

Численное решение бескоалиционных матричных игр

08, август 2013

DOI: 10.7463/0813.0587745

Васильев Н. С.

УДК 519.85

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

nik8519@yandex.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Поиск ситуации равновесия по Нэшу матричной игры в смешанных стратегиях игроков обычно проводится методом полного перебора [1, 2], вообще говоря, не приемлемого для практического применения. Этот подход имеет экспоненциальную сложность вычислений: нужно решить 2^m систем линейных уравнений и неравенств, где m – общее число чистых стратегий всех участников игры. В работе предложен и апробирован игровой алгоритм, который, предполагается, имеет полиномиальную сложность.

В бескоалиционной матричной игре n лиц каждый игрок $k=1,2,\dots,n$ располагает конечным множеством чистых стратегий $i_k, i_k \in \{1,2,\dots,m_k\}$. Игра полностью определяется заданием функций выигрыша игроков, которые будем представлять ковариантными тензорами n -го ранга $A^k_{i_1 i_2 \dots i_n}$. (Координаты тензора A^k равны величинам выигрышей k -го игрока в зависимости от выбора всеми игроками своих чистых стратегий $i_1, i_2, \dots, i_n$.)

Рассматривается смешанное расширение игры, в котором всегда существует равновесие по Нэшу (см. [1, 2]). Именно, каждый игрок применяет смешанную стратегию, т.е. выбирает случайную величину, принимающую значения в его множестве чистых стратегий. Смешанные стратегии будем отождествлять с вероятностными распределениями p_k . С вероятностью p_k^i игрок k выбирает свою i -ю, $i = i_k \in \{1,2,\dots,m_k\}$, чистую стратегию. По смыслу, векторы p_k (контравариантные тензоры первого ранга) принадлежат симплексам

$$\Sigma_k = \{p_k : p_k \geq 0, \sum_{i=1}^{m_k} p_k^i = 1\}.$$

В принятых обозначениях *средние выигрыши* игроков, которые они стремятся, по возможности, увеличить, могут быть записаны как тензорные произведения

$$A_{i_1 i_2 \dots i_n}^k p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots p_n^{i_n}, \quad k=1,2,\dots,n. \quad (1)$$

В соответствии с обычными соглашениями в выражениях (1) опущен знак суммирования, которое проводится по совпадающим верхним и нижним индексам.

Напомним (см. [1],[2]), что ситуацией *равновесия по Нэшу*, называется набор стратегий игроков $p^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)$, удовлетворяющий условию $(\forall k) A^k p^* \parallel p_k \leq A^k p^*$, в котором, для упрощения записи, выражение (1) обозначено как $A^k p$, а $A^k p^* \parallel p_k$ - то же тензорное произведение, что и (1), $p=p^*$, в котором вместо сомножителя p_k^* взято p_k .

Цель работы – построение игрового алгоритма поиска одного из равновесий по Нэшу. Под этим понимается приводящая к равновесию многошаговая вычислительная схема, моделирующая процесс игры как поочередный выбор ее участниками своих стратегий.

2. МЕТОД ПОИСКА РАВНОВЕСИЯ

Поиск равновесия игры сведем к решению следующей многоэкстремальной задачи математического программирования. Требуется найти глобальный максимум целевой функции

$$F(p,u) = \sum_{k=1}^n (A_{i_1 i_2 \dots i_n}^k p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots p_n^{i_n} - u_k) \rightarrow \max_{p,u} \quad (2)$$

по переменным p, u , $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, удовлетворяющим ограничениям

$$(\forall k=1,2,\dots,n) A^k p \parallel p_k \leq u_k e_k, \quad p_k \in \Sigma_k. \quad (3)$$

В левой части неравенств (3) $A^k p \parallel p_k$ - тензорное произведение (1), из которого исключен k -й сомножитель p_k , а e_k - ковариантный тензор первого ранга размерности m_k с координатами, равными единице.

