta u \in [0^\circ; 180^\circ]$ в случае наличия разницы в ДВУ представляет собой величину, которая для наклона 51.6° и $\Delta\Omega=2^\circ$ не превышает 6 м/с по значению. С ростом значений требуемого угла поворота $\Delta\Omega$, рассогласование по фазе можно не учитывать при оценке общей энергетики перелёта.

3. Исследование затрат характеристической скорости перелёта, требуемой для перевода КА в другую точку орбиты, имеющей отличие в долготе восходящего узла и большой полуоси ($u_1 \neq u_2, a_1 \neq a_2, \Omega_1 \neq \Omega_2, i_1 = i_2$)

Задача перевода КА в заданную точку конечной орбиты здесь (и далее в разделе № 4) рассматривается в самой общей постановке, когда начальная и конечная орбиты имеют близкие, но разные значения большой полуоси, отклонение ДВУ может быть любым по величине. Кроме того, в разделе №4 орбиты также имеют отличие по наклонению, в этом разделе считается, что наклонения у обеих орбит равны. Задачи такого типа возникают при формировании спутниковых систем, возвращении одним аппаратом нескольких спутников с орбит, доставке грунта с других планет и их спутников и т.д.

Можно записать следующие выражения для нахождения составляющих импульсов [5, 7]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta V_{tI} = V_0 \left[\frac{N\Delta a}{2(N+n)a_0} - \frac{\Delta u^* + n}{3(N+n)} \right], \\ \Delta V_{tII} = V_0 \frac{\Delta a}{2a_0} - \Delta V_{tI}, \\ \Delta V_{zI} = \frac{V_0}{N+n} \left(N\Delta i - \frac{4(\Delta u^* + n)\delta\Omega + 3(\delta\Omega n - \Delta\Omega)}{3\operatorname{tg} i \delta\Omega} \right), \\ \Delta V_{zII} = V_0 \Delta i - \Delta V_{zI}. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (9a) \\ (9б) \\ (9в) \\ (9г) \end{array}$$

Оптимальным будет значение n , доставляющее минимум функционалу:

$$\Delta V = \sqrt{\Delta V_{tI}^2 + \Delta V_{zI}^2} + \sqrt{\Delta V_{tII}^2 + \Delta V_{zII}^2} \quad (10)$$

Разницу в количестве витков полёта активного КА и КА-цели в первом приближении можно определить как [5, 7]:

$$n = \frac{3\Delta\Omega}{7\delta\Omega} - \frac{4}{7}\Delta u^*, \quad (11)$$

где $\Delta u^* = \frac{\Delta u}{2\pi}$.

Одномерная оптимизация по n может быть выполнена итерационно, учитывая, что формула (11) даёт хорошее приближение для этого параметра. Необходимо помнить, что n – целое число, следовательно, только за счет подбора n нельзя убрать все отклонение ДВУ, но остающаяся часть не будет превышать $\delta\Omega$ и легко устраняется с помощью ΔV_z .

При необходимости поворота плоскости орбиты против направления прецессии затраты СХС находятся в прямой зависимости от изменения большой полуоси для разных высот полёта. Из рис. 12 видно, что для низких орбит (300-700 км) рост затрат на изменение большой полуоси происходит практически одинаково. С ростом высоты крутизна кривой постепенно уменьшается, а интенсивность роста затрат СХС по равным высотным промежуткам возрастает. При повороте плоскости орбиты по направлению линии прецессии график СХС представляет собой кривую, имеющую минимум при определённой величине Δa , причём положение точки минимума различно в зависимости от базовой высоты, сама точка смещается вправо и вверх при росте высоты исходной орбиты, при этом кривая СХС постепенно распрямляется. Происходит это вследствие того, что с ростом высоты при фиксированном числе витков ожидания влияние нецентральности гравитационного поля уменьшается обратно пропорционально квадрату фокального параметра. Сдвиг точки минимума вверх с ростом высоты рабочей орбиты хорошо согласуется с результатами, представленными на рис. 2 в задаче фазирования по аргументу широты, где напрямую используется изменение большой полуоси.

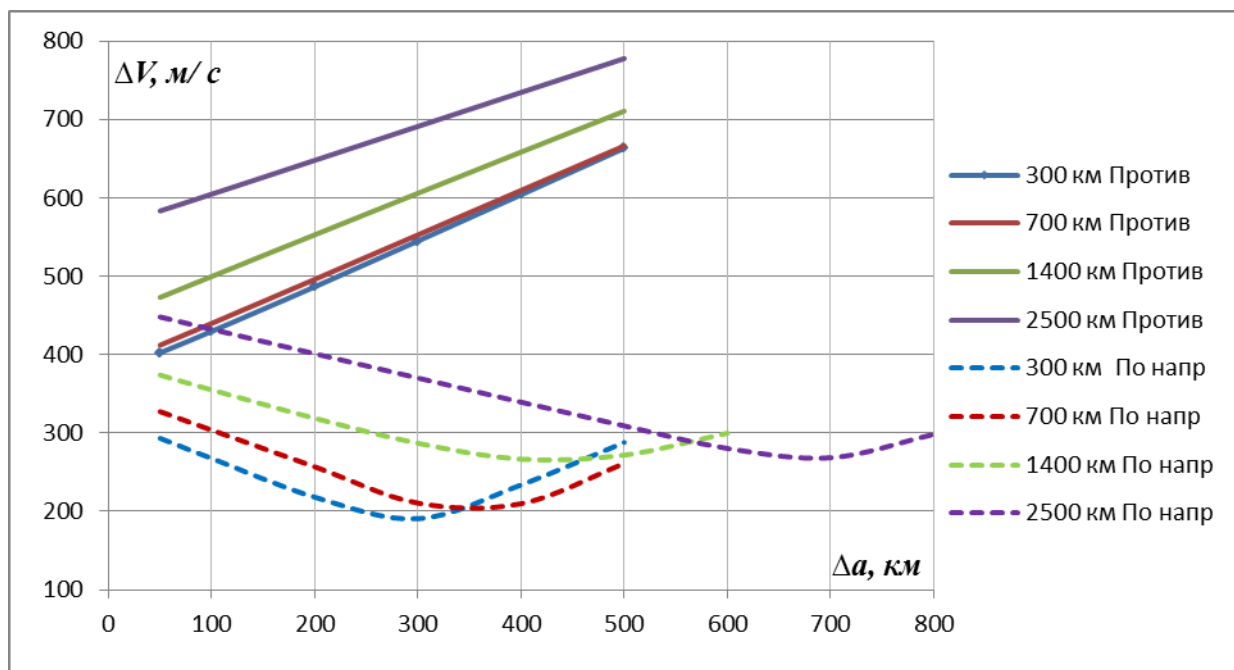


Рисунок 12. Зависимость СХС от изменения большой полуоси для разных высот, $\Delta u=180^\circ$, $i=51.6^\circ$, $N=100$, $\Delta\Omega=+5^\circ$ (против направления прецессии ДВУ) $\Delta\Omega=-5^\circ$ (по направлению прецессии ДВУ)

При необходимости поворота плоскости против направления прецессии затраты СХС находятся в прямой зависимости от изменения большой полуоси для разного числа витков перелёта. Как видно из рис. 13, для текущих начальных условий, начиная с $N=500$, смещение линий происходит более плавно, что в целом подтверждает результат, полученный в конце второго раздела.

