

Геометрическое обеспечение построения гладких сопряжений из отсеков конических поверхностей второго порядка

06, июнь 2015

Иванов Г. С.¹, Жирных Б. Г.^{1,*}

УДК: 515.2

¹Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

^{*}borjir@yandex.ru

Тема «Пересечение поверхностей» является одним из важных разделов учебного курса начертательной геометрии. Большое внимание здесь уделяется пересечению поверхностей второго порядка (квадрик). В общем случае они пересекаются по пространственной кривой четвертого порядка ($2 \times 2 = 4$). В частных случаях взаимного положения квадрик линия их пересечения может распадаться в следующих вариантах:

- прямая и кривая третьего порядка (нормкривая) ($4 = 1 + 3$);
- две прямые и кривая второго порядка ($4 = 1 + 1 + 2$);
- четыре прямые ($4 = 1 + 1 + 1 + 1$);
- две кривые второго порядка ($4 = 2 + 2$).

Первый вариант ($4 = 1 + 3$) подробно рассмотрен в статье [1], а четвертый вариант ($4 = 2 + 2$) достаточно полно освещается почти во всех учебниках начертательной геометрии:

- теорема Монжа;
- теорема о двух точках соприкосновения;
- теорема о пересечении двух квадрик, инцидентных кривой второго порядка.

Второй ($4 = 1 + 1 + 2$) и особенно третий ($4 = 1 + 1 + 1 + 1$) варианты распада, на первый взгляд, представляются очевидными и, по-видимому, из-за этого, не нашли подробного рассмотрения в учебниках начертательной геометрии. Задачей настоящей публикации является рассмотрение, казалось бы, самого простого варианта — распада линии пересечения двух квадрик на четыре прямые. Эта задача приобретает прикладное значение при конструировании технических поверхностей как гладких двумерных обводов, составленных, в частности, из отсеков конических и цилиндрических поверхностей.

Общеизвестно, что этот вариант распада имеет место при пересечении двух конических поверхностей второго порядка с общей вершиной $\alpha(S, a^2), \beta(S, b^2)$, двух цилиндрических поверхностей с параллельными образующими. Принимая направляющие a^2 и b^2 этих поверхностей, принадлежащими одной плоскости γ , имеем несколько вариантов их

пересечения. Эти варианты являются промежуточными между четырьмя действительными (рис.1а) и четырьмя мнимыми (рис.1б) точками $1, 2, 3, 4$ пересечения их направляющих a^2 и b^2 , следовательно, четырьмя (рис.1) действительными и четырьмя мнимыми их общими образующими $S1, S2, S3, S4$. Заметим, что в случае четырех мнимых точек пересечения (рис.1.б) существуют две действительные прямые t и $\bar{t}$, пересекающие направляющие a^2 и b^2 в одних и тех же парах мнимо-сопряженных точек 1 и $2, 3$ и 4 .