Очевидна следующая

Теорема 1. *Глобальный максимум целевой функции (2) на множестве (3), имеющий значение, равное нулю, достигается лишь в точках (p^*, u^*) , отвечающих ситуациям равновесия игры p^* , в которых координаты вектора u^* - величины средних выигрышей игроков.*

Соотношения (2),(3) дают основание для рассмотрения следующей игры n лиц, в которой участники $k=1,2,\dots,n$ при выборе своих стратегий (p_k, v_k) , $v_k = u \parallel u_k$, (вектор v_k получен из u исключением k -й координаты) “руководствуются” целевыми функциями (ср. с (2)):

$$\left(\sum_{k=1}^n A_{i_1 i_2 \dots i_n}^k\right) p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots p_n^{i_n} - \sum_{j \neq k} u_j \rightarrow \max_{p_k, u \| u_k} \quad (4)$$

при ограничениях

$$(\forall j \neq k) A^j p \| p_j \leq u_j e_j, p_k \in \Sigma_k. \quad (5)$$

При любых фиксированных стратегиях партнеров каждая из функций выигрыша (4) является линейной по переменной (p_k, v_k) , представляющей стратегию, выбираемую k -м игроком. Таким образом, имеем набор (4, 5), $k=1,2,\dots,n$, взаимосвязанных задач линейного программирования (ЛП). Можно также считать (и это делается в дальнейшем), что стратегиями игроков являются лишь векторы $p_k, k=1,2,\dots,n$. В самом деле, ситуация игры p однозначно определяет вектор u . Поэтому бескоалиционная игра (4, 5), $k=1,2,\dots,n$, как и исходная игра, также является матричной.

Замечание 1. При $n=2$ и $A_{i_1 i_2}^1 + A_{i_1 i_2}^2 = 0$ имеем антагонистическую игру, для которой задачи ЛП (4),(5) взаимно двойственны [3]. Их решение (p_1^*, p_2^*) дает искомую ситуацию равновесия (см. [1-3]).

Замечание 2. Всякая ситуация равновесия (p', v') в игре (4, 5) дает точку максимума функции (2), $v = (v_1, v_2, \dots, v_n), (\forall k) v_k = u \| u_k$, по каждой из переменных (p_k, v_k) при фиксированных значениях остальных переменных.

Ввиду замечания 2 равновесия по Нэшу в игре (4, 5) будем называть *стационарными* точками целевой функции F (см. (2)).

Игра (4, 5) намного проще исходной задачи. В ней игроки приходят к равновесию, поочередно делая свои “ходы” (т.е. выбирая свои стратегии на шагах $t=0,1,\dots$), начиная игру из произвольной начальной ситуации $p(0)$:

Теорема 2. Пусть игроки $k=1,2,\dots,n$ поочередно, на шагах $t=0,1,\dots$, изменяют свои стратегии так, чтобы $p_k(t+1)$ было решением задачи ЛП (4),(5), $k=1,2,\dots,n$, в которой фиксированы все векторы, $p_j(t), j \neq k$, а $p_j(t+1) = p_j(t), j \neq k$. Тогда $p(t) \rightarrow p^*, t \rightarrow \infty$, где p^* - некоторая ситуация равновесия в игре (4, 5).

Доказательство. Значения целевой функции (2), $F(p(t), u(t)), t=0,1,\dots$, по построению образуют монотонно возрастающую, а, следовательно, сходящуюся последовательность. Ввиду компактности множеств смешанных стратегий игроков можно считать, что последовательность $\{p(t), t=0,1,\dots\}$ также сходится к некоторому вектору p^* (см. подобные рассуждения в [4]). Предельный переход в ограничениях и целевых функциях задач

ЛП (4),(5) показывает, что координаты p_k^* вектора p^* служат решениями всех этих задач, а p^* является равновесием игры (4),(5).

Через $\lambda_k^j, j = 1, 2, \dots, m_k$, обозначим двойственные переменные, с помощью которых снимаются ограничения в форме неравенств (3) при решении экстремальной задачи (2),(3) методом множителей Лагранжа. Введем функцию Лагранжа, которая, по определению, имеет вид (см. [5])

$$L(p, u, \lambda) = F(p, u) + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{m_k} \lambda_k^j (u_k - (A^k p \parallel p_k)_j).$$

Рассмотрим также множители Лагранжа, $\Lambda_{kj} = (\Lambda_{kj}^{j'}, j' = 1, 2, \dots, m_j), j \neq k$, - двойственные переменные в задачах ЛП (4),(5), $k = 1, 2, \dots, n$. Анализ двойственных к (4),(5) задач ЛП (см. [3]) показывает, что переменные Λ_{kj} удовлетворяют ограничениям $\Lambda_{kj} \in \Sigma_j, k, j = 1, 2, \dots, n, j \neq k$. Необходимые условия экстремума в задаче (2),(3) также приводят к ограничению $\lambda_k \in \Sigma_k$.