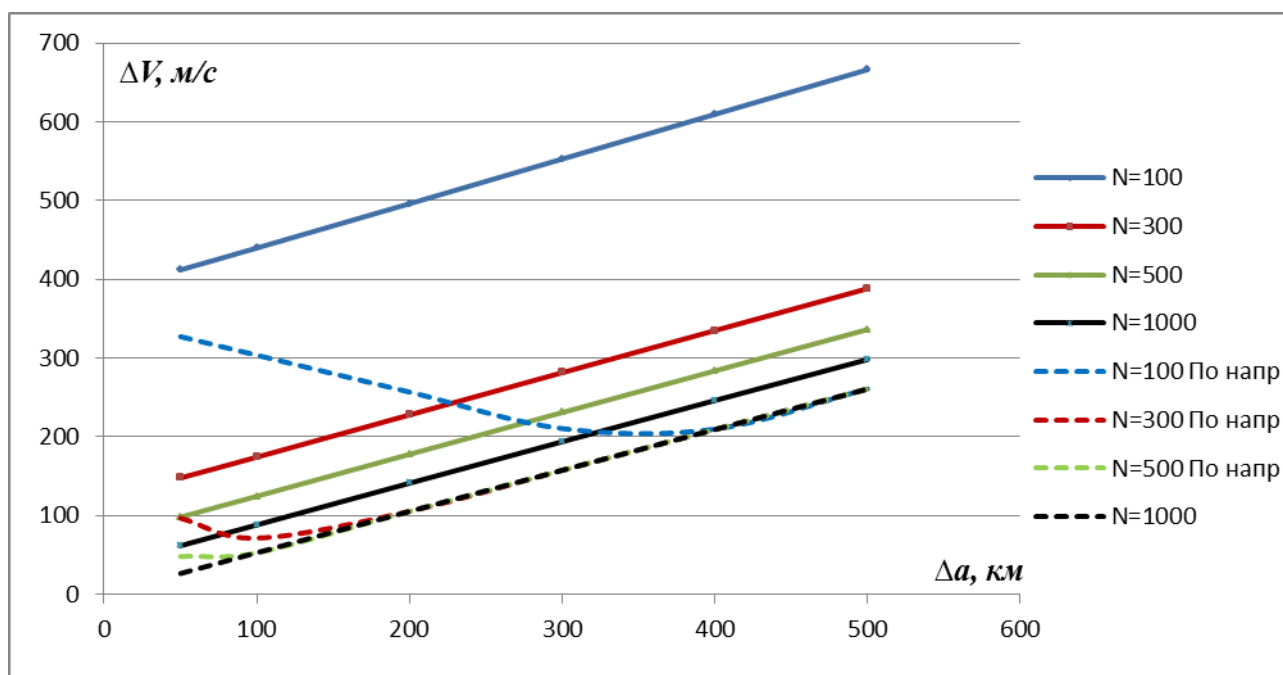


Рисунок 13. Зависимость СХС от изменения большой полуоси для разного числа витков $\Delta u=180^\circ$, $i=51.6^\circ$, $h=700$ км, $\Delta\Omega=+5^\circ$ (против направления прецессии ДВУ) $\Delta\Omega=-5^\circ$ (по направлению прецессии ДВУ)

При необходимости поворота плоскости по направлению прецессии кривая СХС вогнута и сильно зависит от количества витков перелёта и величины Δa . Физический смысл наблюдаемой асимптоты заключается в следующем: затраты СХС можно разделить на требуемые для изменения большой полуоси и требуемые для изменения ДВУ. Деление это условное, так как ДВУ корректируется не только импульсным способом, но ещё и естественной прецессией, за счёт которой система имеет резерв скорости при движении по орбите ожидания. Этот резерв СХС зависит как от числа витков ожидания, так и от угла рассогласования по ДВУ. В том случае, когда число витков ожидания оказывается избыточным или затраты на изменение большой полуоси начинают превышать затраты на боковую коррекцию, – резерв исчерпывается и СХС манёвра начинает расти. Таким образом, с ростом N и уменьшением разницы в большой полуоси положение точки минимума смещается влево и вниз. Для рассмотренного $\Delta\Omega = -5^\circ$ величина $N=1000$ избыточна даже при $\Delta a = 50$ км, то есть минимум будет наблюдаться при меньшей величине изменения высоты.

