

УДК 533.6.011.5

Аналитическое решение уравнений пограничного слоя

Ожгибисова Ю.С., студент

Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана,

Аэрокосмический факультет,

кафедра «Вычислительная математика и математическая физика»

Научный руководитель: Котенев В.П., д.т.н. профессор

Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана,

кафедра «Вычислительная математика и математическая физика»;

начальник отдела аэродинамики,

Россия, 143966, Московская обл., г. Реутов,

ОАО «ВПК «НПО машиностроения»

bauman@bmstu.ru

Введение

В начале прошлого столетия Людвиг Прандтль положил начало направлению, дальнейшее развитие которого в современной гидродинамике привело к существенным результатам. Расхождение между результатами классической гидродинамики и действительностью возникало в очень многих случаях вследствие пренебрежения в теоретических исследованиях вязкостью жидкости, и Прандтль, исходя из теоретических соображений и некоторых простых экспериментов показал, что течение в окрестности тела можно разделить на две области: на область очень тонкого слоя вблизи тела, так называемый пограничный слой, и на область вне этого слоя, где трением можно пренебрегать. Теория пограничного слоя Прандтля оказалась чрезвычайно плодотворной и сразу же после своего опубликования дала мощный толчок к дальнейшему развитию теоретических исследований.

Существует два метода расчета параметров жидкости в пограничном слое. Первый способ заключается в численном решении системы дифференциальных уравнений пограничного слоя и основывается на использовании вычислительных машин. Второй способ состоит в нахождении методов приближенного расчета, которые позволяли бы получить необходимую информацию более простым путем. Такие решения можно получить, если отказаться от нахождения решений, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям для каждой частицы, и вместо этого ограничиться отысканием решений,

удовлетворяющих некоторым основным уравнениям для всего пограничного слоя и некоторым наиболее важным граничным условиям.

В рамках данной работы представлен метод расчета распределения величины теплопередачи q_x в произвольной точке криволинейной поверхности вращения, отнесенной к тепловому потоку q_0 в точке полного торможения. В основе указанных методов лежит применение универсальных формул для расчета давления повышенной точности, рассмотренные в работах [1] и [2], основные уравнения двумерного пограничного слоя, подробный вывод которых приведен в [3], а также метод К. Польгаузена, позволяющий получить их аналитическое решение. Приводится сравнение полученных результатов расчета тепловых потоков с численным решением уравнений Навье-Стокса, представленным в работе [4].

Построение математической модели

Рассмотрим основные дифференциальные уравнения двумерного ламинарного пограничного слоя при установившемся течении сжимаемого совершенного газа, описанные в [3].

Уравнение количества движения, записанное для x -компоненты вдоль образующей тела

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (1)$$

где u , v - проекции скорости на ортогональные координаты x и y ; ρ , P - плотность и давление; μ - коэффициент вязкости.

Уравнение движения в пограничном слое для y -компоненты

$$\frac{dP}{dy} = 0, \text{ или } P = P_1 = \text{const}. \quad (2)$$

Уравнение неразрывности при осесимметричном течении принимает вид

$$\frac{\partial \rho u r^v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v r^v}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

где r - цилиндрический радиус тела; для плоского течения $v=0$, а для осесимметричного течения $v=1$.

Уравнение энергии для энтальпии двумерного стационарного пограничного слоя в сжимаемой жидкости приводится к виду

$$\rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} = u \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial y} \right), \quad (4)$$

где h - энтальпия; λ - коэффициент теплопроводности; c_p - удельная теплоемкость при постоянном давлении, причем $c_p = \frac{\partial h}{\partial T}$.

Уравнение состояния устанавливает зависимость плотности от давления и температуры в сжимаемых жидкостях. Для идеального газа выполняется уравнение Клапейрона – Менделеева

$$P = \rho RT, \quad (5)$$

где R - газовая постоянная; T - температура.

Общее решение уравнений (1-5) при произвольном градиенте давления dP/dx является очень сложным. Однако при определенных допущениях можно получить некоторые общие соотношения.

Также необходимо сформулировать граничные условия. Для непроницаемой стенки скорость должна удовлетворять условию $u = v = 0$ при $y = 0$.

При $y = \infty$ задаются значения $u = u_1$, $T = T_1$, где u_1 и T_1 - скорость и температура внешнего потока. Так как толщина пограничного слоя мала, то уже на небольшом расстоянии от обтекаемой поверхности параметры потока практически совпадают с параметрами при $y = \infty$. Поэтому граничные условия можно задавать не при $y = \infty$, а при $y = \delta$, где δ - толщина пограничного слоя, т.е. такое расстояние от стенки, на котором, например, скорость отличается от скорости при $y = \infty$ меньше, чем на 1 %.

