

Исследование структуры, кинематики и 3D моделирование механизмов Фергюсона

06, июнь 2015

Тарабарин В. Б.¹, Козов А. В.^{1,*}

УДК: 531.091:621.833

¹Россия, МГТУ им. Баумана

^{*}alexey.kozov@gmail.com

Введение

Основные события жизни Джеймса Фергюсона и его работы достаточно подробно описаны в его биографии [1], которая неоднократно переиздавалась в последнее десятилетие [2]. Фергюсон родился 25 апреля 1710 года недалеко от города Кита (Банфшир) в Шотландии в многодетной крестьянской семье. Семья жила за счет обработки нескольких акров арендованной земли. Денег на образование детей не было, поэтому Джеймс посещал среднюю школу в Ките только 3 месяца. Читать он учился самостоятельно при незначительной помощи отца и соседа. Детство, юность и молодые годы Джеймс прожил в Шотландии, зарабатывая на жизнь рисованием миниатюрных портретов. 31 мая 1739 года он женился на Изабелле Вилсон, которая родила ему четырех детей.

В юности, когда ему приходилось пасти скот, он научился наблюдать ночное небо, изучать движение небесных тел. Наблюдения за движением планет породили в нем желание создавать модели, копирующие это движение. Он успешно спроектировал и изготовил несколько подобных механизмов. Полученный опыт астрономических наблюдений и разработки механических моделей движения планет способствовал тому, что в 1743 году Фергюсон направился в Лондон, чтобы заняться астрономией. Здесь он стал читать популярные лекции по астрономии, предназначенные для «леди и джентльменов», которые сопровождались демонстрацией созданных им моделей, экспериментами и опытами. Эти лекции были настолько популярны, что к концу 1740-х годов он стал читать их не только в Лондоне, но и в других больших английских городах (Ливерпуле, Манчестере и др.). К этому времени он стал широко известен как создатель планетариумов, глобусов и других приборов, и занял видное место в мире науки и техники. В 1761 году Джордж III наградил его пожизненной пенсией, а два года спустя Королевское Общество избрало его

своим членом. В 1770 году самоучка пастух-астроном был избран членом американского Философского общества.

Умер Джеймс Фергюсон в Лондоне 16 ноября 1776 года. За годы работы в Лондоне он написал множество статей в «Философский сборник» и «Журнал для джентльменов», издал несколько книг, из которых главными можно считать две: «Астрономия, основанная на принципах сэра Исаака Ньютона» (1756) и «Лекции по избранным разделам механики» (1760). Эти книги были очень популярными, благодаря отсутствию сложных математических расчетов, ясному и непретенциозному стилю.

1. В чем заключается механический «парадокс Фергюсона»

Нужно отметить, что авторам данной статьи не удалось найти точной формулировки этого парадокса. Наиболее полно она сформулирована самим Фергюсоном в письме к его другу мистеру Куперу [2]. История, рассказанная им в этом письме, в кратком изложении такова. Однажды вечером в клубе один часовщик обратился к Фергюсону с заявлением о парадоксальности догмата о «святой Троице». Он утверждал, что невозможно принять Троицу, как одно целое. Фергюсон предложил ему другую задачу из близкой часовщику области: если с одним широким колесом зацепить три узких с различными числами зубьев, неким образом вращать широкое колесо, - как будут вращаться узкие колеса? Часовщик заявил, что все колеса будут вращаться в направлении, противоположном направлению вращения широкого колеса. Фергюсон сказал, что это не так, и что через неделю он докажет это на модели. На следующей неделе он принес модель планетарного механизма, схема которого изображена на рис. 1, а.

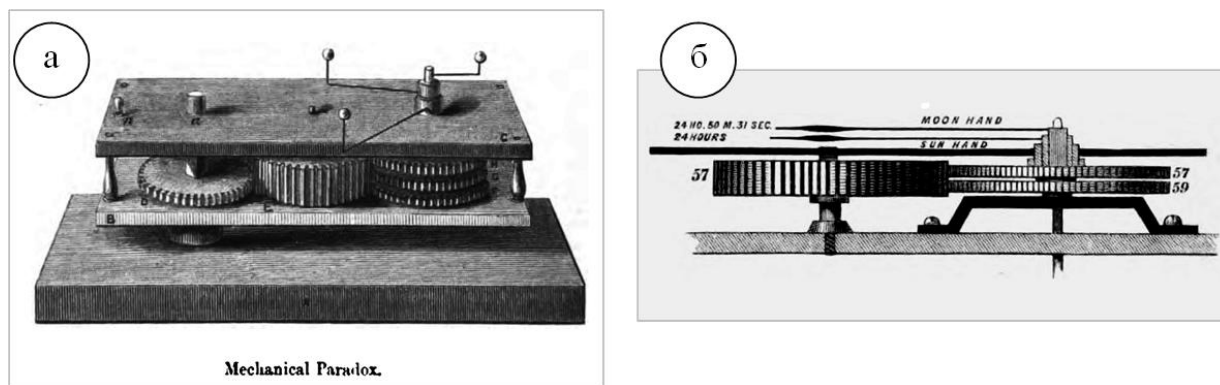


Рис. 1. Два механизма, использованные Фергюсоном в его планетариумах [1]

Модель состояла из водила и пяти зубчатых колес (см. схему на рис.2): центральное 1 было неподвижным, широкое 2 было на вращательной паре установлено на водиле *H* и зацеплялось как с 1, так и с тремя узкими колесами 3, 4 и 5. Эти три колеса были также установлены на водиле *H* на вращательных парах. Числа зубьев колес 1, 2 и 4 были равны между собой, число зубьев колеса 3 было меньше, а колеса 5 – больше, чем число зубьев колеса 1. При вращении водила *H* по часовой стреле колесо 2 вращалось в том же направ-

лении, колесо 4 перемещалось, но не вращалось (т.е. совершало поступательное движение по круговой траектории), колесо 3 вращалось в направлении, противоположном вращению колеса 2, а колесо 5 – в направлении, совпадающим с направлением колеса 2. Часовщик долго вращал модель и признал, что он не может понять и объяснить происходящее. На это Фергюсон сказал, что если мы не можем объяснить простое движение зубчатых колес, то как мы можем понять и объяснить «святую Троицу».