Далее для упрощения записи будем опускать переменные u, v и упоминать лишь о переменной p , говоря об оптимизации функции (2) на множестве (3) или об игре (4),(5). Пусть p^* является стационарной точкой функции (2), а $\lambda_k^*, \Lambda_k = (\Lambda_{kj}^*, j \neq k)$, - соответствующие векторы двойственных переменных в задачах (2, 3) и (4, 5), $p = p^*, k = 1, 2, \dots, n$, соответственно.

Замечание 3. Имеют место равенства $\lambda_k^* = \Lambda_{jk}^*, k, j = 1, 2, \dots, n, j \neq k$.

Согласно замечанию 2 итерационный процесс из теоремы 2, сходясь к стационарной точке функции F , вообще говоря, не дает решения исходной игры. Для выхода из областей притяжения стационарных точек функции (2) с целью нахождения глобального максимума (см. теорему 1) будем использовать следующее свойство экстремальной задачи (2, 3).

Теорема 3. *Стационарная точка $p = p^*$ целевой функции (2) является равновесием по Нэшу в исходной игровой задаче тогда и только тогда, когда найдутся такие множители Лагранжа, что $\lambda_k^* = p_k^*, k = 1, 2, \dots, n$.*

Доказательство. Достаточность указанного условия следует из теоремы 1 ввиду того, что $L(p, u, p) \equiv 0$ и $F(p^*, u^*) = L(p^*, u^*, p^*) = 0$.

Пусть теперь p^* является равновесием по Нэшу. Тогда выполняются условия дополняющей нежесткости (см. [1]-[3]) с множителями p^* :

$$(\forall j) p_k^{*j} (u_k^* - (A^k p^* \parallel p_k^*)_j) = 0,$$

которым удовлетворяют и множители Лагранжа Λ_{jk}^* . Отсюда следует, что функция Лагранжа $L_k(p, u, \lambda)$ (ввиду $\Lambda_{jk} = \lambda_k$ по замечанию 3), построенная для задачи ЛП (4, 5),

$p_j = p_j^*, j \neq k$, имеет минимум $\lambda = p^*$ по двойственной переменной. Более того, взяв $\lambda_j = p_j^*, j \neq k$, получим (сумма $\sum_{j \neq k} u_j$ сокращается):

$$L_k(p^* | p_k, u, p^*) = \sum_{j=1}^n A^j p^* | p_k - \sum_{j \neq k} p_j^* (A^j p^* | p_j^*) | p_k = A^k p^* | p_k.$$

По определению ситуации равновесия, точка $p_k = p_k^*$ является максимумом функции $A^k p^* | p_k = L_k(p^* | p_k, u, p^*)$ на множестве $p_k \in \Sigma_k$. Таким образом (см. [4, с. 219]), пара (p_k^*, p^*) является седловой точкой функции Лагранжа $L_k(p^* | p_k, u, \lambda)$ по переменным p_k, λ . Следовательно, векторы $\lambda_j = p_j^*, j \neq k$, являются множителями Лагранжа. Проведенные рассуждения справедливы при любом $k=1,2,\dots,n$. Теорема доказана.

Замечание 4. В достаточном условии теоремы 3 можно потребовать выполнение условия $\Lambda_{kj}^* = p_j^*, j=1,2,\dots,n, j \neq k$, лишь для одного из игроков $k=1,2,\dots,n$.

3. АЛГОРИТМ ПОИСКА РАВНОВЕСИЯ

В соответствии с теоремами 1-3 и замечаниями 3, 4 предлагается использовать следующую многошаговую схему поиска равновесия.

Этап 0. Задать произвольно начальную ситуацию игры $^0 p$.

Этап 1. Каждому участнику игры (4),(5) поочередно, в порядке нумерации, выбрать свою оптимальную (в текущей ситуации) стратегию и сообщить ее партнерам. По достижении некоторой ситуации равновесия p' проверить выполнение условия $p' = \lambda'$. Если это так, то СТОП. Иначе перейти к выполнению этапа 2.

