

Методика изложения темы "Решение задач на классическую вероятность с помощью формул комбинаторики" в курсе "Теория вероятностей"

06, июнь 2015

Ахметова Ф. Х.^{1,*}, Ласковая Т. А.¹, Попова Е. М.¹

УДК: 519.21

¹Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

[*dobrich2@mail.ru](mailto:dobrich2@mail.ru)

Введение

Теория вероятностей и математическая статистика являются важной частью математического образования выпускника любого технического университета. Вероятностные методы широко применяются при решении большого числа инженерных, экономических, финансовых, естественно -научных задач. Современная физика, химия, лингвистика, философия, весь комплекс социально-экономических наук развиваются на вероятностно-статистической базе.

Каждый в своей жизни ежедневно сталкивается с вероятностными ситуациями. Круг вопросов, связанных с осознанием соотношения понятий вероятности и достоверности, проблемой выбора наилучшего из нескольких вариантов решения, оценкой степени риска и шансов на успех – все это находится в сфере реальных жизненных интересов. Исходы многих явлений заранее предсказать невозможно, какой бы полной информацией мы о них не располагали. Нельзя, например, сказать наверняка, какова вероятность сдачи экзамена или какой стороной упадет подброшенная вверх монета, когда в следующем году выпадет первый снег. Однако исходы явлений тоже имеют свои законы, которые начинают проявляться при многократном повторении случайных событий.

1.1 Пространство элементарных событий. Случайные события.

Первым этапом при построении математической модели эксперимента является построение пространства элементарных событий, введение которого позволяет при решении конкретных практических задач оперировать общим аппаратом теории множеств. Рассмотрим основные понятия, которые будем использовать в дальнейшем.

Определение 1.1. Элементарным событием (исходом) называют любой простейший (т.е. неделимый в рамках данного опыта) исход опыта. Совокупность всех элементарных событий называется пространством элементарных событий (ПЭС), соответствующим данному эксперименту.

Другими словами, множество элементарных исходов является пространством элементарных событий Ω , если выполнены следующие условия:

- 1) в результате опыта один из исходов обязательно произойдет;
- 2) появление одного исхода исключает появление остальных;
- 3) каждый элементарный исход является неделимым в рамках данного опыта.

Пространство элементарных событий обозначается буквой Ω , а элементарные исходы – буквой ω , снабженной при необходимости, индексом.

Определение 1.2. Любое подмножество ПЭС Ω называют **случайным событием**.

Элементарные исходы, которые являются элементами рассматриваемого события, называются исходами, благоприятствующими наступлению данного события. Событие происходит тогда и только тогда, когда происходит одно из элементарных событий, благоприятствующих ему. События обозначаются заглавными буквами латинского алфавита: $A, B, C, \dots$ Рассмотрим примеры, поясняющие понятие пространства элементарных событий.

Пример 1.1. Эксперимент заключается в однократном бросании игральной кости. Пространство элементарных событий в данном опыте имеет вид

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\},$$

где ω_i - появление i очков на верхней грани кости.

Рассмотрим в данном опыте следующие события: A - выпадение четного числа очков, B - выпадение нечетного числа очков, C - число выпавших очков – простое. Очевидно, что $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, $B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$, $C = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5\}$.

Пример 1.2. Эксперимент заключается в выборе одной из 28 костей домино. Пространство элементарных событий в данном случае записывают в виде

$$\Omega = \{(i, j), i = 0, 1, \dots, 6, j = 0, 1, \dots, 6, i \leq j\}.$$

Рассмотрим в данном опыте следующие события: A - на выбранной кости очки совпадают; B - сумма очков на выбранной кости - нечетное число, а разность равна 3; C - произведение очков есть нечетное число. Тогда:

$$A = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (5, 5); (6, 6)\},$$

$$B = \{(1, 4); (2, 5); (3, 6)\},$$

$$C = \{(1, 1); (1, 3); (1, 5); (3, 3); (3, 5); (5, 5)\}.$$

Пример 1.3. На отрезке $[0,1]$ случайным образом берутся точки. Пусть X и Y - их координаты. Пространство элементарных событий в этом случае имеет вид: $\Omega = \{(X, Y): 0 \leq X \leq 1, 0 \leq Y \leq 1\}$ (рис. 1).