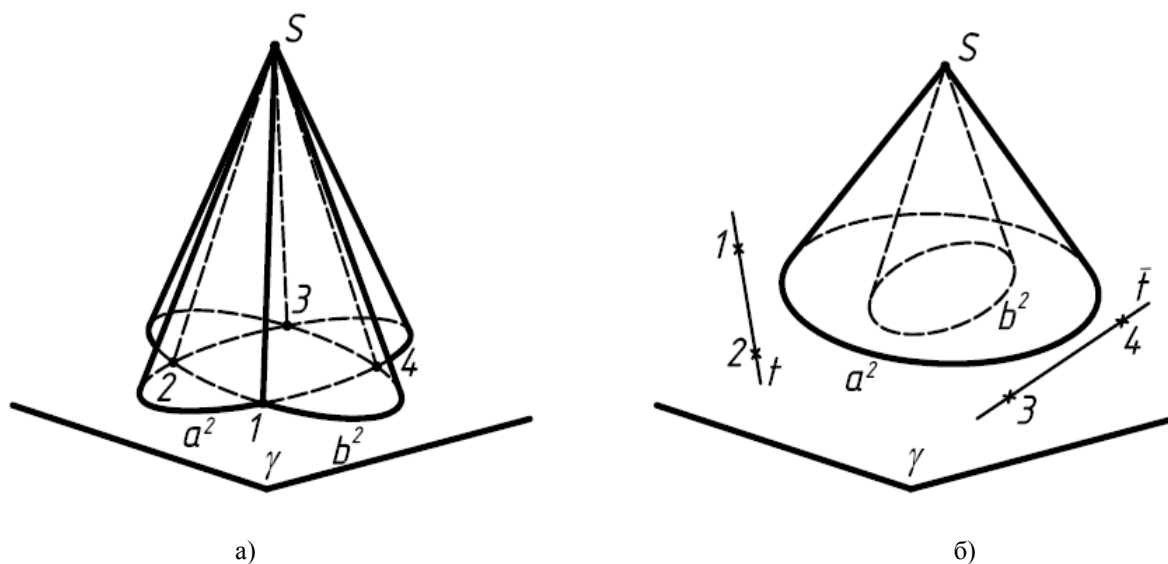
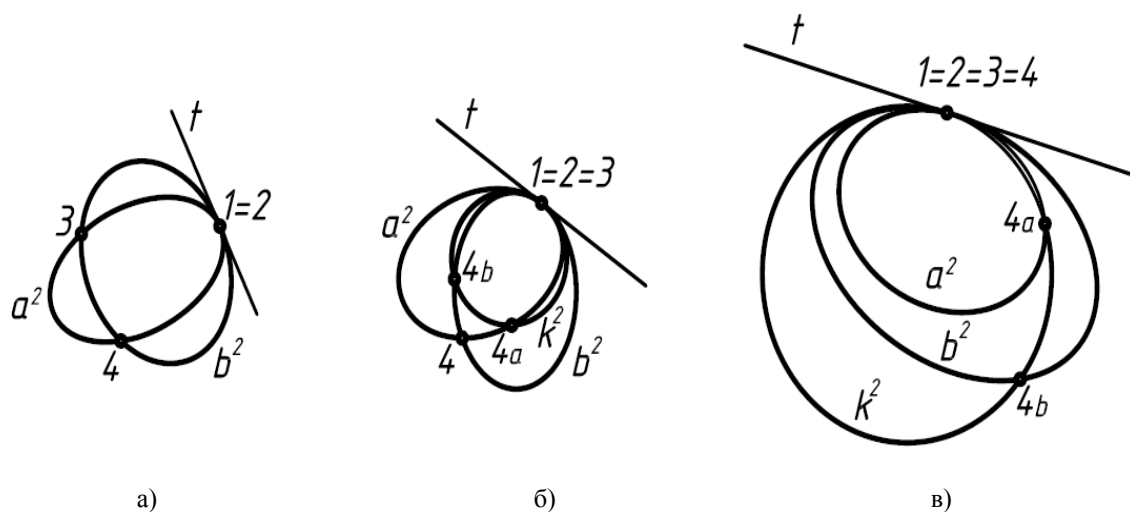


Рис.1

Промежуточными вариантами пересечения направляющих a^2 и b^2 будут различные сочетания действительных и мнимо-сопряженных, различных и совпавших точек (рис.2). На рис.2.а показан вариант, когда кривые a^2 и b^2 имеют две совпавшие 1 и 2 и две различные 3 и 4 точки пересечения. Совпадение точек 1 и 2 графически выражается в появлении здесь их общей касательной прямой t , то есть графическим признаком двухточечного касания кривых a^2 и b^2 является наличие их общей касательной t .