2. Структурный и кинематический анализ механизма Фергюсона

Даже сегодня далеких от механики людей удивляет «парадокс Фергюсона». На рис. 2 показана схема механизма и трех рядов его зубчатых зацеплений. Одна из задач, которую нужно решить при его создании, – вписывание колес звеньев 2 и 3 в одно межосевое расстояние. При этом колесо 2 имеет один зубчатый венец с нулевым смещением, а колеса 3 выполняются с положительным (3а) и отрицательным (3б) смещением. На схеме (рис. 2) проведено графическое кинематическое исследование механизма методом треугольников скоростей Смирнова Л.П. [3], которое наглядно показывает направления вращения звеньев механизма.

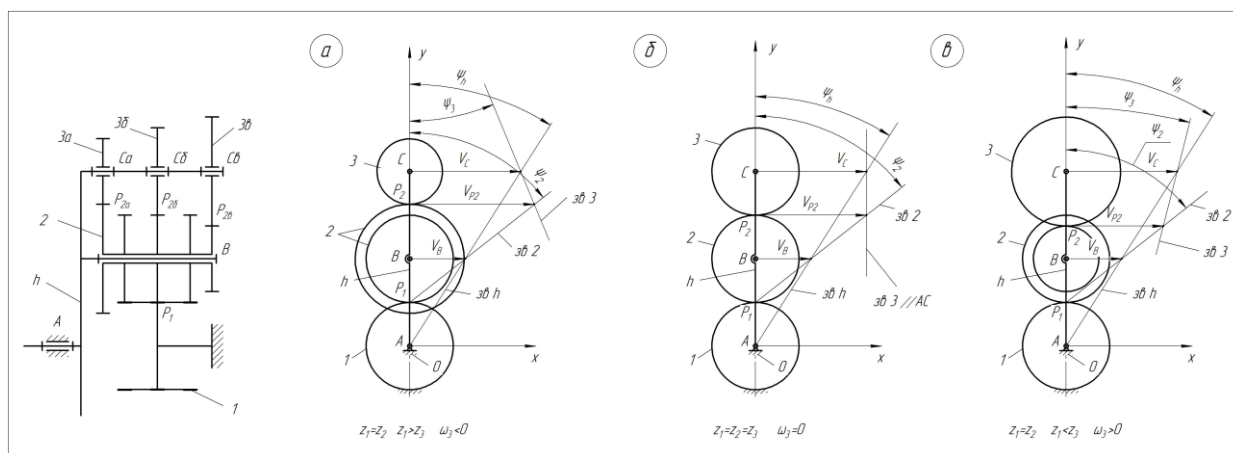


Рис. 2. Схема механизма Фергюсона и его кинематическое исследование

Проведем структурное исследование плоского механизма Фергюсона. Рассмотрим дифференциальный вариант механизма, при котором водило и все зубчатые колеса могут вращаться вокруг своих осей. Общее число подвижных звеньев механизма $n = 6$, число одноподвижных вращательных пар $p_1 = 6$, число двухподвижных высших пар $p_2 = 4$. Подвижность механизма, подсчитанная по формуле Чебышева [4], равна 2.

$$W^{\text{III}} = 3 \cdot n - 2 \cdot p_1 - 1 \cdot p_2 = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 6 - 1 \cdot 4 = 18 - 16 = 2. \quad (1)$$

Если в дифференциальном механизме остановить центральное колесо 1 (как показано на рис. 2), то получим механизм с одной подвижностью, в котором $n = 5$, $p_1 = 5$ и $p_2 = 4$.

$$W^{\text{III}} = 3 \cdot n - 2 \cdot p_1 - 1 \cdot p_2 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - 1 \cdot 4 = 15 - 14 = 1. \quad (2)$$

Уравнение, связывающее вращательные движения звеньев дифференциального механизма можно получить по формуле Виллиса [3]. Запишем эту формулу для всех четырех зацеплений

$$\frac{\omega_1 - \omega_h}{\omega_2 - \omega_h} = -\frac{z_2}{z_1}; \quad (3)$$

$$\frac{\omega_2 - \omega_h}{\omega_{3a} - \omega_h} = -\frac{z_3}{z_2}; \quad (4)$$

Тогда для зацепления с колесом 3

$$\frac{\omega_1 - \omega_h}{\omega_2 - \omega_h} \cdot \frac{\omega_2 - \omega_h}{\omega_3 - \omega_h} = \frac{\omega_1 - \omega_h}{\omega_3 - \omega_h} = -\frac{z_2}{z_1} \cdot \left(-\frac{z_3}{z_2} \right) = \frac{z_3}{z_1}; \quad (5)$$

$$\omega_1 \cdot z_1 + (z_3 - z_1) \cdot \omega_h + \omega_3 \cdot z_3 = 0. \quad (6)$$

Для механизма Фергюсона, в котором колесо 1 остановлено и $\omega_1 = 0$, угловая скорость колеса 3 равна

$$\omega_3 = \left(\frac{z_1 - z_3}{z_3} \right) \cdot \omega_h; \quad (7)$$

то есть в этом механизме:

- если $z_3 = z_1$, то $\omega_3 = 0$ и звено 3 совершает поступательное движение по окружности (рис. 2, б);
- если $z_3 > z_1$, то $\omega_3 < 0$ и звено 3 вращается в направлении, противоположном направлению вращения водила h (рис. 2, в);
- если $z_3 < z_1$, то $\omega_3 > 0$ и звено 3 вращается в направлении, которое совпадает с направлением вращения водила h (Рис. 2, а).