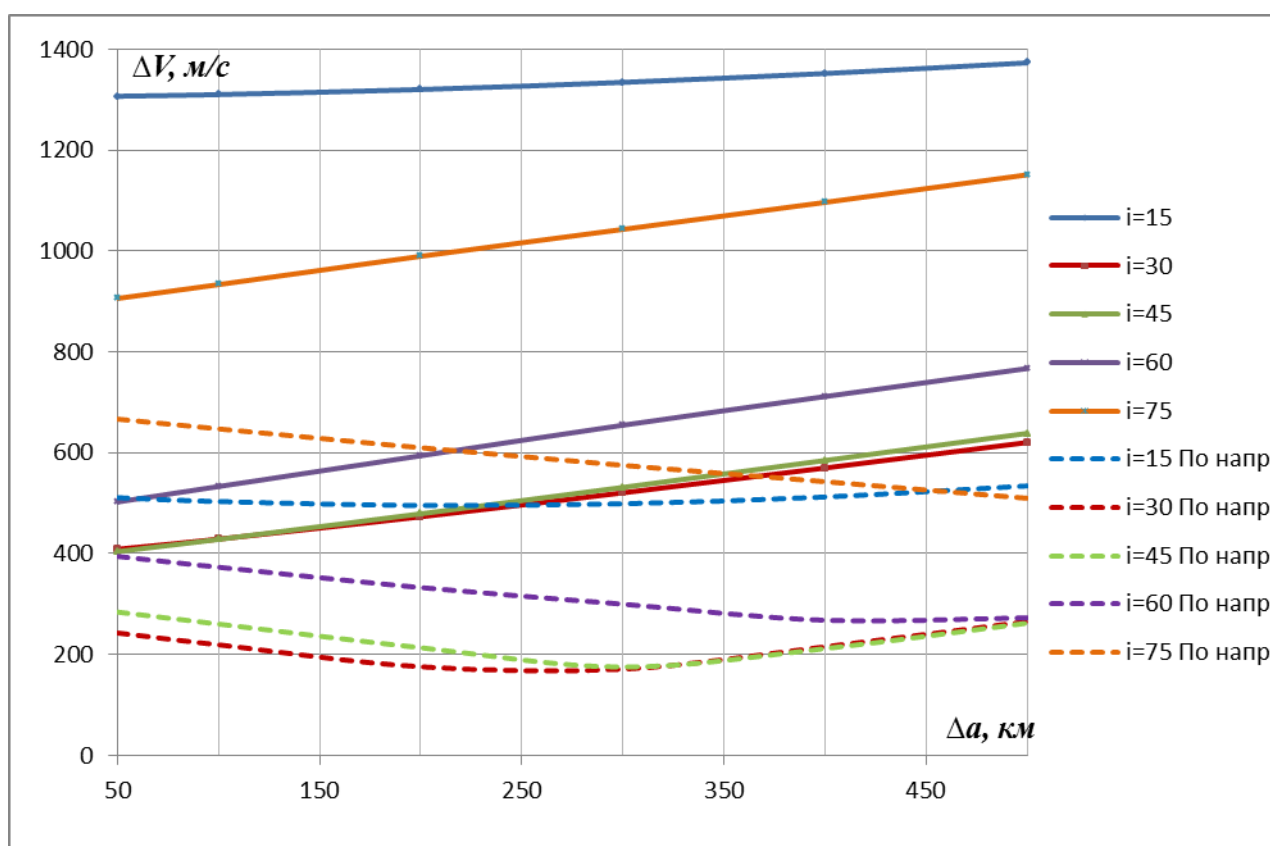


Рисунок 14. Зависимость СХС от изменения большой полуоси для разных наклонений $\Delta u = 180^\circ$, $h_0 = 700$ км, $N = 100$, $\Delta\Omega = +5^\circ$ (против направления прецессии ДВУ) $\Delta\Omega = -5^\circ$ (по направлению прецессии ДВУ)

Затраты скорости при необходимости поворота плоскости против направления прецессии находятся в прямой зависимости от изменения большой полуоси для разных наклонений. Как видно из рис. 14, минимум СХС приходится на область наклонений 30° – 45° градусов. Причём для малых изменений высоты меньшие затраты соответствуют наклонению 45° , а для бóльших изменений высоты – наклонению 30° . Этот результат согласуется с рис. 7 из второго раздела, где этим значениям i соответствовали кривые СХС, имеющие наиболее ярко выраженный колебательный характер. Кроме того, при стремлении к этому диапазону

уменьшается интенсивность роста затрат СХС по равным промежуткам наклонов, особо отметим, что график СХС не симметричен относительно оптимального наклона. При повороте плоскости по направлению прецессии также выгодно изменять Δa при наклонениях 30° - 45° , но график СХС нелинейный и имеет точку минимума в месте соприкосновения с наблюдаемой на рис. 14 асимптотой. Изменение положения точки минимума объясняется так же, как это было показано выше.

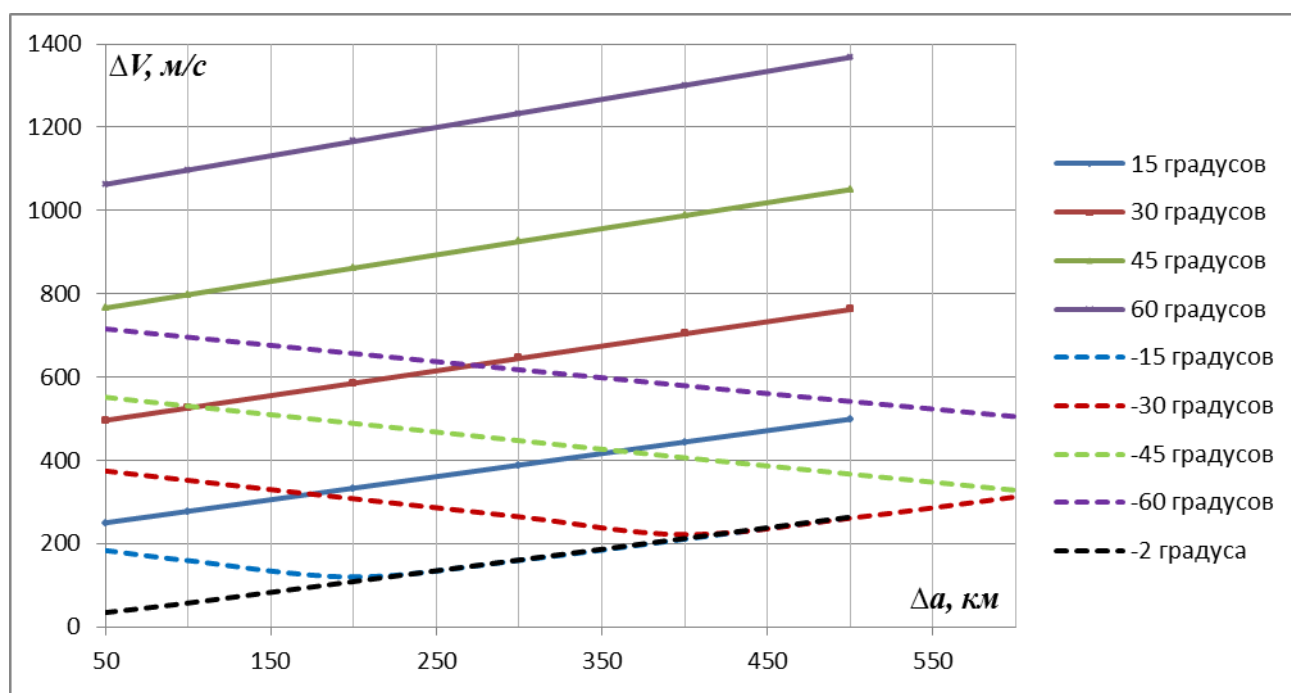


Рисунок 15. Зависимость СХС от изменения большой полуоси для разных различий в ДВУ
 $\Delta u=180^\circ$, $h=700$ км, $\Delta\Omega=5^\circ$, $N=100$, $i=51.6^\circ$

При повороте плоскости орбиты против направления прецессии затраты скорости находятся в прямой зависимости от изменения большой полуоси для разных рассогласований в ДВУ. Как видно из рис. 15, шаг между кривыми при равномерном увеличении рассогласования по ДВУ меняется слабо. Характерно, что для двух орбит, имеющих разницу в наклонении $i_2-i_1=15^\circ$, затраты СХС, необходимые для увеличения большой полуоси на 500 км для орбиты i_1 , равны затратам СХС, необходимым для увеличения большой полуоси на 50 км для орбиты i_2 .