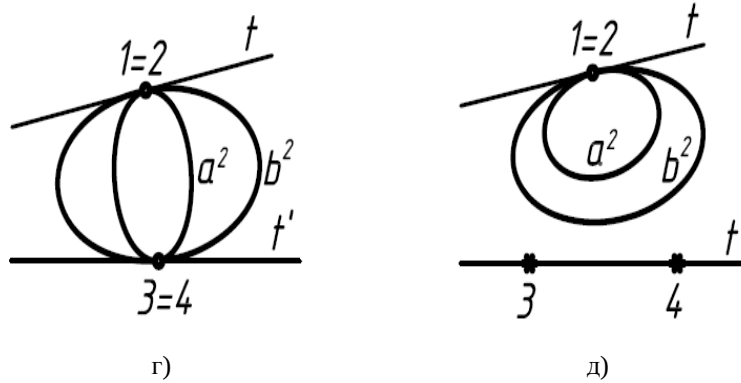


Рис.2

Существование у кривых a^2 и b^2 трехточечного касания $1=2=3$ выражается в наличии здесь их общей касательной t и общего круга кривизны k^2 (рис.2.б). Кроме этих трех совпавших точек $1=2=3$ кривые a^2 и b^2 пересекаются еще в точке 4. Круг кривизны k^2 также пересекается с каждой из кривых a^2 и b^2 в трех совпавших точках $1=2=3$ и четвертой точке $4_a = k \cap a, 4_b = k \cap b$.

Кривые a^2 и b^2 также могут пересекаться в четырех совпавших точках $1=2=3=4$ (рис.2.в). Другими словами, они могут иметь четырехточечное касание. Это выражается в существовании здесь общей касательной (равенство первых производных), общего круга кривизны (равенство первых и вторых производных) и равенство первых, вторых и третьих производных от уравнений кривых a^2 и b^2 . Заметим, что их общий круг кривизны с каждой из этих двух кривых второго порядка a^2 и b^2 имеет трехточечное касание $1=2=3$ и четвертую точку пересечения: $4_a = k \cap a, 4_b = k \cap b$.

И, наконец, кривые a^2 и b^2 могут пересекаться в четырех действительных, попарно совпавших точках $1=2$ и $3=4$ (рис.2.г), и в двух совпавших действительных точках $1=2$ и в двух мнимо-сопряженных точках 3 и 4 (рис.2.д). Как обычно, совпадение двух точек ведет к появлению здесь общей касательной этих кривых, а пересечение в мнимо-сопряженных точках — к существованию действительной прямой $\bar{t}$, пересекающей обе кривые в одной и той же паре мнимо-сопряженных точек 3 и 4 .

Далее, возникает задача: как построить (задать) кривые a^2 и b^2 , имеющие рассмотренные выше возможные варианты их пересечений. Аналитический подход к решению этой задачи общеизвестен [2]:

— в уравнение кривой второго порядка

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + 1 = 0 \quad (1)$$

подставляются последовательно координаты заданных точек, которым инцидентна конструируемая кривая;

— дифференцируя уравнение (1), получаем формулу для вычисления его первой производной

$$y' = -\frac{2ax + by + d}{bx + 2cy + e} \quad (2)$$

— подставляем в это уравнение значение y' углового коэффициента касательной и координаты точек касания, если в условие задания кривой входит касательная;

— если в условие задания кривой входят трех- и четырехточечные касания, то от уравнения (1) берутся соответственно вторые и третьи производные;

— подставляются их значения и координаты данных точек.

В результате получается система из пяти уравнений с пятью неизвестными коэффициентами a, b, c, d, e . Решение этой системы определяет искомую кривую второго порядка.

Такой подход не свойственен начертательной геометрии, ибо он не основан на конструктивных построениях. Поэтому, в качестве альтернативы, можно рассмотреть проективный способ образования кривых второго порядка [3] или способ преобразований [4]. По своим возможностям оба способа равносильны. С позиций решения прикладных задач предпочтение следует отдать способу преобразований.

Наиболее простыми по своим конструктивным алгоритмам построения соответственных точек являются центральные преобразования: линейные (гомология) и квадратичные (в частности, преобразование Гирста). В гомологии кривые второго порядка строятся как образы окружности, а в преобразовании Гирста — как образы прямой. Преобразование Гирста имеет несколько специализаций своей фундаментальной системы, что позволяет конструировать все виды пучков кривых второго порядка, показанных на рис.2 [5].