3. Соосные механизмы Фергюсона или механизмы счетчиков

Кроме рассмотренного механизма, в планетариумах Фергюсона применялся соосный механизм, изображенный на рис. 1, б. Подобные механизмы описаны в книге Редтенбахера [5] как механизмы счетчиков. Здесь приведены описания и чертежи моделей из коллекции Редтенбахера, разработанные и изготовленные в мастерских Рабочего института в Карлсруэ. Эти модели послужили образцами для моделей [6], изготовленных под руководством Ершова А. С. учащимися мастерских классов в Московском ремесленном учебном заведении или МРУЗ (название МГТУ им. Н.Э. Баумана в те годы). К этим моделям относятся и два механизма (рис. 3, б и в) из коллекции моделей механизмов кафедры ТММ МГТУ им. Н.Э. Баумана, которые аналогичны механизму Фергюсона (рис. 1б).

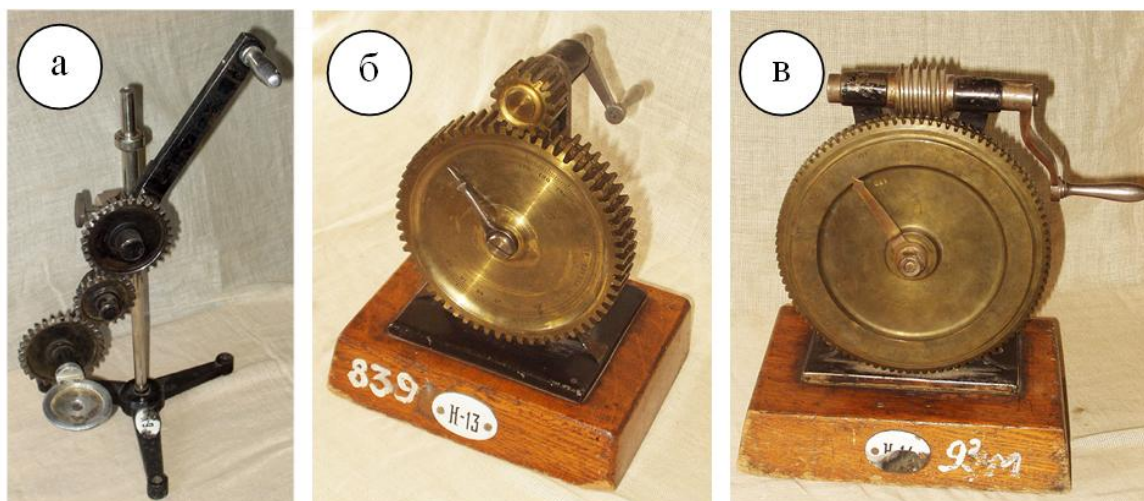


Рис. 3. Фотографии моделей Фергюсона из коллекции моделей кафедры ТММ МГТУ им. Н.Э. Баумана

Хотя эти модели похожи на модели Редтенбахера, они имеют множество конструктивных отличий, как в форме деталей, так и в их размерах. Это можно увидеть на чертежах моделей Редтенбахера (б, в) и на фотографии (а) одной из них [7], которые приведены на рис. 4.

Во введении к [5] отмечено, что «модели коллекции разделены на четыре класса: 1) детали машин; 2) типовые изделия машиностроения; 3) механизмы передачи и преобразования движения; 4) модели комплексов механизмов машин. Модели 1-го класса наглядно демонстрируют правильные конструктивные формы и пропорции деталей машин. Второго - дают представление о результатах производственных процессов, благодаря которым изготавливаются компоненты механизмов. Третьего - точно демонстрируют реальное действие различных механизмов передач. Модели четвертого класса представляют те полные машины и механизмы, которые сложно представить чертежами. В данной работе представлены и разобраны только модели третьего класса».

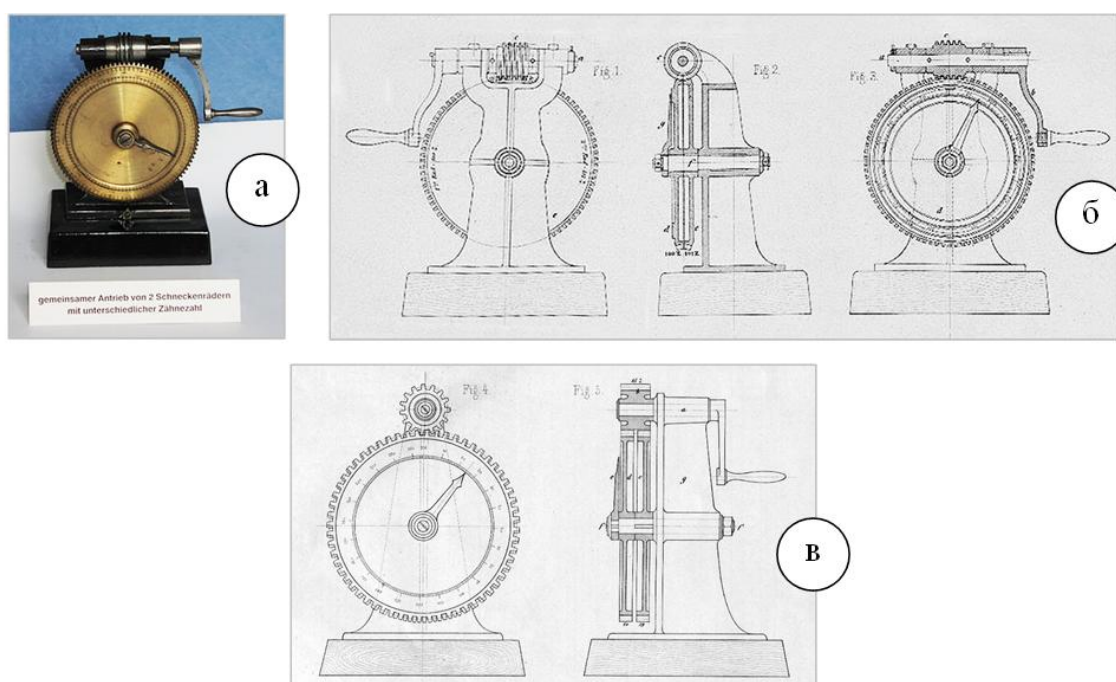


Рис. 4. Чертежи моделей счетчиков из книги Редтенбахера и фотография модели [7]