В случае поворота плоскости по направлению прецессии кривая СХС вогнута и сильно зависит от величины угла поворота плоскости и величины Δa . При угле поворота в 2 градуса зависимость близка к линейной, то есть можно считать, что кривая в 0-2 градуса является асимптотой для всех кривых с большим по модулю отличием в ДВУ, так как в этом случае затраты СХС обусловлены только изменением большой полуоси. Рост Δa способствует увеличению пространства для манёвра, что сказывается в уменьшении СХС до соприкосновения с асимптотой, точка пересечения является одновременно точкой минимума СХС, её положение зависит от величины требуемого угла поворота плоскости.

4. Исследование затрат характеристической скорости перелёта, требуемой для перевода КА в другую точку орбиты в общем случае ($u_1 \neq u_2$, $\Omega_1 \neq \Omega_2$, $a_1 \neq a_2$, $i_1 \neq i_2$)

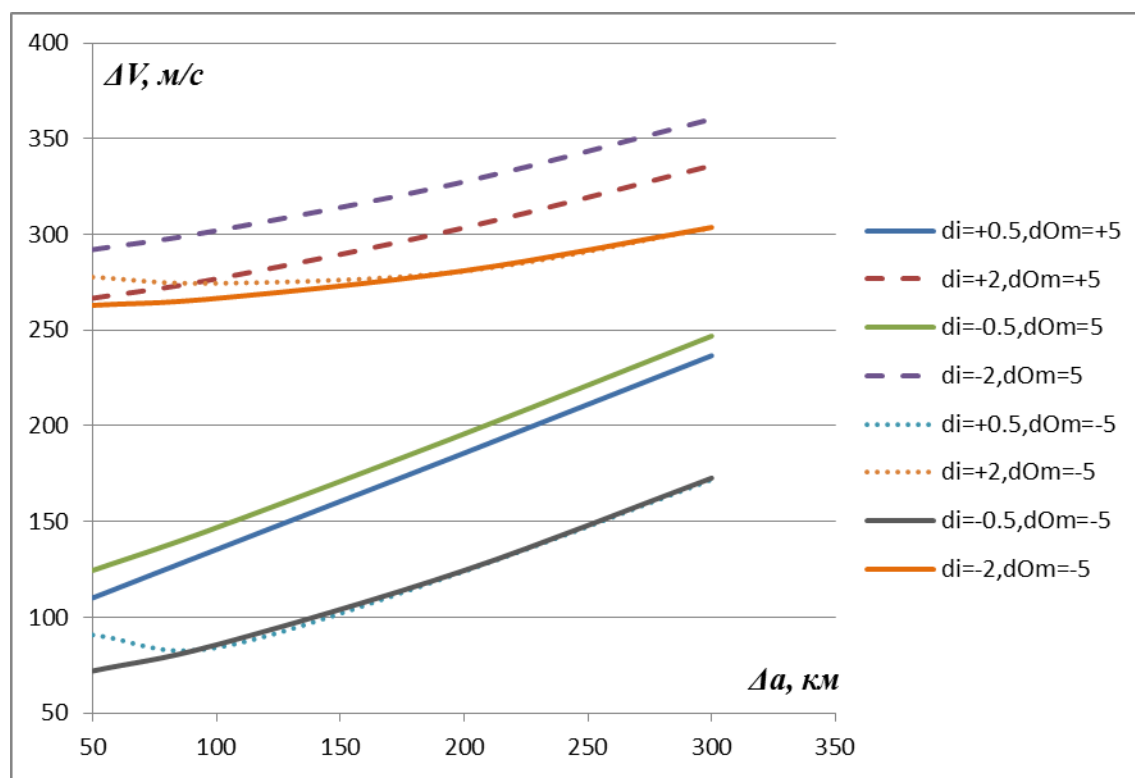


Рисунок 16. Затраты СХС, необходимые для изменения наклона для разных Δa , $\Delta u = 180^\circ$, $h_0 = 700$ км, $\Delta \Omega = 5^\circ$, $N = 500$, $i = 51.6^\circ$

При повороте плоскости против направления прецессии затраты СХС находятся практически в прямой зависимости от изменения большой полуоси для разного изменения наклона. Здесь имеет смысл учитывать направление изменения наклона: поворот к углу $I = 45^\circ$ оказывается более затратным. Аналогичный, но противоположный эффект имеет место при повороте плоскости орбиты по направлению прецессии. Кроме того, как видно из рис. 16, в этом случае с увеличением разницы по величине большой полуоси отличные по направлению изменения Δi кривые сходятся, что можно объяснить преобладающим влиянием модуля Δi на затраты СХС, при этом точка соприкосновения смещается вправо и вверх с ростом требуемого изменения Δi . Заметно, что совпадающее с прецессионным направление поворота плоскости орбиты по $\Delta \Omega$ существенно уменьшает затраты на перелёт для малых Δi . С ростом требуемого изменения Δi при малом изменении большой полуоси на значениях потребной СХС сильно сказывается сочетание $\Delta a - \Delta i$ (с учётом знака последнего), при больших Δa поворот по направлению прецессии однозначно является более выгодным.