Инволюционное преобразование Гирста J_2 задается (рис.3) центром F_1 и инвариантной (двойной) кривой второго порядка d^2 . В нашем случае для простоты графических построений взята окружность d^2 с центром O (рис.3). Окружность p^2 , построенная на отрезке F_1O как на диаметре, называется предельной и соответствует несобственной прямой p^∞ плоскости. Прямые $l_i \ni F_1$ преобразуются в J_2 сами в себя, поэтому называются самоответственными или слабоинвариантными. Соответственные точки $A \sim A'$ коллинейны с центром F_1 и составляют гармоническую четверку с точками D_1, D_2 , где $D_1, D_2 = F_1 A \cap d^2$; $(D_1 D_2 A A') = -1$.

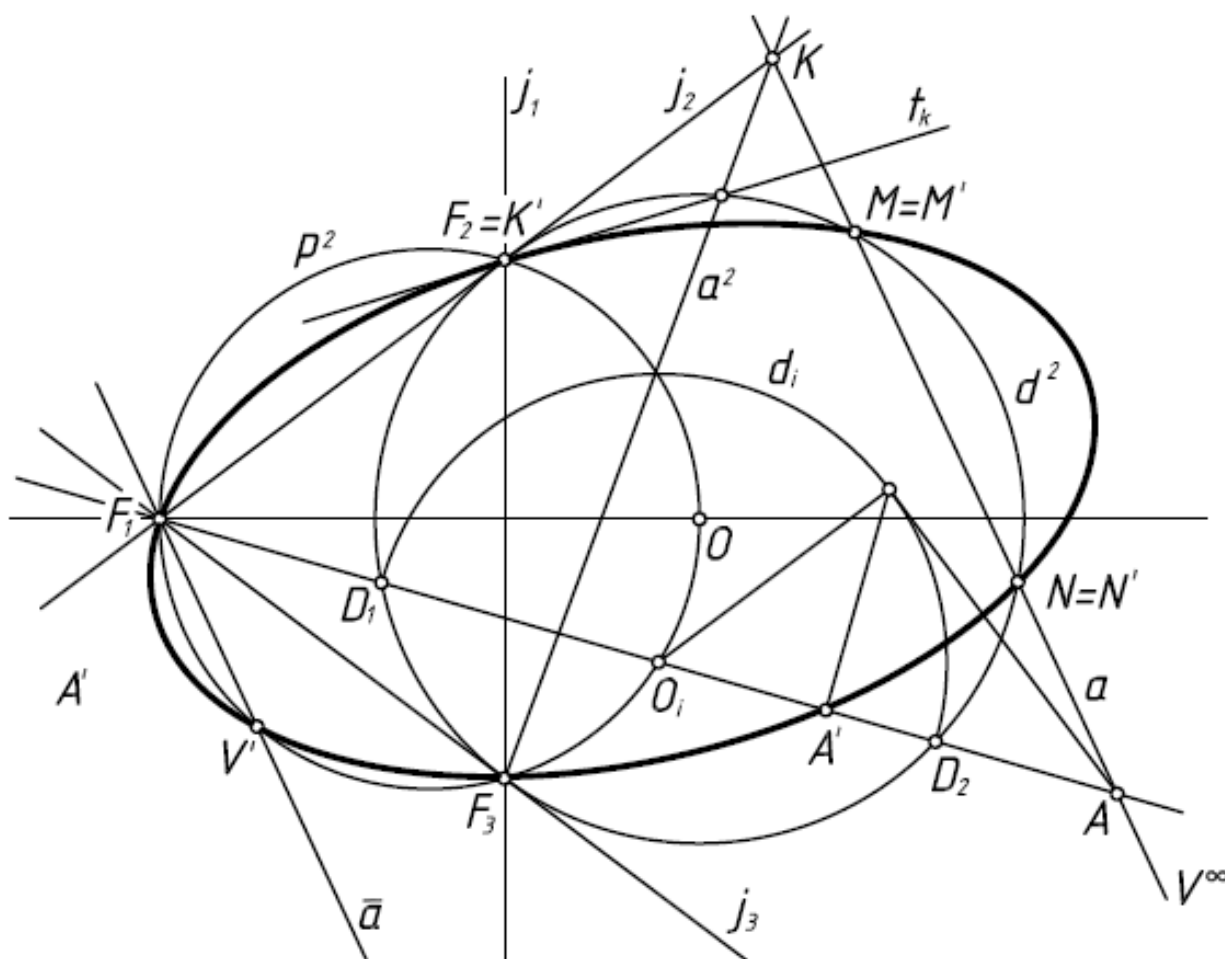


Рис.3

На рис.3 показан графический алгоритм их построения:

- отмечаются точки D_1 , D_2 пересечения прямой $F_1 A(F_1 A')$ с инвариантной окружностью d^2 ;
- строится вспомогательная окружность d_i с центром $O_i = F_1 A(F_1 A') \cap p^2$, где $D_1 D_2$ — ее диаметр;
- если точка A находится вне окружности d_i , то из нее проводится касательная к d_i ; из точки касания опускается перпендикуляр на $F_1 A$; основание A' является соответственной точкой A ;
- если точка A находится внутри окружности d_i , то соответственная точка A строится в обратной последовательности.

Преобразование J_2 имеет три исключенные точки F_1 , F_2 , F_3 , называемые фундаментальными, или F -точками, для которых нарушается однозначность преобразования. Им, в

отличие от всех остальных точек, соответствуют прямые j_1, j_2, j_3 , называемые принципиальными (**P**-прямыми);

- центру преобразования F_1 соответствует его поляр j_1 относительно d^2 ;
- точкам F_2, F_3 пересечения поляры j_1 с d^2 соответствуют принципиальные прямые

$$F_2 \sim j_2(F_1 F_2), F_3 \sim j_3(F_1 F_3)$$