Рассмотрим модели, изображенные на рис. 3 б и в, подробнее. По структуре и кинематике эти модели эквивалентны рассмотренной выше модели «парадокса Фергюсона». Уравнения 1, 2, 3 и 6 полностью применимы к этим механизмам. Особенность соосного механизма в том, что при движении центр колеса 3 неподвижен, поэтому при равенстве чисел зубьев $z_1 = z_3$ колесо 3 будет неподвижным. На рис. 5 изображена схема механизма, изображенного на рис. 3, б. В книге [5] дано такое описание этого механизма: «Дисковый счетчик: a - это быстро вращающаяся ось, обороты которой должны быть подсчитаны, b - связанное с a ведущее колесо с числом зубьев $z_a = 15$; c и d - два колеса, из которых первое имеет $z_c = 59$, второе — $z_d = z_c + 1 = 60$ зубьев; f - ось, установленная на основании g на подшипнике, с которой соединены колесо c и стрелка e , которая указывает на выгравированную на торце колеса d шкалу; колесо d свободно вращается на оси f . Число оборотов, которое делает ось a , при условии, что стрелка совершила полный оборот в своем движении относительно шкалы, равняется:

$$\frac{z_c \cdot z_d}{z_a} = \frac{59 \cdot 60}{15} = 236.$$

Поэтому шкала на колесе d должна иметь 236 делений для того, чтобы одно деление шкалы соответствовало одному обороту оси a . Обозначения на схеме рис. 5 и в тексте Редтенбахера [5] соответствуют: звено 1 — d ; звено 2 — b, a ; звено 3 — c, g, f и e ; стойка 0 — g .

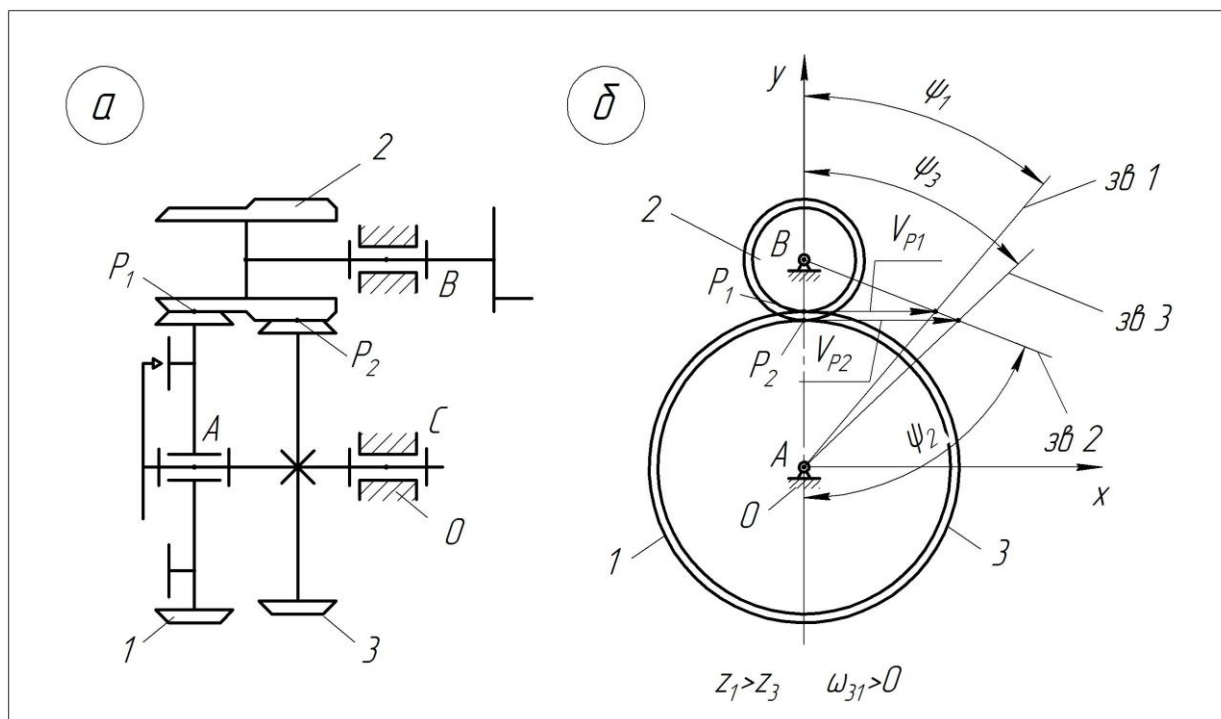


Рис. 5. Схема соосного «дискового» счетчика с цилиндрическими колесами

На рис. 6 представлена схема пространственного счетчика с винтовым колесом или с червячными передачами, фотографии которого даны на рис. 3, в и 4, а.