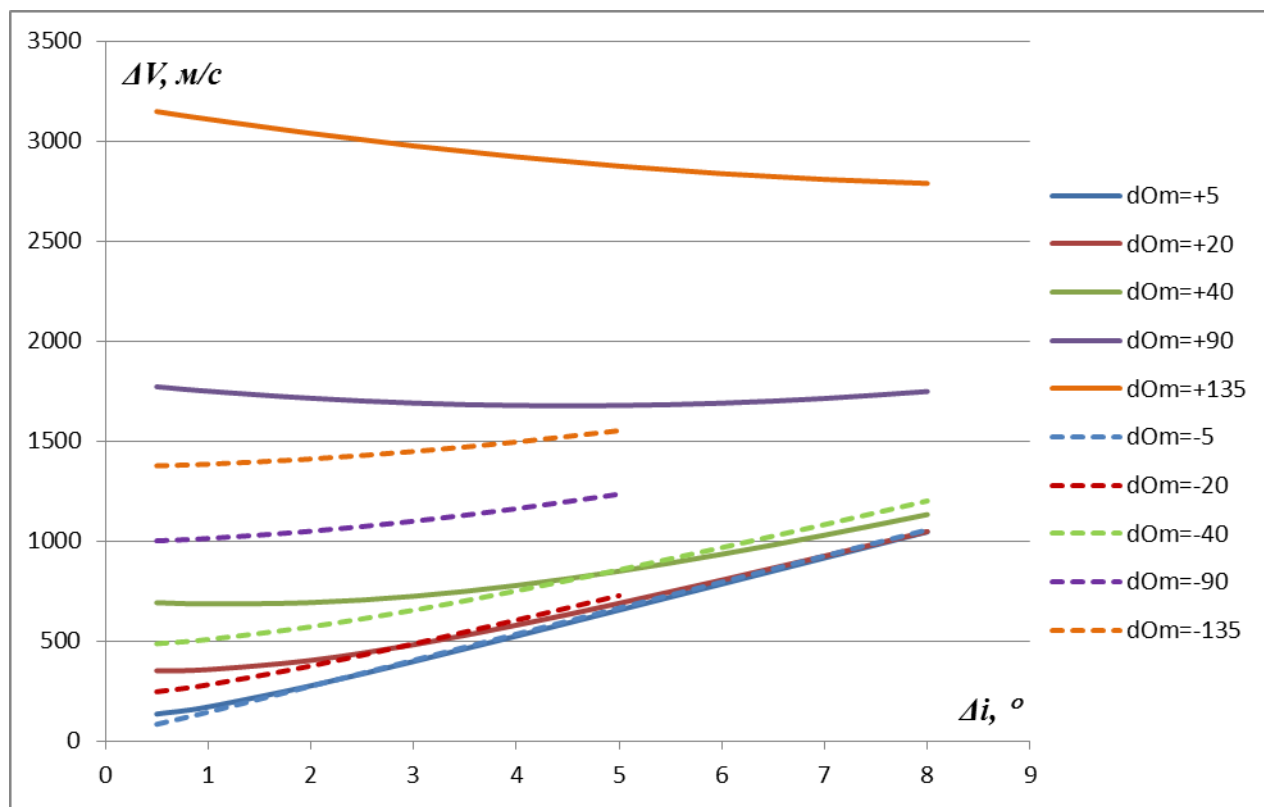


Рисунок 17. Затраты СХС, необходимые для изменения наклона для разных $\Delta\Omega$,
 $\Delta a=100$ км, $h=700$ км, $\Delta u=180^\circ$, $N=500$, $i=51.6^\circ$

При повороте плоскости против направления прецессии затраты СХС находятся в неоднозначной зависимости от изменения наклона для разных различий в ДВУ. Из рис. 17 видно, что по мере роста требуемого изменения наклона все кривые сходятся. Характерным моментом является появление заметного экстремума для рассогласований в ДВУ около 90 градусов и более. При повороте плоскости по направлению прецессии существует такое значение Δi , при котором изменяется выгодное направление изменения ДВУ (рис.17). Положение этой точки смещается право и вверх с ростом $\Delta\Omega$.

Для малого изменения наклона при фиксированных других параметрах существует компромиссное число витков перелёта. В отличие от раздела № 1 вычисление этой точки аналитически представляет собой трудности, связанные с тем, что параметр n находится итерационно, его аналитическая оценка отличается от уточнённой при наличии у орбит рассогласований по всем параметрам. Вместе с тем, из рис. 18 заметно, что с ростом требуемого изменения Δi компромиссное значение N уменьшается, сама кривая СХС становится более крутой. Небольшие вариации начальных условий показывают, что при фиксированном значении N затраты СХС уменьшаются с уменьшением Δa и при использовании прецессии ДВУ, увеличение затрат СХС происходит вследствие увеличения абсолютного значения $\Delta\Omega$ и при изменении Δi в сторону значения 45° .