Если центр F_1 находится вне d^2 , то другие F -точки F_2, F_3 будут действительными различными; при $F_1 \in d^2$ точки F_2, F_3 совпадают с F_1 ; если F_1 находится внутри d^2 , то точки F_2, F_3 будут мнимосопряженными. F -точки F_2, F_3 совпадут, если окружность d^2 распадется на две изотропные прямые (радиус окружности d^2 будет равен нулю).

Произвольной прямой a плоскости в J_2 соответствует кривая второго порядка a^2 , проходящая через F -точки F_1, F_2, F_3 и точки $M, N = a \cap d^2$, которые могут быть действительными различными (см.рис.3), совпавшими, если a касается d^2 , и мнимыми, если a пересекает d^2 в мнимых точках. Несобственной точке $V^\infty \in a$ соответствует точка $V' = \bar{a} \cap p^2$, где $\bar{a} \ni F_1, \bar{a} \parallel a$.

Образ a^2 прямой a будет:

- эллипсом (см.рис.3), если прямая a пересекает p^2 в мнимых точках;
- параболой, если a касается p^2 ;
- гиперболой, если a пересекает p^2 в действительных точках.

Из вышеизложенных свойств квадратичной инволюции (преобразования Гирста) J_2 следует конструктивный способ построения двух кривых второго порядка a^2, b^2 , имеющих показанные на рис.2 варианты взаимного положения. Эти кривые a^2, b^2 будем конструировать как образы двух прямых a, b относительно той или иной специализации преобразования J_2 .

Рассмотрим схему получения посредством J_2 варианта рис.2.а взаимного положения кривых a^2, b^2 (рис. 4). Для обеспечения двухточечного касания в $F_2=F_3$ в качестве инвариантной окружности d^2 берем две изотропные прямые $d^1, \bar{d}^1$. Тогда предельная окружность p^2 определяется диаметром $F_1(F_2=F_3)$. В этом преобразовании любой паре пересекающихся прямых $a \cap b = K$ соответствуют две кривые второго порядка a^2, b^2 , имеющие в точке $F_2=F_3$ общую касательную t . Она в точке $F_2=F_3$ касается p^2 . Кривые a^2, b^2 дополнительно пересекаются в центре F_1 инволюции J_2 и в точке K' — образе точки K в J_2 .