Обозначим индексом «0» параметры потока на стенке, индексом «1» - параметры на границе.

Вместо расстояния от стенки y введем безразмерное приведенное расстояние

$$\xi \equiv x, \quad \eta = \frac{\int_0^y \frac{\mu_1(x)}{\mu(x, y)} dy}{\delta_1}, \quad (6)$$

где $\delta_1 = \int_0^{\delta(x)} \frac{\mu_1}{\mu} dy$ есть приведенная толщина пограничного слоя, $\delta(x)$ есть то конечное расстояние от стенки, на котором пограничный слой смыкается с внешним течением. При

этом справедливы следующие соотношения: $\eta(x, 0) = \frac{\partial \eta}{\partial x}(x, 0) \equiv 0$, $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$,

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\mu_1}{\mu \delta_1} \frac{\partial P}{\partial \eta}$. Можно считать, что давление в поперечном сечении пограничного слоя

остается практически постоянным и равным давлению во внешнем потоке. Таким образом, второе уравнение движения может быть записано в виде

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\mu_1}{\mu \delta_1} \frac{\partial P}{\partial \eta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial \eta} = 0. \quad (7)$$

Запишем уравнения движения и неразрывности в пограничном слое в новых координатах

$$\rho u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \rho v \frac{\mu_1}{\mu \delta_1} \frac{\partial u}{\partial \eta} = - \frac{dP}{dx} + \frac{\mu_1^2}{\mu \delta_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho u r}{\partial x} + \frac{\partial \rho u r}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \rho v r}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0. \quad (9)$$

I. Главным граничным условием на стенке является равенство нулю касательной составляющей скорости на поверхности обтекаемого тела (условие «прилипания»), т.е.

$$u = v = 0. \quad (10)$$

Из уравнения движения следует, что на стенке

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\mu_1^2}{\mu \delta_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \quad (11)$$

Уравнение неразрывности на стенке преобразуется к виду $\frac{\partial \rho u r}{\partial x} + \frac{\partial \rho v r}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$,

т.к. $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$.

Продифференцировав полученное соотношение получим

$$\rho r \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + u \frac{\partial \rho r}{\partial x} + v \frac{\partial \rho r}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0,$$

т.е. при $r \neq 0$: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$. Или $\frac{\partial v}{\partial \eta} = 0$, так как $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, а $\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\mu_1}{\mu \delta_1}$.

$\frac{\partial v}{\partial \eta} = 0$ при сколь угодно малом r , а значит по непрерывности и на критической

линии.

Дифференцируем уравнение движения с учетом того, что на стенке

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0. \text{ Получаем } -\frac{\mu_1^2}{\mu^2 \delta_1^2} \frac{\partial \mu}{\partial \eta} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\mu_1^2}{\mu \delta_1^2} \frac{\partial^3 u}{\partial \eta^3} = 0. \text{ То есть, } \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \eta} = \frac{\frac{\partial^3 u}{\partial \eta^3}}{\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}}.$$

Будем считать, что $\mu = \text{const } h^\omega$ [3], тогда $\frac{\partial \mu}{\partial \eta} = \text{const } h^{\omega-1} \frac{\partial h}{\partial \eta}$, при этом $\omega \sim 0,7$,

$$\text{т.е. } \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \eta} = \frac{\omega}{h} \frac{\partial h}{\partial \eta}.$$

II. Перейдем к исследованию на стенке уравнения энергии:

$$\rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} = u \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (12)$$

Запишем его в новых переменных:

$$\rho u \left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \rho v \frac{\mu_1}{\mu \delta_1} \frac{\partial h}{\partial \eta} = u \frac{dP}{dx} + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\mu_1^2}{\mu \delta_1^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + \frac{\mu_1^2}{\mu \delta_1^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2. \quad (13)$$

Используя граничное условие на стенке преобразуем соотношение (13) к следующему виду

$$\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 = 0, \quad (14)$$

$$\text{следовательно } \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \right)_0 < 0.$$

При рассмотрении наиболее интересного с практической точки зрения случая

$h_0 = \text{const}$, тогда $\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_0 = 0$. Продифференцируем по η уравнение (13). Получим:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{dP}{dx} + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\mu_1^2}{\mu \delta_1^2} \frac{\partial^3 h}{\partial \eta^3} + 2 \frac{\mu_1^2}{\mu \delta_1^2} \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0. \quad (15)$$

III. Согласно методу Польгаузена, представим распределение скорости в пограничном слое полиномом четвертой степени

$$\frac{\bar{u}}{u_1(x)} = a\eta + b\eta^2 + c\eta^3 + d\eta^4. \quad (16)$$

Из (11) следует следующее $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{\mu \delta_1^2}{\mu_1^2} \frac{dP}{dx} = -\frac{\mu \delta_1^2}{\mu_1^2} \rho_1 u_1 \frac{du_1}{dx}$, т.е.