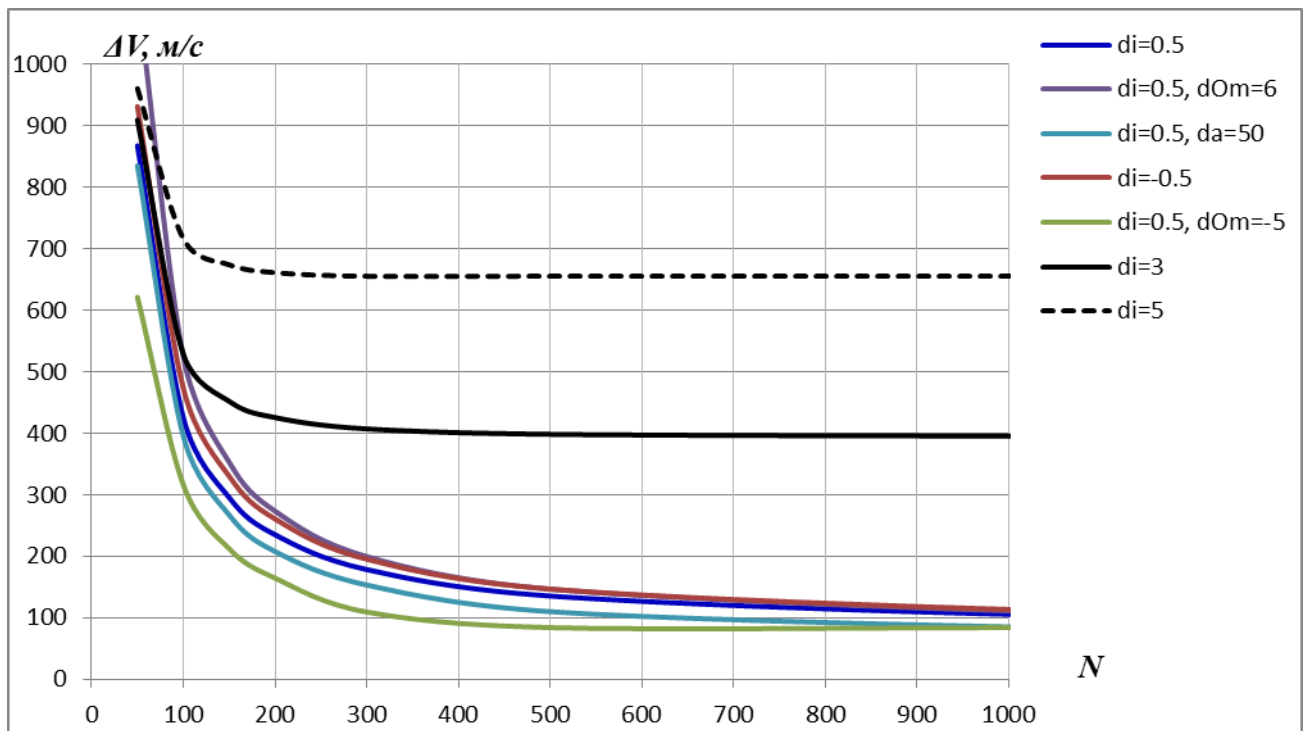


Рисунок 18. Зависимость затрат СХС от количества витков для разных отличий в наклонениях и малых вариациях отличий в ДВУ и большой полуоси

Затраты скорости находятся в неоднозначной зависимости от изменения наклонения для разных высот. Для низкоорбитальных систем зависимость близка к прямой, для высокоорбитальных систем функция имеет экстремум. Как видно из рис. 19, в зависимости от требуемой величины Δi изменять наклонение с учётом использования естественной прецессии ДВУ выгодно на разных высотах. Кроме того, здесь, как и ранее, заметно, что в зависимости от величины Δi выигрышное направление поворота плоскости орбиты по ДВУ может меняться.

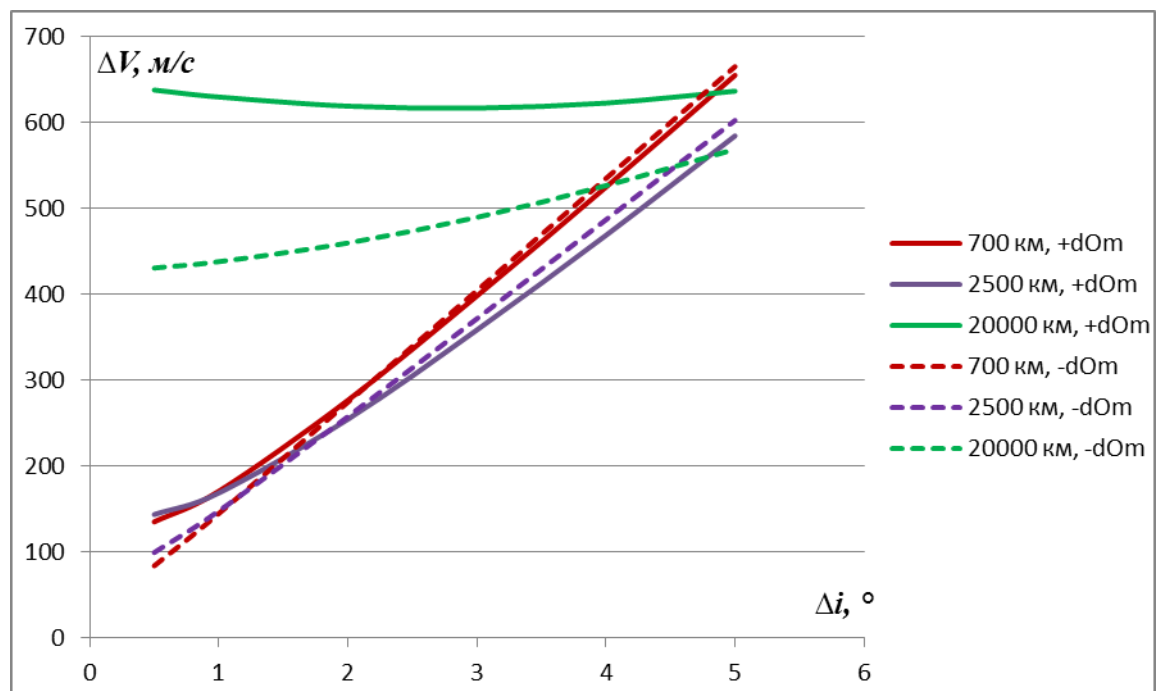


Рисунок 19. Затраты скорости, необходимые для изменения наклонения для разных h , $\Delta a=100$ км, $N=500$, $\Delta u=180^\circ$, $\Delta \Omega=5^\circ$, $i=51.6^\circ$