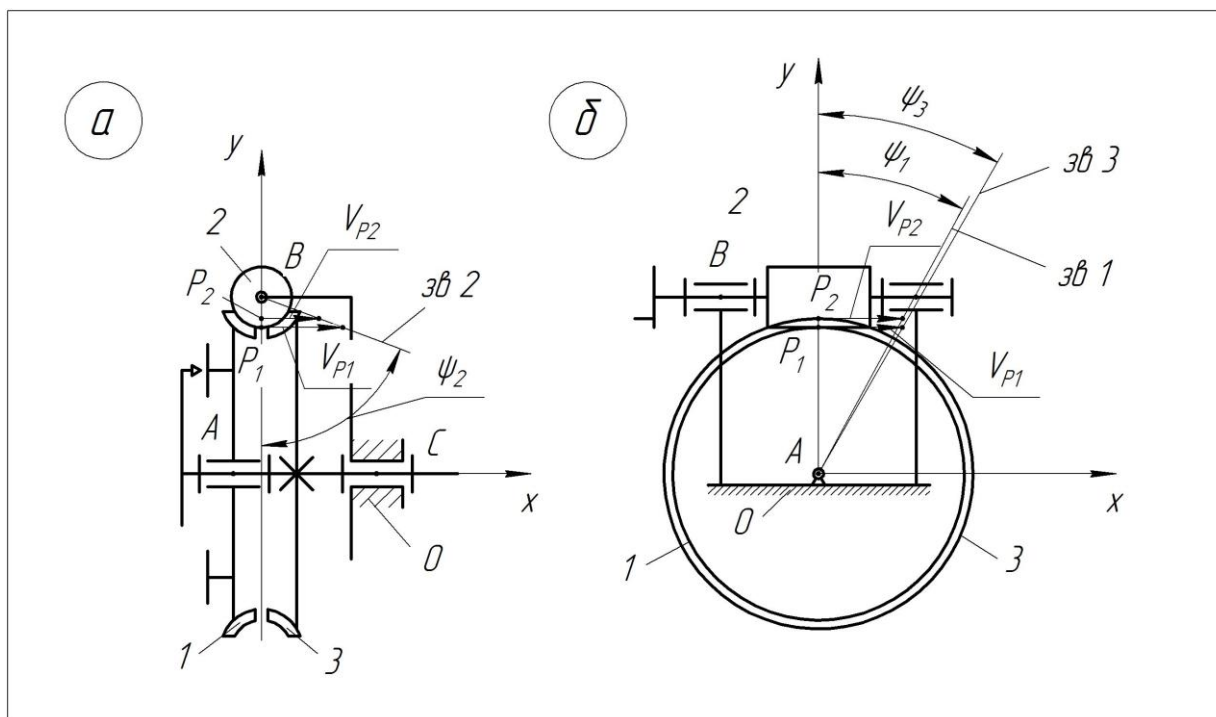


Рис. 6. Схема соосного счетчика с «винтовой шестерней»

Об этом счетчике у Редтенбахера [5] написано следующее: «Модель, изображенная на рис. 1, 2, 3 (Рис. 4, б). Здесь a – быстро вращающаяся ось с ручкой b , обороты которой необходимо подсчитать; червяк c жестко связан с осью a ; d и e – два узких червячных колеса, которые зацепляются с винтовым колесом c . Червячное колесо d имеет 100 зубьев, а колесо e – 101. Колесо e и стрелка g жестко соединены с осью f ; стрелка g указывает на шкалу, выгравированную на торце d . Колесо d свободно вращается относительно оси f . При одном обороте винта c каждое из колес d и e поворачивается на один зуб. Если a за некоторое время совершит n оборотов, то колесо d повернется на $\frac{360}{z_d} \cdot n$ градусов, а колесо

e – на $\frac{360}{z_e} \cdot n$ градусов. Стрелка g повернется относительно d на

$\left(\frac{360}{z_d} - \frac{360}{z_e} \right) \cdot n = \frac{360}{10100} \cdot n$ градусов. После того, как ось a совершит 10100 оборотов,

стрелка g пройдет один круг по шкале d . На колесе d имеется выгравированная шкала с 10100 делениями, одно деление этой шкалы соответствует одному обороту оси червяка». Обозначения на схеме рис. 6 и в тексте [4] соответствуют: звено 1 – d ; звено 2 – b , a и c ; звено 3 – g , f и e .

4. Компьютерное 3D моделирование соосных механизмов Фергюсона

Сегодня в сети Интернет можно найти как фотографии и описания физических [6,7,8], так и компьютерные, виртуальные модели [9,10] механизмов Фергюсона. Однако

эти модели не привязаны к конкретным объектам и предназначены для наглядной демонстрации «механического парадокса». В случае, рассматриваемом в данной статье, целью моделирования было получение компьютерной модели реально существующего механизма - памятника истории науки и техники. Нужно было создать виртуальный объект, максимально приближенный к реальности, сохраняющий не просто геометрическое, но и полное визуальное подобие (цвет, фактуру, шрифты и т. п.).

Для создания 3D моделей механизмов использовалась система трехмерного моделирования «КОМПАС-3D» машиностроительной конфигурации, которая имеет встроенные библиотеки стандартных элементов и инструменты для расчета и моделирования механических передач.

Исходная модель механизма счетчика была сфотографирована, измерена и разобрана на составные части. Сначала были изготовлены их трехмерные модели.

Детали в «КОМПАС-3D», как и в других программах трехмерного моделирования, образованы геометрическими примитивами, такими как параллелепипед, цилиндр, пирамида и другие при применении к ним логических операций. Некоторые части детали создают с помощью операций вращения или перемещения исходного контура по направляющей (рис. 7).

Таким способом были получены модели осей, стрелок, рукояток и оснований. Для создания моделей зубчатых колес была использована библиотека «Валы и механические передачи 2D». Она позволяет провести геометрический расчет механической передачи по заданным параметрам (число зубьев шестерни и колеса, межосевое расстояние, требуемое смещение или диаметр вершин зубьев) и получить двухмерный чертеж детали (рис. 8, а). Далее программа может сгенерировать трехмерную модель (рис. 8, б), которая нуждается лишь в небольших правках: добавление скруглений, пазов или шкалы с цифрами.