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} = -\frac{\mu \delta_1^2}{\mu_1^2} \rho_1 \frac{du_1}{dx}.$$

Вводим безразмерный параметр

$$\Lambda(x) = -\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} = \frac{\mu \delta_1^2}{\mu_1^2} \rho_1 \frac{du_1}{dx} = \frac{\mu \delta_1^2}{\mu_1^2} \frac{1}{u_1} \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (17)$$

На границе пограничного слоя: $\eta = 1$, $u = u_1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Из равенства нулю производных можем определить $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$,

соответственно $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$. Аналогично, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$, значит $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$.

Используя граничные условия для скорости на стенке и на границе погранслоя, получаем систему уравнений для определения коэффициентов a , b , c , d

$$\begin{cases} -2b = \Lambda \\ a + b + c + d = 1 \\ a + 2b + 3c + 4d = 0 \\ 2b + 6c + 12d = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Решая систему (18), определяем вид полинома, описывающего распределение скорости в пограничном слое

$$\bar{u} = \left(2 + \frac{\Lambda}{6} \right) \eta - \frac{\Lambda}{2} \eta^2 + \left(-2 + \frac{\Lambda}{2} \right) \eta^3 + \left(1 - \frac{\Lambda}{6} \right) \eta^4,$$

т.е. $a = 2 + \frac{\Lambda}{6}$; $b = -\frac{\Lambda}{2}$; $c = -2 + \frac{\Lambda}{2}$; $d = 1 - \frac{\Lambda}{6}$.

Это и есть полином Польгаузена.

Согласно [3], для параметра Λ может быть введена оценка $-12 \leq \Lambda \leq 12$.

Уточним её для случая $q > 0$, т.е. $\left(\frac{\partial h}{\partial \eta} \right)_0 > 0$. Из (17) следует, что $-\frac{6 \left(-2 + \frac{\Lambda}{2} \right)}{\Lambda} > 0$,

следовательно, $0 < \Lambda < 4$.

Для коэффициента трения $\tau = \mu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 = \frac{\mu_1}{\delta_1} \left(2 + \frac{\Lambda}{6} \right) u_1$, т.к. соответствующая

производная $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}$ берется при $\eta = 0$.

IV. Следуя аналогии с методом Польгаузена, положим

$$h + \frac{u^2}{2} = h_0 + p\eta + q\eta^2 + s\eta^3 + t\eta^4. \quad (19)$$

Запишем первые три производные данного выражения

$$\frac{\partial h}{\partial \eta} + u \frac{\partial u}{\partial \eta} = p + 2q\eta + 3s\eta^2 + 4t\eta^3. \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + u \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 2q + 6s\eta + 12t\eta^2. \quad (21)$$

$$\frac{\partial^3 h}{\partial \eta^3} + 3 \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + u \frac{\partial^3 u}{\partial \eta^3} = 6s + 24t\eta. \quad (22)$$

С учетом того, что на стенке $\eta = 0$, $u = v = 0$ преобразуем уравнения (20-22) к виду

$$\left(\frac{\partial h}{\partial \eta} \right)_0 = p. \quad (23)$$

$$\left(\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} \right)_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_0^2 = 2q. \quad (24)$$

$$\left(\frac{\partial^3 h}{\partial \eta^3} \right)_0 + 3 \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right)_0 = 6s. \quad (25)$$

Преобразуем (14) с учетом граничных условий на стенке

$$\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 = 0. \quad (26)$$

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 \left(h + \frac{u^2}{2} \right)}{\partial \eta^2} \right) = \left(\frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2. \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2 \left(h + \frac{u}{2} \right)}{\partial \eta^2} = (1 - \text{Pr}) \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2. \quad (28)$$

Продифференцируем уравнение (13)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial \eta} \left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \rho u \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial \rho v}{\partial \eta} \frac{\mu_1}{\mu \delta_1} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \rho v \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\mu_1}{\mu \delta_1} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) \right] = \\ = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{dP}{dx} + u \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{dP}{dx} \right) + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\mu_1^2}{\mu \delta_1^2} \right) \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + \\ + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\mu_1^2}{\mu \delta_1^2} \frac{\partial^3 h}{\partial \eta^3} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\mu_1^2}{\mu \delta_1^2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\mu_1^2}{\mu \delta_1^2} 2 \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \end{aligned}$$