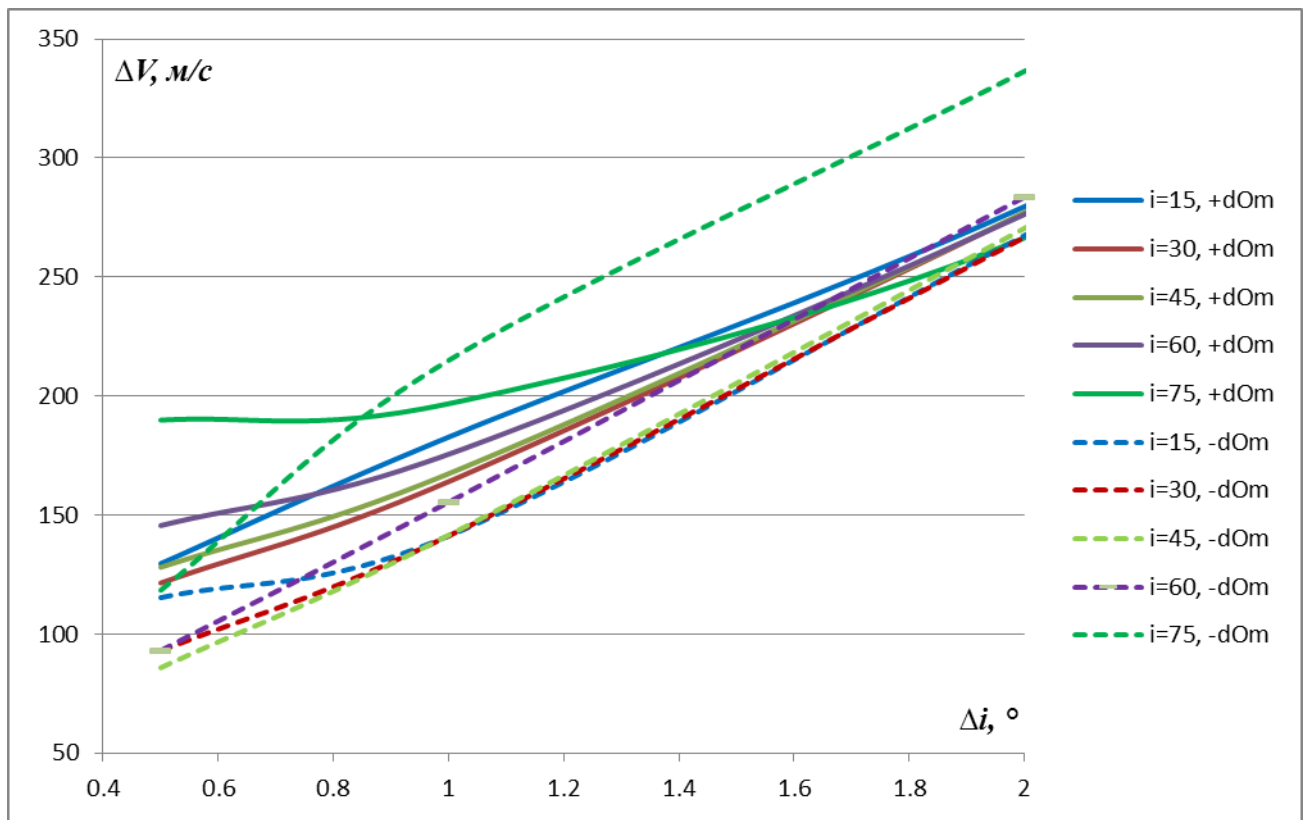


Рисунок 20. Затраты скорости, необходимые для изменения наклона для разных i ,
 $\Delta a=100$ км, $h=700$ км, $\Delta u=180^\circ$, $\Delta \Omega=+5^\circ$, $i=51.6^\circ$, $N=500$

Затраты скорости находятся в определённой зависимости от изменения наклона при разных наклонах, эта зависимость отличается от прямой при малых Δi (рис. 20). При развороте плоскости по направлению прецессии уменьшение затрат СХС лучше проявляется для наклонов 30° - 45° . Для больших наклонов заметно изменение направления вогнутости кривых СХС. При больших Δi затраты на изменение наклона преобладают, поэтому для данных начальных условиях при $\Delta i > 3$ кривые затрат СХС для всех наклонов и направлений изменения ДВУ сходятся в одну линию.

Выводы

При переводе спутника вдоль орбиты затраты СХС существенно зависят от числа витков ожидания, наклона и высоты орбиты. Сравнение различных сочетаний начальных условий по критерию изохронности показывает, что наибольшие затраты СХС приходятся на высокие орбиты и на наклоны, близкие к 45° . С ростом числа N витков ожидания значения требуемой СХС на манёвр непрерывно падают в обратной зависимости от N , и существует и может быть рассчитано такое компромиссное число витков ожидания, при котором продолжение фазирования будет малоэффективным.

Влияние фазового рассогласования при наличии $\Delta \Omega$ (и в дальнейшем при наличии Δa , Δi) сказывается незначительно, изменяя затраты СХС не более чем на 5 м/с. Решение задачи коррекции орбиты по ДВУ отличают следующие особенности. При малых отклонениях в ДВУ (до 10°) кривые СХС представляют собой затухающие относительно некой наклонной асимптоты колебания, интенсивность которых зависит от наклона и высоты орбиты; максимум амплитуд приходится на интервал $i \in [20^\circ; 30^\circ]$ и высоты 300-700 км. При малых отклонениях в

ДВУ учёт направления поворота приводит к такому положению кривой СХС, когда она оказывается в противофазе с аналогичной кривой, построенной для противоположного направления поворота. С ростом рассогласований в ДВУ колебания кривой СХС затухают, при этом ветвь, соответствующая повороту в направлении прецессии выпукла и существенно ниже ветви, соответствующей противоположному направлению поворота и имеющей вогнутость.

В том случае, если одновременно с $\Delta\Omega$ необходимо скорректировать также Δa , использование естественной прецессии ДВУ однозначно существенно уменьшает затраты СХС, минимальные затраты при этом достигаются для наклонений 30° - 45° , для которых ранее была установлено свойство обладать наиболее заметным колебательным характером при использовании свойств естественной прецессии. Параметры $\Delta\Omega$, Δa , N связаны между собой с точки зрения влияния на затраты СХС: при определённом, как это показано ранее, сочетании они обеспечивают минимум СХС.

Полученные результаты показывают, что при необходимости коррекции наклона начальной орбиты нет однозначного направления поворота линии узлов, которое бы позволяло достичь меньших затрат СХС. В зависимости от величин Δi и $\Delta\Omega$ может быть выгодным как поворот по направлению естественной прецессии, так и против него. Орбита, имеющая наклонение 30° - 45° , характеризуется наименьшими затратами на изменение наклона, при этом при изменении наклона в сторону значения 45° затраты СХС максимальны. С увеличением требуемого значения Δi при неизменном значении $\Delta\Omega$ компромиссное число витков ожидания уменьшается. Для каждого подлежащего коррекции Δi при требуемом конкретном изменении $\Delta\Omega$ найдётся такая высота начальной орбиты, для которой затраты СХС будут минимальны. Можно сказать, что с увеличением $\Delta\Omega$ существенно расширяется та область из пространства рассматриваемых функциональных зависимостей $\Delta V(\Delta i, \Delta\Omega, \Delta a, \dots)$, где могут быть получены существенно меньшие затраты СХС.

Полученные результаты могут быть использованы при проектных оценках энергетико-временных затрат, необходимых для формирования спутниковых систем. Предоставляется возможность отыскания компромисса между затратами суммарной характеристической скорости на перелёт и его продолжительностью, что может быть использовано при проектировании сложных многоуровневых спутниковых систем, при планировании обслуживающих систем. Проведенный анализ перевода спутника на орбиту, имеющую существенные отличия по нескольким параметрам, позволяет наметить оптимальную стратегию такого перевода.

В данной работе были рассмотрены случаи перевода КА с одной круговой орбиты на другую. Общее решение задачи перехода между двумя произвольными околокруговыми орбитами приводится в [8, 9].

Обнаруженные эффекты для зависимости суммарной характеристической скорости перелета от отклонений параметров при различном их сочетании могут быть использованы при выработке оптимальной стратегии сбора космического мусора перспективными КА многократного использования [10], предназначенными для облётов крупногабаритных обломков космических аппаратов и сведения их с орбиты.