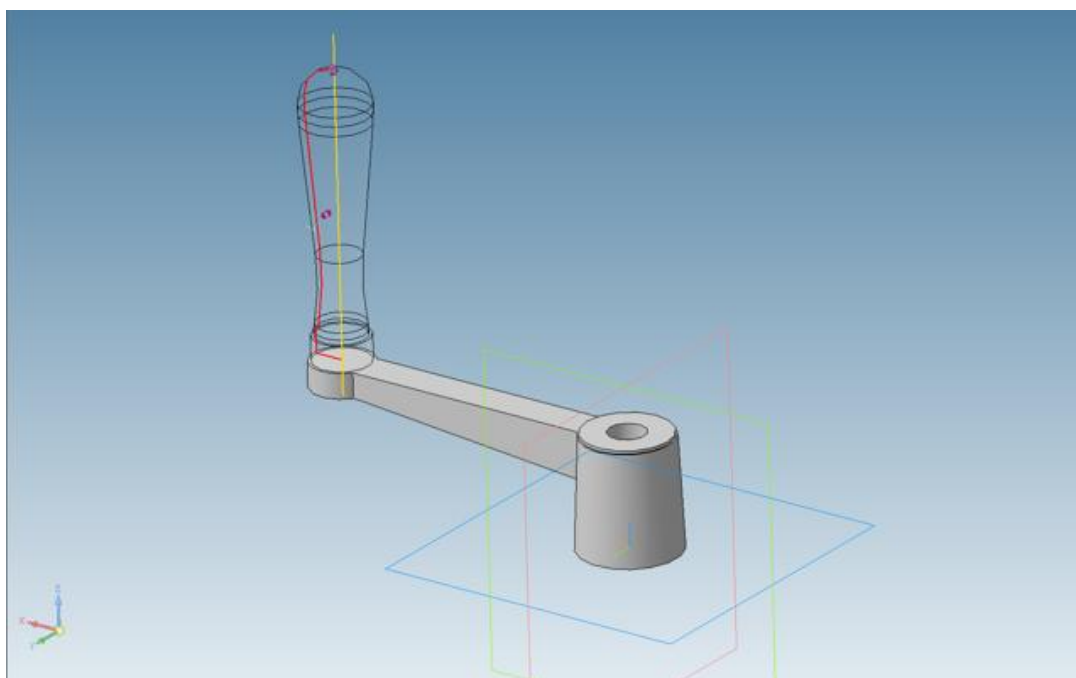


Рис. 7. Формирование объемных элементов детали

Такие элементы модели, как гайки, шайбы и винты были подобраны из библиотеки стандартных деталей, их форма и размеры корректировались по результатам измерений исходного механизма.

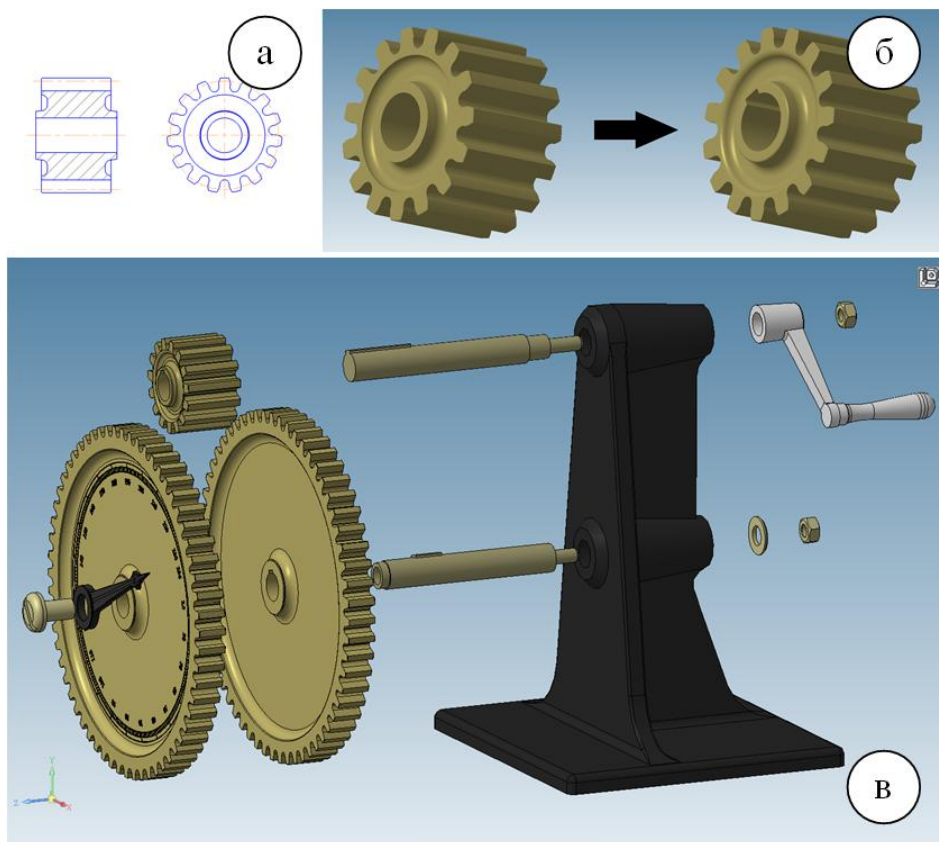


Рис. 8. Детали 3D модели, подготовленные к сборке

3D модели червяка и червячных колес с необходимым числом зубьев получены с помощью модуля «Валы и механические передачи 2D», после чего с помощью логической операции вычитания толщина червячных колес была уменьшена наполовину (рис. 9).