Этап 2. Найти номер s одного из игроков, для которого имеется наибольшее число совпадающих векторов прямых $p' | p_s$ и двойственных $\Lambda'_s = (\Lambda'_{sj}, j \neq s)$ переменных. Игроку s применить стратегию, оптимальную в ситуации Λ'_s , и сообщить ее всем остальным участникам игры. Перейти к этапу 1.

Поясним сказанное. На этапе 1 разворачивается итерационный процесс, рассмотренный в теореме 2. По теореме 3 выполнение проверяемого условия означает достижимость одной из искомым ситуаций равновесия по Нэшу в исходной игре. Вычисления оптимальных стратегий игроков и отвечающих им двойственных переменных будем проводить с помощью симплекс-метода (см. [3]).

Вычислительный эксперимент. Пусть $n=3, m_1 = m_2 = m_3 = 3$. Для записи функции выигрыша любого, k -го игрока, использована матрица платежей, номера строк i и столбцов j

которой совпадают с номерами чистых стратегий игроков k_1, k_2 соответственно ($k_1 < k_2, k_1, k_2 \neq k$). Элемент i, j этой матрицы представляет собой строку чисел, равных выигрышам k -го игрока в зависимости от выбора им чистых стратегий $i_k = 1, 2, \dots, m_k$ соответственно. Итак, пусть платежные матрицы игроков $k=1, 2, \dots, n$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} (2,2,2) & (-1,1,-2) & (3,1,-1) \\ (1,0,-1) & (1,2,-1) & (2,-1,1) \\ (-3,-3,0) & (2,2,1) & (2,3,-2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (2,-2,2) & (3,-1,-2) & (5,1,-1) \\ (1,-4,-1) & (1,2,-1) & (-3,-3,2) \\ (3,-3,1) & (-4,-2,1) & (-2,3,-2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (-1,-2,-1) & (-2,1,1) & (-3,1,-1) \\ (-2,1,1) & (1,2,-1) & (2,-1,1) \\ (-3,3,2) & (2,-2,-3) & (1,-2,1) \end{pmatrix}.$$

Например, игрок 1 получает платежи 2,-1,1 в ситуациях (1,2,3), (2,2,3), (3,2,3) соответственно, т.е. при условии, что остальные участники игры ($k_1 = 2, k_2 = 3$) применяют стратегии $i = i_2 = 2, j = i_3 = 3$.

Возьмем начальную ситуацию ${}^0p_k = (0.33, 0.33, 0.34), k = 1, 2, 3$. На этапе 1 получаем стационарную точку 1p :

$${}^1p_1 = \begin{pmatrix} 0.59 \\ 0.41 \\ 0 \end{pmatrix}, {}^1p_2 = \begin{pmatrix} 0.54 \\ 0.18 \\ 0.28 \end{pmatrix}, {}^1p_3 = \begin{pmatrix} 0.13 \\ 0.45 \\ 0.41 \end{pmatrix}.$$

(Значение целевой функции $F = -0.27$.) На этапе 2 игрок $s=2$ имеет стратегию (0.67, 0.33, 0), оптимальную в ситуации $\Lambda'_2 = ((0.6, 0.4, 0), (0, 0.73, 0.27))$.

Последующие вычисления этапа 1 дают новую стационарную точку 2p :

$${}^2p_1 = \begin{pmatrix} 0.36 \\ 0.64 \\ 0 \end{pmatrix}, {}^2p_2 = \begin{pmatrix} 0.84 \\ 0.16 \\ 0 \end{pmatrix}, {}^2p_3 = \begin{pmatrix} 0.08 \\ 0.54 \\ 0.37 \end{pmatrix},$$

в которой $F = -0.2$. Двойственные переменные равны

$$\Lambda'_1 = \left(\begin{pmatrix} 0.57 \\ 0 \\ 0.43 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \Lambda'_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0.78 \\ 0.22 \end{pmatrix} \right), \Lambda'_3 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.49 \\ 0.42 \\ 0.09 \end{pmatrix} \right).$$

Вновь выбирая игрока $s=2$, найдем его стратегию (0, 1, 0), оптимальную в ситуации $\Lambda'_2 = (\Lambda'_{21}, \Lambda'_{23})$.