Рассмотрим следующие события:

A - первая точка лежит левее второй;

B - расстояние между точками меньше $1/2$.

Нетрудно видеть, что:

$$A = \{(X, Y): X < Y\} \text{ (рис.2) }, B = \{(X, Y): |Y - X| < \frac{1}{2}\} \text{ (рис.3).}$$

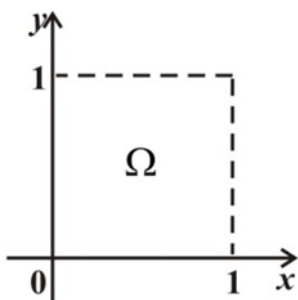


Рис. 1.

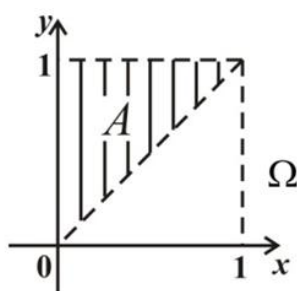


Рис. 2.

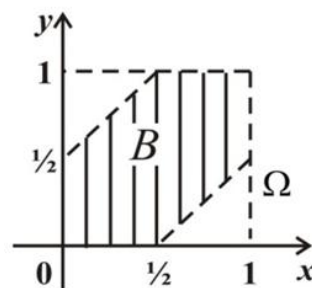


Рис. 3.

Определение 1.3. Событие, которое обязательно произойдет в данном опыте, называется **достоверным**. Достоверное событие содержит все элементарные исходы данного опыта и обозначается буквой Ω .

Определение 1.4. Событие, которое никогда не происходит в данном опыте, называется **невозможным**. Невозможное событие не содержит ни одного исхода данного опыта и обозначается символом $\emptyset$.

Пример 1.4. При бросании игральной кости достоверное событие – это выпадение хотя бы одного очка, а невозможное событие – выпадение 7 очков.

2.1 Классическое определение вероятности (по Лапласу)

Если пространство элементарных событий Ω содержит конечное число равновозможных элементарных исходов, то используют классическое определение вероятности.

Определение 2.1. Вероятностью события A называют отношение числа N_A благоприятствующих событию A элементарных исходов к общему числу N равновозможных элементарных исходов: $P(A) = \frac{N_A}{N}$.

Рассмотрим задачи нахождения вероятностей тех или иных событий.

Задача 2.1. Из шаров, пронумерованных всеми двузначными числами, наудачу берется один. Какова вероятность того, что номер взятого шара заканчивается нулем?

Решение. Пространство элементарных событий Ω в нашем случае имеет вид: $\Omega = \{\omega_{10}, \omega_{11}, \dots, \omega_{99}\}$, где ω_{ij} - событие, состоящее в том, что вытянутый шар имеет номер ij . Тогда событие A , состоящее в том, что номер вытянутого шара оканчивается нулем, можно записать в виде: $A = \{\omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{30}, \omega_{40}, \omega_{50}, \omega_{60}, \omega_{70}, \omega_{80}, \omega_{90}\}$.

Число всех исходов равно числу занумерованных шаров, то есть $N = 90$. Число благоприятствующих событию исходов равно количеству двузначных чисел, оканчивающихся нулем, то есть $N_A = 9$. Следовательно, $P(A) = \frac{9}{90} = 0,1$.

Задача 2.2. Подбрасываются две игральные кости. Найти вероятности следующих событий: A - числа очков на обеих костях совпадают, B – число очков на первой кости меньше, чем на второй, C - сумма очков четное число, D - сумма очков больше десяти.

Решение. Пространство элементарных событий состоит из $N = 36$ элементарных исходов $\Omega = \{(i, j), i = 1, \dots, 6, j = 1, \dots, 6\}$, где (i, j) - событие, состоящее в том, что на первой кости выпало i очков, а на второй – j очков.

Тогда событие A можно записать в виде: $A = \{(1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (5,5); (6,6)\}$.