Список литературы

1. Эльясберг П.Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1965. 540 с.
2. Ильин В.А., Кузмак Г.Е. Оптимальные перелеты космических аппаратов. М.: Наука, 1976. 744 с.
3. Баранов А.А. (мл). Изменение положения КА в спутниковой системе // Космические исследования. 2008. Т. 46, № 3. С. 219-224.
4. Баранов А.А. (мл.). Разработка унифицированной расчётно-баллистической методики анализа эффективности методов формирования и поддержания спутниковых систем заданной структуры : дисс. ... канд. техн. наук. М., МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 149 с.
5. Баранов А.А. Оптимальные переходы между орбитами, имеющими значительные отклонения долготы восходящего узла // Труды XXV Научных чтений по космонавтике (Москва, 24-26 января 2001 г.). М.: Война и мир, 2001. С. 113.
6. Райнджон С., Коте Ю., Мартино В. Возможные стратегии обновления спутниковых группировок связи // Электронный журнал «Труды МАИ». 2009. № 9. Режим доступа: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=8234> (дата обращения 10.02.2013).
7. Labourdette P., Baranov A.A software for rendezvous between near-circular orbits with large initial ascending node difference // Proceedings of the 17 International Symposium on Space Flight Dynamics. 16-20 June 2003, Moscow, RF. Moscow: Keldysh Institute of Applied Mathematics, 2003. P. 130-142.
8. Баранов А.А., Баранов А.А. Алгоритм расчета параметров маневров формирования спутниковых систем // Космические исследования. 2009. Т. 47, № 3. С. 256-263.
9. Baranov A.A., Labourdette P. Strategies for on-Orbit Rendez-vous Circling Mars // AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference. Quebec, Canada, 2001. Paper AAS 01-392.
10. Удаление крупногабаритного космического мусора с использованием электромагнитного плазменного ускорителя VASIMR[®]. Ракетно-космическая компания Ad Astra Rocket Company (AARC). Режим доступа: <http://www.adastrarocket.com/aarc/SpaceCleaner> (дата обращения 10.06.2013).

Problems of minimizing summary characteristic velocity required for maintenance and replenishment of satellite systems at non-coplanar circular orbits

09, September 2013

DOI: **10.7463/0913.0598333**

Baranov A., A., Grishko D.A.

Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences), Russia, Moscow
Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russian Federation

andrey_baranov@list.ru

dim.gr@mail.ru

This article describes cost estimations of summary characteristic velocity (SCV) required for replenishment of satellite systems at circular and near-circular orbits. TSCV costs optimization for maneuvering is based on using a parking orbit. All possible combinations of values of initial and final orbit parameters were investigated sequentially. The accompanying effects were analyzed; consideration of these effects allows to minimize SCV costs significantly. Analytical relations which determine a number of passive circuits at a parking orbit representing a compromise between time and SCV costs for coplanar flights were found. The obtained results could be used for minimization of temporal and energetic costs while designing and exploiting specified types of satellite systems. In addition, these results are applicable in exploitation of maneuvering space vehicles designed for collecting large-sized space debris.

Publications with keywords: [space vehicle](#), [satellite system](#), [final orbit](#), [maneuvers](#), [parking orbit](#), [summary characteristic velocity](#), [RAAN precession](#)

Publications with words: [space vehicle](#), [satellite system](#), [final orbit](#), [maneuvers](#), [parking orbit](#), [summary characteristic velocity](#), [RAAN precession](#)

References

1. El'yasberg P.E. *Vvedenie v teoriyu poleta iskusstvennykh sputnikov Zemli* [Introduction to the theory of flight of artificial Earth satellites]. Moscow, Nauka, 1965. 540 p.
2. Il'in V.A., Kuzmak G.E. *Optimal'nye perelety kosmicheskikh apparatov* [Optimal flight of spacecraft]. Moscow, Nauka, 1976. 744 p.
3. Baranov A.A. (Jr.). *Izmenenie polozheniya KA v sputnikovoy sisteme* [Change of spacecraft position in a satellite system]. *Kosmicheskie issledovaniya*, 2008, vol. 46, no. 3, pp. 219-224. (English Translation: *Cosmic Research*, June 2008, vol. 46, iss. 3, pp. 215-218. DOI: 10.1134/S0010952508030040).

4. Baranov A.A. (Jr.). *Razrabotka unifikirovannoy raschetno-ballisticheskoy metodiki analiza effektivnosti metodov formirovaniya i podderzhaniya sputnikovykh sistem zadannoy struktury. Kand. diss.* [The development of a unified settlement-ballistic methods of analysis of efficiency of methods of formation and maintenance of satellite systems of the given structure. Cand. diss.]. Moscow, Bauman MSTU, 2011. 149 p.
5. Baranov A.A. Optimal'nye perekhody mezhdu orbitami, imeyushchimi znachitel'nye otkloneniya dolgoty voskhodyashchego uzla [Optimal transitions between the orbits that have significant deviations of longitude of the ascending node]. *Trudy 25 Nauchnykh chteniy po kosmonavtike* [Proceedings of the 25 Scientific readings on cosmonautics], Moscow, 24-26 January 2001. Moscow, "Voyna i mir" Publ., 2001, p. 113.
6. Rayndzhon S., Kote Yu., Martino V. Vozmozhnye strategii obnoveniya sputnikovykh gruppировок svyazi [Review of possible replacement strategies of telecom constellations]. *Trudy MAI*, 2009, no. 34. Available at: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=8234> , accessed 10.02.2013.
7. Labourdette P., Baranov A.A software for rendezvous between near-circular orbits with large initial ascending node difference. *Proceedings of the 17 International Symposium on Space Flight Dynamics*, 16-20 June 2003, Moscow, RF. Moscow, Keldysh Institute of Applied Mathematics, 2003, pp. 130-142.
8. Baranov A.A., Baranov A.A. Algoritm rascheta parametrov manevrov formirovaniya sputnikovykh sistem [The algorithm for calculating the parameters of maneuvers of formation of satellite systems]. *Kosmicheskie issledovaniya*, 2009, vol. 47, no. 3, pp. 256-263.
9. Baranov A.A., Labourdette P. Strategies for on-Orbit Rendez-vous Circling Mars. *AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference*, Quebec, Canada, 2001. Paper AAS 01-392.
10. VASIMR[®] technology. *Low Earth Orbit Large Debris Removal*. Ad Astra Rocket Company (AARC). Available at: <http://www.adastrarocket.com/aarc/SpaceCleaner> , accessed 10.06.2013.