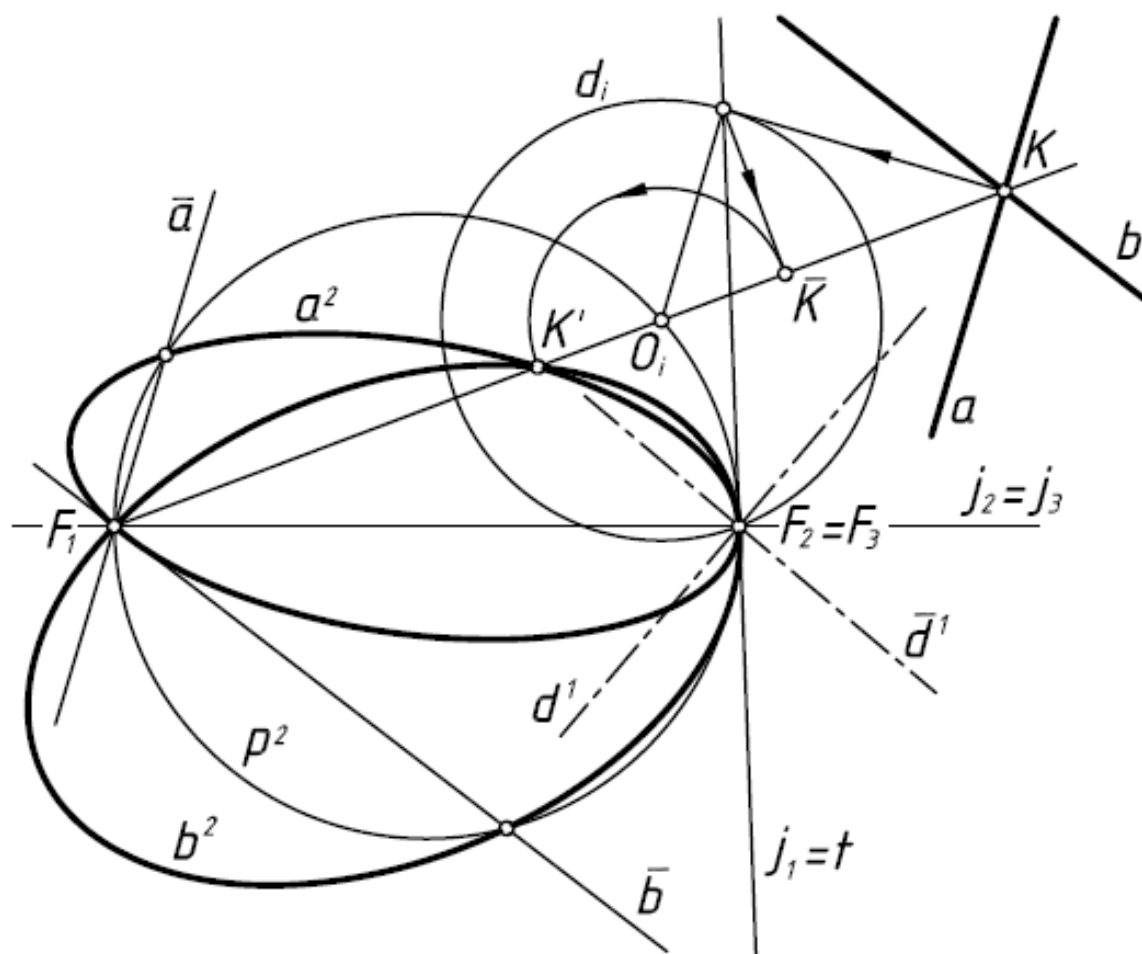


Рис.4

Здесь следует обратить внимание на алгоритм построения точки $K \sim K'$: в отличие от рис.3 здесь вспомогательная окружность d_i (O_i , $R=O_i F_2$) является мнимой. Поэтому точка K' строится как образ точки K в антиинверсии:

— сначала строится точка $\bar{K} \sim K$ в инверсии относительно d_i ;

— затем строится точка K' , симметричная точке $\bar{K}$ относительно O_i . Рассмотренный выше аппарат инволюции J_2 позволяет просто конструировать вариант двух двухточечных касаний кривых a^2 , b^2 (рис.2.г). Для этого достаточно точку $K = a \cap b$ взять на P -прямой j_1 F -точки F_1 . Тогда, в соответствии с алгоритмом инволюции J_2 , точки F_1 и K' совпадут и кривые a^2 , b^2 будут иметь здесь общую касательную $F_1 K$.