Следовательно, $N_A = 6$, $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Событие B имеет вид:

$$B = \{(1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6); (2,3); (2,4); (2,5); (2,6); (3,4); (3,5); (3,6); (4,5); (4,6); (5,6)\}$$

. Следовательно, $N_B = 15$, $P(B) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

Событие C имеет вид:

$$C = \left\{ (1,1); (1,3); (1,5); (2,2); (2,4); (2,6); (3,1); (3,3); (3,5); \right. \\ \left. (4,2); (4,4); (4,6); (5,1); (5,3); (5,5); (6,2); (6,4); (6,6) \right\}.$$

Следовательно, $N_C = 18$, $P(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

Событие D имеет вид: $D = \{(5,6); (6,5); (6,6)\}$.

Следовательно, $N_D = 3$, $P(D) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

2.2 Элементы комбинаторики

Решение задач на классическую вероятность часто облегчается, если использовать комбинаторные формулы. Они определяют число элементарных исходов в опыте, состоящем в выборе m элементов из n элементов исходного множества. При этом всегда строго оговорено, каким способом производится отбор и что понимается под различными выборками.

Существуют две различные схемы отбора. Первая схема – это схема выбора элементов **без возвращения** (отбираются либо сразу m элементов, либо последовательно по одному элементу, причем каждый отобранный элемент исключается из исходного множества). Вторая схема – это схема выбора **с возвращением** (выбор осуществляется поэлементно с возвращением отобранного элемента на каждом шаге и тщательным перемешиванием исходного множества перед следующим отбором). После того, как выбор осуществлен, отобранные элементы могут быть либо упорядочены, либо нет. Таким образом, существует четыре постановки эксперимента по выбору наудачу m элементов из n элементов исходного множества.

Сочетания

Если опыт состоит в выборе m элементов из n элементов исходного множества без возвращения и без упорядочивания, то исходом такого опыта можно считать m - элементные подмножества исходного n - элементного множества, имеющие различный состав. Они называются сочетаниями из n элементов по m . Общее число всех сочетаний определяется формулой:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!}.$$

Задача 2.3. На кафедре работают 10 преподавателей. Сколько комиссий для приема задолженностей можно создать, если известно, что комиссия должна состоять из трех человек?

Решение: $C_{10}^3 = \frac{10!}{7!3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$

Размещения

Если опыт состоит в выборе m элементов из n элементов исходного множества без возвращения, но с упорядочиванием, то результатом такого опыта можно считать упорядоченные m - элементные подмножества исходного n - элементного множества. Они называются размещениями из n элементов по m . Общее число всех размещений определяется формулой:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1).$$

В частном случае $m=n$ опыт фактически состоит в упорядочивании исходного множества, то есть сводится к случайной перестановке элементов всего множества. Общее число всех перестановок определяется формулой:

$$P_n = A_n^n = n!.$$

Задача 2.4. На первом курсе изучается 10 различных предметов. Сколькими способами можно составить расписание на вторник, если во вторник должны быть занятия по трем различным предметам?

Решение: $A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 720.$

Задача 2.5. Сколькими способами можно посадить семь человек за круглый стол?

Решение: $P_8 = 7! = 5040.$

Сочетания с повторениями

Если опыт состоит в выборе с возвращением m элементов из n элементов исходного множества $\{a_1, \dots, a_n\}$ без последующего упорядочивания, то результатом такого опыта будут всевозможные m - элементные наборы, которые могут содержать повторяющиеся элементы и отличаются друг от друга только составом. Например, при $m=3$ наборы $\{a_1, a_2, a_1\}$ и $\{a_1, a_1, a_2\}$ неразличимы, а набор $\{a_1, a_3, a_2\}$ отличается от предыдущих. Такие комбинации называются сочетаниями с повторениями. Их общее число определяется формулой: $C_n^m = C_{n+m-1}^m$.

Задача 2.6. Сколькими способами можно составить набор из 7 пирожных, если имеется 5 видов пирожных?

Решение: $C_5^7 = C_{11}^7 = \frac{11!}{7!4!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 330.$

Размещения с повторениями

Если выбор m элементов из n элементов исходного множества $\{a_1, \dots, a_n\}$ осуществляется с возвращением и с упорядочиванием, то результатом такого опыта будут всевозможные m - элементные наборы (вообще говоря, с повторениями), отличающиеся друг от друга либо составом элементов, либо порядком их следования. Например, при $m=3$ наборы $\{a_1, a_2, a_1\}$, $\{a_1, a_1, a_2\}$ и набор $\{a_1, a_3, a_2\}$ являются различными исходами данного опыта. Такие комбинации называются размещениями с повторениями и их число определяется формулой: $A_n^m = n^m$.