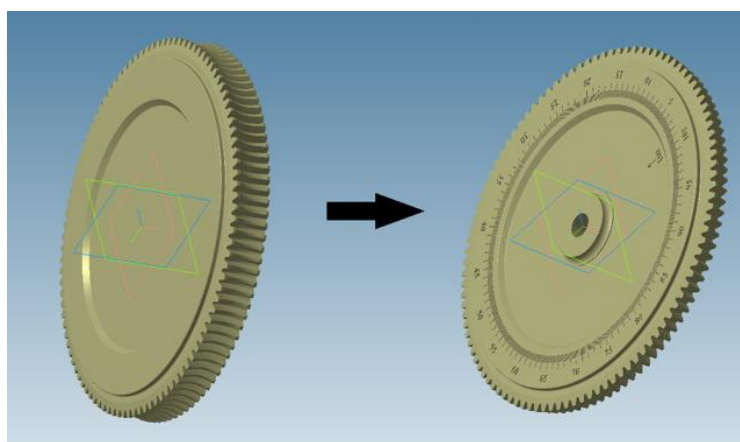


Рис. 9. Формирование детали из библиотечного примитива

Начиная с основания, в сборку были добавлены детали и для каждой заданы необходимые ограничения (рис. 8, в). Например, необходимо соблюдение соосности между осью, отверстием в основании и отверстием в шестерне, а паз в шестерне должен совпадать с соответствующим выступом оси. Для зубчатых колес задаются ограничения на взаимное вращение с необходимым передаточным отношением. Если ограничения были заданы правильно, то при вращении входного звена (рукоятки) собранной 3D модели все ее детали будут двигаться так же, как и детали исходного механизма. Собранные трехмерные модели представлены на рис. 10.

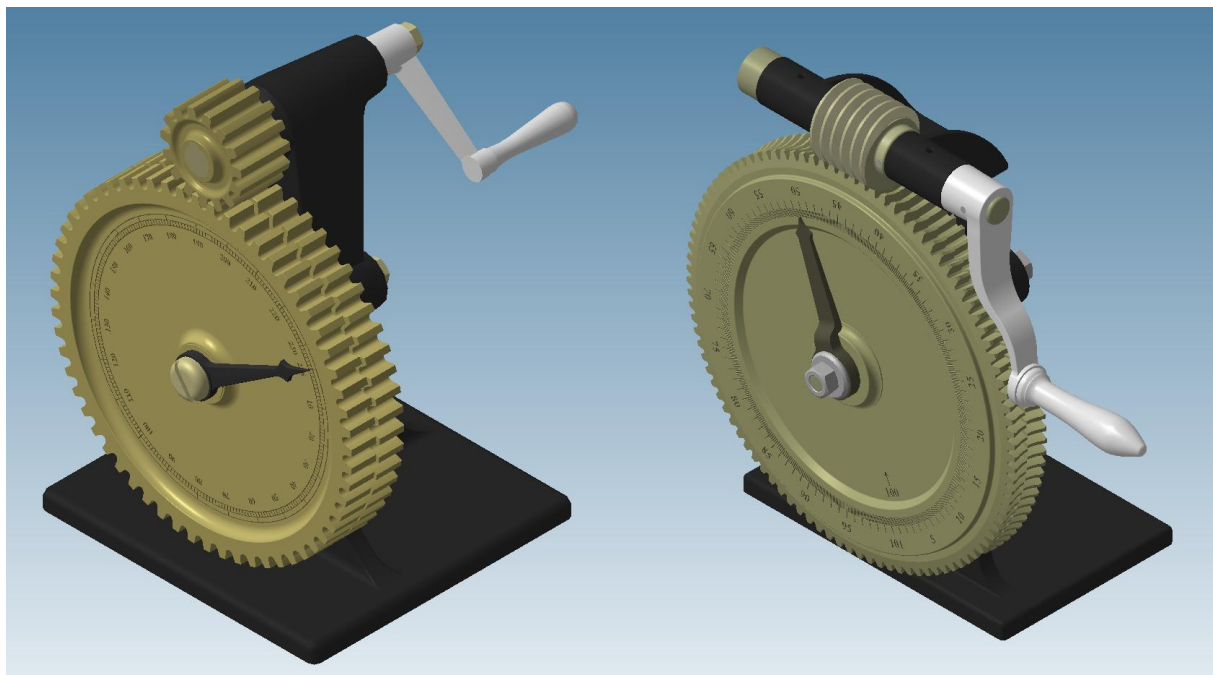


Рис. 10. Собранные 3D модели механизмов

Работа механизма может быть наглядно продемонстрирована с помощью библиотеки анимации, имеющейся в составе системы «КОМПАС-3D». Можно задать вращение рукоятки с необходимой частотой вокруг оси, совпадающей с осью верхнего отверстия в стойке, и запустить воспроизведение анимации. Также можно создавать и более сложные анимации для большого числа деталей, например, для демонстрации процесса сборки модели из отдельных компонентов. То есть 3D модель, в отличие от реального механизма, позволяет наглядно показать процесс сборки и разборки механизма.

С помощью дополнительного модуля «Artisan Rendering» можно получить изображение созданной модели с учетом оптических свойств материалов, освещения и окружения. Каждой детали и, при необходимости, отдельным поверхностям, необходимо назначить цвет или определенную текстуру. Для модели в целом выбирается окружение, тип и интенсивность освещения, фон, после чего запускается процесс визуализации. Результаты его выполнения представлены на рис. 11, а и б.