Последний вариант двухточечного касания кривых a^2 , b^2 , когда оставшиеся две точки пересечения являются мнимо-сопряженными показан на рис.2.д. Этот вариант можно получить посредством преобразования Гирста, когда его центр F_1 находится внутри инвариантной окружности d^2 . В этом случае, как было отмечено выше, другие две F -точки F_2, F_3 являются мнимыми точками пересечения $j_1 \sim F_1$ с d^2 . Совпадение точек K', F_1 достигается, как и в предыдущем случае, принадлежностью точки

$$K = a \cap b \text{ } P\text{-прямой } j_1.$$

Наибольший интерес с точки зрения конструирования плоских динамических обводов второго и третьего порядков гладкости [6, 7] представляют случаи трехточечного (рис.2.б) и четырехточечного (рис.2.в) касания кривых второго порядка.

Эти варианты касания кривых a^2 , b^2 получаются специализированным аппаратом преобразования Гирста, когда его центр F_1 принадлежит инвариантной окружности d^2 . В этом случае здесь совпадают все три F -точки $F_1=F_2=F_3$. Поэтому образы любых прямых плоскости здесь имеют трехточечное касание, т.е. общую касательную $t = j_1$ и общий круг кривизны p^2 , который (напомним!) является образом несобственной прямой этой плоскости.

Конструирование кривых a^2 , b^2 , имеющих в $F_1=F_2=F_3$ четырехточечное касание, также выполняется просто: точку K пересечения прообразов a, b следует взять на j_1 . Тогда образ K' точки K совпадет с $F_1=F_2=F_3$, следовательно, искомые кривые a^2 , b^2 будут иметь здесь четырехточечное касание.

Таким образом, все возможные варианты соприкосновения кривых второго порядка, приведенных на рис.2, получаются единым аппаратом квадратичной инволюции Гирста. В данной публикации изложены лишь теоретические основы решения сформулированной задачи. Детально эти вопросы применительно к конструированию плоских гладких обводов рассмотрены в [4]. Теперь эти алгоритмы естественным образом обобщаются на конструирование гладких двумерных обводов из отсеков плоскостей, конических и цилиндрических поверхностей.

Список литературы

1. Иванов Г.С. Нормкривая трехмерного пространства как частный случай пересечения двух квадрик. В 3-х т. т.2. // Труды XXII международной научно-технической конференции «Информационные средства и технологии» (18 – 20 ноября 2014 г.) М.: МЭИ. 2014. С. 51-56
2. Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения: Справочное руководство. М.: Физматлит. 1960. 294 с.
3. Четверухин Н.Ф. Проективная геометрия: учебник для вузов. 8-е изд. М.: Просвещение. 1969. 368 с.
4. Иванов Г.С. Конструирование технических поверхностей. (математическое моделирование на основе нелинейных преобразований). М.: Машиностроение. 1987. 192 с.
5. Иванов Г.С. Пучки конических сечений на основе преобразования Гирста. // Краткое содержание и тезисы докладов научно-метод. конференции по прикладной геометрии и инженерной графике. Казань: КИСИ. 1967. С. 28-29
6. Иванов Г.С. Конструирование обводов точек на основе квадратичной инволюции. // Известия ВУЗов. Машиностроение. 1969. № 2. С. 5-9
7. Иванов Г.С. Исследование обводов конструируемых посредством кремоновых инволюций. // Известия ВУЗов. Машиностроение. 1971. № 10. С. 61-64