Задача 2.7. Сколькими способами 5 пассажиров могут выйти на 7 этажах? **Решение:** $A_6^5 = 6^5 = 7776.$

Для того, чтобы студенты усвоили теоретический материал и могли структурировать комбинаторные формулы, предлагается максимально лаконично представить выше изложенное в виде таблицы. В ней будут указаны основные формулы и типовые задачи, в которых они используются.

Приведем эту таблицу:

Название	Формула	Типовая задача
Размещения с повторениями из n элементов по m	$A_n^m = n^m$	Имеется 5 различных стульев и 7 рулонов обивочной ткани. Сколькими способами можно осуществить обивку стульев? Ответ: $A_7^5 = 7^5 = 16807$.
Размещения без повторений из n элементов по m	$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$	В шахматном турнире участвуют 5 школьников и 15 студентов. Сколькими способами могут распределиться места, занятые в турнире школьниками, если никакие два участника не набрали одинаковое количество очков? Ответ: $A_{20}^5 = \frac{20!}{15!} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = 1860480$.
Перестановки без повторений из n элементов	$P_n = n!$	Из цифр 1,2,3,4,5 составляются пятизначные числа, не кратные 5 и не содержащие одинаковых цифр. Сколько существует таких чисел? Ответ: $P_5 - P_4 = 5! - 4! = 96$.
Сочетания без повторений из n элементов по m	$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$	В классе 40 человек. Сколькими способами можно выделить трех из них для участия в демонстрации? Ответ: $C_{40}^3 = \frac{40!}{3!37!} = 9880$.
Перестановки с повторениями $P(n_1, n_2, \dots, n_k)$	$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$	Сколько буквенных комбинаций можно получить, переставляя буквы в слове «математика»? Ответ: $P(2,3,2,1,1,1) = \frac{10!}{2!3!2!} = 30240$.
Сочетания с повторениями из n элементов по m	$C_n^m = C_{n+m-1}^m$	Сколькими способами можно составить набор из 8 пирожных четырех различных сортов? Ответ: $C_4^8 = C_{11}^8 = \frac{11!}{3!8!} = 165$.

2.3 Примеры задач на классическую вероятность с использованием комбинаторики

Для того, чтобы усвоить теоретический материал и закрепить результаты, изложенные в таблице, рассмотрим целый ряд задач, иллюстрирующих выбор той или иной комбинаторной формулы, использование которых облегчит решение задач на классическую вероятность. Более того, отличие данной работы от аналогичной литературы по соответствующей тематике состоит в том, что освоение темы происходит в процессе решения задач по алгоритму действий, и статья носит справочный характер.

Сочетания без повторений

Задача 2.8. Среди кандидатов в студенческий совет факультета три первокурсника, пять второкурсников и семь третьекурсников. Из этого состава наудачу выбирают пять человек на предстоящую конференцию. Найти вероятность следующих событий:

A – будут выбраны одни третьекурсники;

B – все первокурсники попадут на конференцию;

C – не будет выбрано ни одного второкурсника.

Решение: Пространство элементарных исходов Ω состоит из всевозможных способов выбора пяти человек из пятнадцати, следовательно, общее число исходов опыта равно C_{15}^5 . Подсчитывая благоприятные исходы события A , учтем, что пять человек мы выбираем из семи третьекурсников, а это можно сделать C_7^5 способами. Следовательно, вероятность события A равна:

$$P(A) = \frac{C_7^5}{C_{15}^5} = \frac{\frac{7!}{5!2!}}{\frac{15!}{5!10!}} = \frac{7!10!}{2!15!} = \frac{7!}{2 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15} = \frac{1}{143}.$$

Подсчитывая благоприятные исходы события B , учтем, что троих первокурсников мы выбираем из троих и это можно сделать $C_3^3 = 1$ способом, а оставшихся двоих мы выбираем из двенадцати и это можно сделать C_{12}^2 способами. Следовательно, общее число элементарных исходов, благоприятствующих наступлению события B равно $C_{12}^2 \cdot C_3^3 = C_{12}^2$, а искомая вероятность события B равна

$$P(B) = \frac{C_{12}^2 \cdot C_3^3}{C_{15}^5} = \frac{\frac{12!}{2!10!}}{\frac{15!}{5!10!}} = \frac{2}{91}.$$