Выполнив вычисления этапа 1, найдем очередную стационарную точку 3p и отвечающие ей двойственные переменные (при этом $F = -0.19$):

$${}^3p = \left(\begin{pmatrix} 0.9 \\ 0 \\ 0.1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0.63 \\ 0.37 \end{pmatrix} \right), \Lambda_1 = \left(\begin{pmatrix} 0.58 \\ 0.42 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \Lambda_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \Lambda_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

На этапе 2 берем теперь $s=3$, так как только у третьего игрока имеются совпадающие векторы прямых и двойственных переменных: $\Lambda_{32} = {}^3p_2$. Оптимальная для ситуации Λ_3 стратегия игрока 3 равна $(0,0,1)$.

Следуя предложенной схеме, последовательно находим стационарные точки (со значениями $F=-0.004$ и $F=-0.12$ соответственно)

$${}^4p = \left(\begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.25 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0.62 \\ 0.38 \end{pmatrix} \right); \quad {}^5p = \left(\begin{pmatrix} 0.94 \\ 0 \\ 0.06 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0.62 \\ 0.38 \end{pmatrix} \right).$$

На этапе 2, в ситуации 4p , было выбрано $s=2$, а в ситуации 5p - $s=3$. В результате получаем искомое равновесие p^* :

$$p_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, p_2^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_3^* = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Всего в процессе работы алгоритма было решено около двадцати задач ЛП, в которых текущие ситуации каждый раз использовались в качестве начальных приближений.

Заключение. Задачи ЛП имеют полиномиальную сложность решения (см. [6]). Это дает основание предположить, что предложенный в работе алгоритм имеет такую же вычислительную сложность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. М.: Высшая школа, 1998. 304 с.
2. Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики. М.: Изд-во МГУ, 2005. 278 с.
3. Ашманов С.А. Линейное программирование. М.: Наука, 1981. 340 с.
4. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980. 518 с.
5. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 481 с.
6. Хачиян Л.Г. Полиномиальный алгоритм в линейном программировании // Докл. АН СССР. 1979. Т. 244, № 5. С. 1093-1096.

Numerical solution of coalition-free matrix games

08, August 2013

DOI: 10.7463/0813.0587745

Vasil'ev N.S.

Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russian Federation

nik8519@yandex.ru

Publications with keywords: [tensor](#), [linear programming](#), [Nash equilibrium](#), [matrix game](#), [mixed strategy](#), [duality theory](#), [Lagrange multipliers](#), [global maximum](#), [tensor product](#)

Publications with words: [tensor](#), [linear programming](#), [Nash equilibrium](#), [matrix game](#), [mixed strategy](#), [duality theory](#), [Lagrange multipliers](#), [global maximum](#), [tensor product](#)

A general case of weakly investigated N-person matrix games was considered in this paper. The brute force Nash equilibrium method for mixed strategies, known in case of $N = 2$, was successfully generalized. Computational complexity of this algorithm is unacceptable; this algorithm is reduced to solving exponentially increasing (depending on the number of strategies) number of completed linear systems, where the number of variables also exponentially depends on N . The new playing equilibrium algorithm based on the methods of linear programming and duality theory was proposed in this work. The algorithm was developed with the use of a more simple auxiliary coalition-free game introduced by means of some problem of mathematical programming. An example of the numerical solution of a 3-person game is given in the article.

References

1. Petrosyan L.A., Zenkevich N.A., Semina E.A. *Teoriya igr* [Game theory]. Moscow, Vysshaya shkola, 1998. 304 p.
2. Vasin A.A., Morozov V.V. *Teoriya igr i modeli matematicheskoy ekonomiki* [Game theory and models of mathematical economics]. Moscow, MSU Publ., 2005. 278 p.
3. Ashmanov S.A. *Lineynoe programmirovaniye* [Linear programming]. Moscow, Nauka, 1981. 340 p.
4. Vasil'ev F.P. *Chislennyye metody resheniya ekstremal'nykh zadach* [Numerical methods for solving extremal problems]. Moscow, Nauka, 1980. 518 p.
5. Ioffe A.D., Tikhomirov V.M. *Teoriya ekstremal'nykh zadach* [The theory of extremal problems]. Moscow, Nauka, 1974. 481 p.
6. Khachiyan L.G. Polinomial'nyy algoritm v lineynom programmirovanii [A polynomial algorithm in linear programming]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1979, vol. 244, no. 5, pp. 1093-1096. (English translation: *Soviet Mathematics Doklady*, 1979, vol. 20, pp. 191-194.)