На стенке данное выражение принимает следующий вид

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{dP}{dx} + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\mu_1^2}{\mu \delta_1^2} \right) \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\mu_1^2}{\mu \delta_1^2} \frac{\partial^3 h}{\partial \eta^3} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\mu_1^2}{\mu \delta_1^2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\mu_1^2}{\mu \delta_1^2} 2 \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0. \quad (29)$$

С учетом (11) и (14) преобразуем (29)

$$3 \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^3 h}{\partial \eta^3} = 0. \quad (30)$$

Преобразуем последнее соотношение

$$3 \text{Pr} \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^3 h}{\partial \eta^3} + 3 \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 3 \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0. \quad (31)$$

$$\frac{\partial^3 \left(h + \frac{u}{2} \right)}{\partial \eta^3} = 3(1 - \text{Pr}) \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \quad (32)$$

Продифференцируем (8) с учетом того, что на границе $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$. А так же

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0, \text{ т.к. } \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0. \text{ Получим}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \eta} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\mu_1^2}{\mu \delta_1^2} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial \eta^3} \right)_1 = - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \frac{dP}{dx}. \quad (33)$$

Согласно закону Бернулли можно определить статическую энтальпию $h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho}$,

при дифференцировании получаем $\frac{\partial h}{\partial \eta} = -\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} = -h \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \eta}$. После преобразований

имеем $-\frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \eta}$. Следовательно, на границе справедливо соотношение

$\frac{1}{h_1} \left(\frac{\partial h}{\partial \eta} \right)_1 \left(\frac{dP}{dx} \right) = \frac{\mu_1^2}{\mu \delta_1^2} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial \eta^3} \right)_1$. Запишем производную (19) применительно к границе

пограничного слоя

$$\left(\frac{\partial h}{\partial \eta} \right)_1 = p + 2q + 3s + 4t. \quad (34)$$

На теле справедливо $\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \eta} = \frac{\omega}{h_0} \left(\frac{\partial h}{\partial \eta} \right)_0 = \frac{\left(\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \eta^3} \right)_0}{\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} \right)_0} = \frac{6c}{\omega 2b} = \frac{p}{h_0}$, откуда

$$p = \frac{h_0}{\omega} \frac{-12 + 3\Lambda}{-\Lambda}. \quad (35)$$

Ранее было определено, что

$$\bar{u} = \frac{u}{u_1(x)} = \left(2 + \frac{\Lambda}{6} \right) \eta - \frac{\Lambda}{2} \eta^2 + \left(-2 + \frac{\Lambda}{2} \right) \eta^3 + \left(1 - \frac{\Lambda}{6} \right) \eta^4. \quad (36)$$

При дифференцировании (36) и учитывая граничные условия на стенке получаем

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right)_0 = \frac{1}{u_1(x)} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_0 = \left(2 + \frac{\Lambda}{6} \right), \text{ следовательно } \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_0 = u_1(x) \left(2 + \frac{\Lambda}{6} \right). \text{ Учитывая}$$

(24) и граничные условия на стенке можем определить следующий коэффициент полинома (19)

$$q = \frac{(1 - \text{Pr})}{2} u_1^2(x) \left(2 + \frac{\Lambda}{6} \right)^2. \quad (37)$$

Согласно (17) $\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} \right)_0 = -\Lambda(x)$. Следовательно $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right)_0 = -u_1(x) \Lambda$. Для

определения коэффициента s получаем соотношение

$$s = -\frac{(1-\text{Pr})}{2}u_1^2(x)\left(2+\frac{\Lambda}{6}\right)\Lambda. \quad (38)$$

Решаем систему, учитывая (35), (37), (38)

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right)_1 = p + 2q + 3s + 4t \\ H - h_0 = p + q + s + t \end{cases} \quad (39)$$

$$3p + 2q + s = 4(H - h_0) - \left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right)_1 \quad (40)$$

$$\begin{aligned} 3\left[\frac{h_0 - 12 + 3\Lambda}{\omega - \Lambda}\right] + 2\left[\frac{(1-\text{Pr})}{2}u_1^2(x)\left(2+\frac{\Lambda}{6}\right)^2\right] + \left[-\frac{(1-\text{Pr})}{2}u_1^2(x)\left(2+\frac{\Lambda}{6}\right)\Lambda\right] = \\ = 4(H - h_0) - \left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right)_1. \end{aligned} \quad (41)$$

На внешней границе пограничного слоя при установившемся течении справедлив интеграл Бернулли

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = H = \text{const}, \quad (42)$$

где H - параметр, называемый полной энтальпией (или энтальпией торможения), связывающий энтальпию и кинетическую энергию.