Подсчитывая благоприятные исходы для события C , учтем, что пять участников конференции должны быть выбраны только из первокурсников и третьекурсников, то есть из десяти человек. Это можно сделать C_{10}^5 способами. Следовательно, вероятность события C равна

$$P(C) = \frac{C_{10}^5 \cdot C_5^0}{C_{15}^5} = \frac{\frac{10!}{5!5!}}{\frac{15!}{5!10!}} = \frac{10!10!}{5!15!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11} = \frac{12}{143}.$$

Задача 2.9. Для уменьшения числа игр двадцать футбольных команд, среди которых два призера предыдущего чемпионата, путем жеребьевки разбиваются на две подгруппы (первую и вторую) по десять команд в каждой. Какова вероятность того, что обе команды-призеры попадут в разные подгруппы?

Решение: Пространство элементарных исходов Ω состоит из всевозможных способов выбора десяти команд из двадцати, следовательно, общее число исходов опыта равно C_{20}^{10} . При вычислении благоприятных исходов, надо учесть, что в каждой группе команда-призер выбирается из двух команд, а остальные девять – из оставшихся восемнадцати, то есть число благоприятных исходов равно $C_2^1 \cdot C_{18}^9$. Следовательно, вероятность события равна

$$P(A) = \frac{C_2^1 \cdot C_{18}^9}{C_{20}^{10}} = \frac{2 \cdot \frac{18!}{9!9!}}{\frac{20!}{10!10!}} = \frac{2 \cdot 18!10!10!}{20!9!9!} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 10}{20 \cdot 19} = \frac{10}{19}.$$

Сочетания с повторениями

Задача 2.10. В кондитерской имеется семь видов пирожных. Очередной покупатель выбил чек на четыре пирожных. Считая, что любой заказываемый набор равновероятен, найти вероятности следующих событий:

A – заказаны пирожные одного вида;

B – заказаны пирожные разных видов;

C – заказаны по два пирожных различных видов.

Решение: Число всех равновероятных исходов данного эксперимента равно числу сочетаний с повторениями из семи элементов по четыре, то есть

$$N = C_{7+4-1}^4 = C_{10}^4 = \frac{10!}{6!4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210.$$

Число исходов, благоприятствующих событию A , равно числу способов выбора одного элемента из семи, то есть $N_A = C_7^1 = 7$. Следовательно, $P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{7}{210} = \frac{1}{30}$.

Число исходов, благоприятствующих событию B , равно числу способов выбора четырех элементов из семи, то есть $N_B = C_7^4 = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$. Следовательно,

$$P(B) = \frac{N_B}{N} = \frac{35}{210} = \frac{1}{6}.$$

Число исходов, благоприятствующих событию C , равно числу способов выбора двух элементов из семи, то есть

$$N_C = C_7^2 = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21.$$

Следовательно, $P(C) = \frac{N_C}{N} = \frac{21}{210} = \frac{1}{10}.$

Размещения без повторений и перестановки

Задача 2.11. Числа 1,2,...,9 записываются в случайном порядке. Найти вероятность следующих событий:

A – числа будут записаны в порядке возрастания;

B – числа 1 и 2 будут стоять рядом в порядке возрастания;

C – числа 3,6 и 9 будут стоять рядом.

Решение: Очевидно, что общее число исходов данного опыта равно числу перестановок 9 элементов, то есть $N = 9!$. Число исходов, благоприятствующих событию A , равно 1, то есть $N_A = 1$. Следовательно, $P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{1}{9!} = \frac{1}{362880}.$

Подсчитаем число исходов, благоприятствующих событию B . Цифры 1 и 2 могут быть поставлены либо на первое и второе место, либо на второе и третье, либо на третье и четвертое, и т.д., то есть могут быть поставлены восемью способами. Оставшиеся семь цифр: 3,4,...,9 могут быть расположены на семи оставшихся местах $7!$ способами. Следовательно, число благоприятных исходов события B равно $N_B = 8 \cdot 7!$. Тогда

$$P(B) = \frac{N_B}{N} = \frac{8 \cdot 7!}{9!} = \frac{1}{9}.$$

Аналогично рассуждая, получим, что число благоприятных исходов события C равно $N_C = 7 \cdot 3! \cdot 6!$. Следовательно, $P(C) = \frac{N_C}{N} = \frac{7 \cdot 3!6!}{9!} = \frac{3!}{9 \cdot 8} = \frac{1}{12}.$

Задача 2.12. Множество состоит из десяти первых букв русского алфавита. Опыт состоит в выборе без возвращения пяти букв и записи слова в порядке поступления букв. Какова вероятность того, что наудачу составленное слово будет заканчиваться буквой «А»?