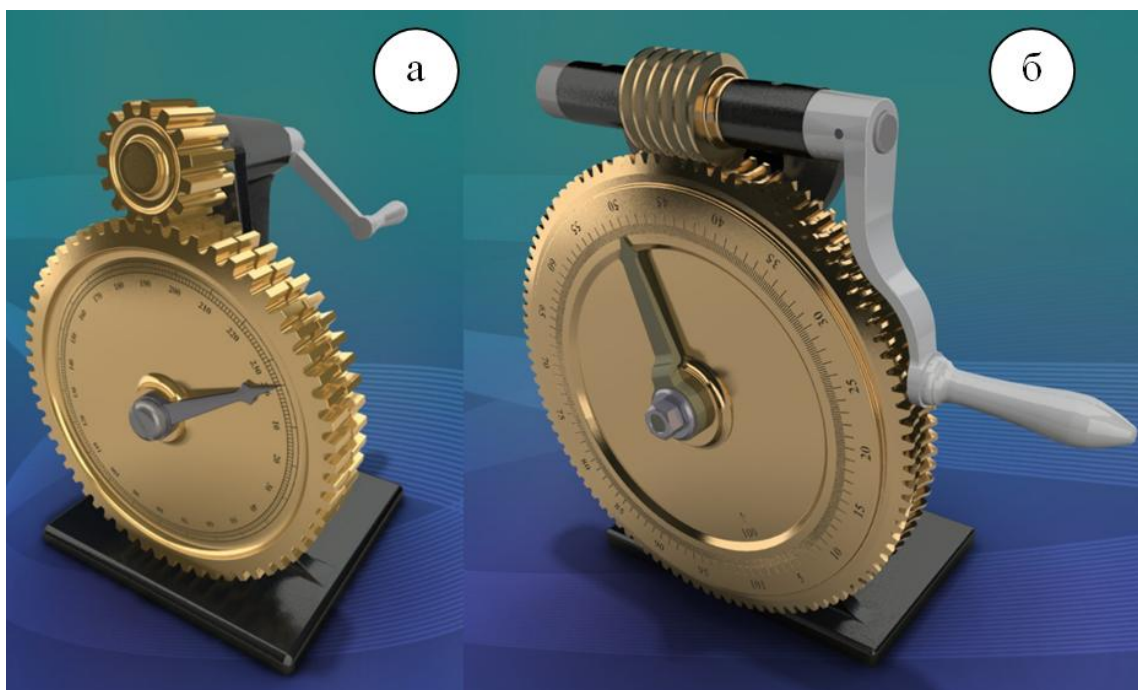


Рис. 11. Визуализация 3D-моделей

Заключение

Атрибуция моделей исторической части коллекции механизмов требует тщательного изучения истории техники, биографий их создателей и изготовителей, современного состояния соответствующего раздела машиноведения. В данной статье приведены материалы по атрибуции двух моделей счетчиков. Здесь кратко рассмотрена биография Джеймса Фергюсона и сущность его «механического парадокса», дано структурное и кинематическое исследование механизмов Фергюсона и приведено описание 3D моделирования двух моделей счетчиков.

Создавая механические модели движения планет (планетарии и лунариумы), Фергюсон пришел к необходимости применения планетарных механизмов. При этом он нашел практический метод вписывания в заданное межосевое расстояние зубчатых передач с различным суммарным числом зубьев; он на практике применил метод «угловой коррекции», теория которой была разработана только в 20-м веке.

Рассмотренные в статье модели счетчиков в ноябре 2011 года Экспертным Советом при Политехническом музее были признаны памятниками науки и техники 1-ой категории (сертификаты №1040 и №1041). С целью пропаганды и популяризации этих памятников авторами были разработаны их пространственные виртуальные модели. Полученные электронные копии механизмов имеют малый размер, они могут быть легко размещены на сайтах виртуальных музеев и других тематических сетевых ресурсах. Благодаря этому люди из любой точки Земли смогут познакомиться с механизмами и получить наглядное представление об их работе.

Список литературы

1. Life of James Ferguson, F.R.S., by Ebenezer Henderson, LL.D., 1867; 2nd ed. 1870.
2. Ebenezer Henderson, James Ferguson Life of James Ferguson, F.R.S.: In a Brief Autobiographical Account, and Further Extended Memoir: Primary Source Edition, Nabu Press, 2013. – pp. 532.
3. Тарабарин В.Б. Курс лекций по Теории машин и механизмов. Лекция 15. Кинематика планетарных механизмов. Режим доступа: http://tmm-umk.bmstu.ru/lectures/lect_15.htm (дата обращения 11.05.2015).
4. Тарабарин В.Б., Кузенков В.В., Фурсяк Ф.И. Лабораторный практикум по Теории механизмов и машин: Метод. указания к лабораторным работам по дисциплине ТММ. – М.: Изд-во МГТУ, 2009. – 96 с., ил.
5. Redtenbacher F. Die Bewegungs-Mechanismen. Bassermann. Mannheim. 1857. - pp. 123.
6. A. Golovin, V. Tarabarin Russian Models from the Mechanisms Collection of Bauman University. Ed. M. Ceccarelli, Series History of Mechanisms and Machines. Volume 5, Springer, 2008 – pp. 246.
7. Redtenbacher Collection of Kinematic Mechanisms, University of Karlsruhe, Germany. Model: UK053 Worm and Two-wheel Drive Chain. Режим доступа: http://kmoddl.library.cornell.edu/model_metadata.php?m=347 (дата обращения 11.05.2015).
8. James Ferguson's Mechanical Paradox Orrery. Armstrong Metalcrafts. Режим доступа: <http://armstrongmetalcrafts.com/Products/ParadoxOrrery.aspx> (дата обращения 11.05.2015).
9. Ferguson's Paradox. Режим доступа: <http://www.youtube.com/watch?v=UXUU0R-GSZ8> (дата обращения 11.05.2015)
10. Ferguson Mechanical Paradox for clock motion work. Режим доступа: <http://www.youtube.com/watch?v=vWNLDgU6Xl4> (дата обращения 11.05.2015)
11. Н. Б. Ганин. Трехмерное моделирование в КОМПАС-3D, ДМК-Пресс, 2012. – с. 784.