Решение: Число 5-буквенных слов данном опыте равно числу 5-элементных упорядоченных подмножеств из десяти элементов, то есть $N_A = A_{10}^4$. Число исходов, благоприятствующих событию A , равно числу способов разместить на четыре оставшихся места по одному символу из оставшихся девяти («А» исключена из рассмотрения, так как ее место в конце слова уже определено). Таким образом, $N_A = A_9^4$. Следовательно,

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{A_9^4}{A_{10}^5} = \frac{\frac{9!}{5!}}{\frac{10!}{5!}} = \frac{1}{10}.$$

Размещения с повторениями

Задача 2.13. Опыт состоит в четырехкратном случайном выборе с возвращением одной буквы из букв алфавита «А», «Б», «К», «О», «М» и записывании результата выбора слева направо в порядке поступления букв. Найти вероятность того, что в результате будет записано слово «МАМА».

Решение: Общее число исходов данного опыта равно числу размещений с повторениями из пяти элементов по четыре элемента, то есть $N = A_5^4 = 5^4$. Поскольку слову «МАМА» соответствует лишь один исход, число исходов, благоприятствующих событию А, равно 1, то есть $N_A = 1$. Поэтому $P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625}$.

Задача 2.14. В лифт шестиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них может случайным образом выйти на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пассажиры выйдут на разных этажах.

Решение: Общее число исходов опыта равно числу размещений с повторениями из пяти элементов по три элемента, то есть $N = A_5^3 = 5^3 = 125$. Число исходов, благоприятствующих событию А, равно числу размещений без повторений из пяти по три, то есть $N_A = A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 60$. Следовательно, $P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{60}{125} = \frac{12}{25}$.

Заключение

Методика, которая положена в основу данной работы, позволит существенно ускорить процесс выбора той или иной комбинаторной формулы, достаточно быстро сформировать целостное представление решения задач на классическую вероятность. В статье разобрано большое количество примеров, в которых рассматриваются типовые вероятностные модели. В виде таблицы с примерами приведены комбинаторные формулы, использование которых облегчит решение задач на классическую вероятность.

Список литературы

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. Изд. 4-е стереотип. М.: Наука. 1969. 564 с.
2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей. Учебное пособие для студентов вузов. Изд. 8-е изд., стер. М.: КноРус. 2010. 496 с.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.: Учебное пособие для бакалавров.: для студентов вузов. 12-е изд. М.: Юрайт. 2014. 480 с.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. Учебное пособие для бакалавров: для студентов вузов. 11-е изд., перераб. и доп. М.: Юрайт. 2014. 404 с.
5. Карташов Г.Д. Теория вероятностей. Вероятностные модели: Учебн. пособ. Ч.1. М.: Изд-во МГТУ. 1990. 63 с.

6. Печинкин А.В., Тескин О.И., Цветкова Г.М. и др. Теория вероятностей: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. 3-е изд., испр. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XVI). М.: Изд-во МГТУ им Н.Э. Баумана. 2004. 456 с.
7. Сборник задач по математике для вузов. В 4 частях. 5-е изд., перераб. и доп. Ч. 3. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособ. / Ефимов А. В., Каракулин А. Ф., Лесин В. В. и др.; ред. А.В. Ефимова; А.С. Поспелов. М.: Физматлит. 2009. 544 с.
8. Карташов Г.Д., Ветров Л.Г., Иванов Г.А. Методические указания к проведению практических занятий по теории вероятностей. М.: Изд-во МГТУ. 1988. 32 с.
9. Тескин О.И., Тверитинов Д.И., Северцев Н.А. Методические указания к выполнению домашнего задания по теории вероятностей и математической статистике. М.: Изд-во МВТУ. 1981. 58 с.