Модуль скорости газа на линии тока не может превышать некоторого максимального значения $u_1 \leq V_{\max}$, где

$$V_{\max}^2 = 2H. \quad (43)$$

Подставляя формулу (43) в (42), перепишем интеграл Бернулли в виде

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = \frac{V_{\max}^2}{2}. \quad (44)$$

Введем безразмерные параметры следующим образом

$$\bar{h}_1 = \frac{h_1}{H} = \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \quad (45)$$

Преобразуем (42) с учетом (45)

$$\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \frac{u_1^2}{2H} = 1. \quad (46)$$

$$\left(\frac{u_1}{V_{\max}}\right)^2 = 1 - \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \quad (47)$$

$$\frac{u_1^2}{H} = 2 \left(1 - \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right). \quad (48)$$

В качестве примера рассмотрим стенку с постоянным значением безразмерной энтальпии $\bar{h}_0 = \frac{h_0}{H} = 0,2; 0,3; 0,5$. Соответственно, верны следующие соотношения

$$\frac{\frac{h_0}{H}}{\frac{h_1}{H}} = \frac{\bar{h}_0}{\bar{h}_1} = \frac{0,2; 0,3; 0,5}{\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}; \quad \frac{\frac{u_1^2}{H}}{\frac{h_1}{H}} = \frac{\frac{u_1^2}{H}}{\frac{h_1}{H}} = \frac{2 \left(1 - \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)}{\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}.$$

Получаем уравнение для определения $\Lambda(x)$

$$\begin{aligned} \left[4(1 - \bar{h}_0) + \frac{9h_0}{\omega} - \bar{h}_0^\omega \tau^{1-\omega} \right] \Lambda - \frac{36\bar{h}_0}{\omega} + 12\bar{h}_0^\omega \tau^{1-\omega} = \\ = \frac{\Lambda}{9} (12 + \Lambda)(6 - \Lambda)(1 - \text{Pr})(1 - \tau). \end{aligned} \quad (49)$$

V. Для использования соотношения (49) также необходимо знать распределение давления на всем участке между интересующей точкой и точкой полного торможения. Воспользуемся результатами работ [1] и [2], где приведены формулы для распределения давления, отнесенного к давлению торможения на поверхности затупленных тел

$$P(\sigma) = \frac{P_1}{P_0} = \left[\frac{1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+3} \cdot \left(\frac{\sigma - \pi/2}{\sigma_{**} - \pi/2} \right)^2}{1 + \frac{\gamma-1}{\gamma+3} \cdot \left(\frac{\sigma - \pi/2}{\sigma_{**} - \pi/2} \right)^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (50)$$

где σ_{**} - угол между осью тела и вектором скорости в звуковой точке, $\gamma = 1,4$ - показатель адиабаты.

Для определения положения звуковой точки σ_{**} на поверхности сферы используем формулу работы [1]

$$\sigma_{**} = \begin{cases} \arcsin \left(\sqrt{\frac{P_* - 1 / (1 + \gamma M^2)}{1 - 1 / (1 + \gamma M^2)}} \right) & \text{при } M < 2,5; \\ 90^\circ - (34^\circ + 40^\circ \kappa) & \text{при } M \geq 2,5. \end{cases} \quad (51)$$

Здесь $\kappa = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{M^2}$, M - число Маха набегающего потока; $P_* = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$ -

давление в звуковой точке, отнесенное к давлению в точке торможения.

VI. Для определения тепловых потоков используется следующая формула

$$Q = \frac{\mu_0}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\mu_0}{Pr} \left(\frac{\partial h}{\partial \eta} \right)_0 \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{h_0}{\omega} \frac{\mu_1}{\delta_1} \frac{12 - 3\Lambda}{\Lambda}, \quad (52)$$

где $\frac{\mu_1}{\delta_1} = \sqrt{\frac{\rho_1 \frac{du_1}{dx} \mu_0}{\Lambda}}.$

Результаты

Сравним результаты применения полученных формул (49) и (52) для определения параметра Польгаузена и тепловых потоков на поверхности сферы с точным численным решением. На рис. 1-3 представлено распределение параметра Λ , полученного по формуле (49).



Рис. 1. Распределение параметра Польгаузена в ламинарном пограничном слое при $\overline{h_0} = 0,25$; $Pr = 0,7$, $\omega = 0,7$, $M = 4,11$.

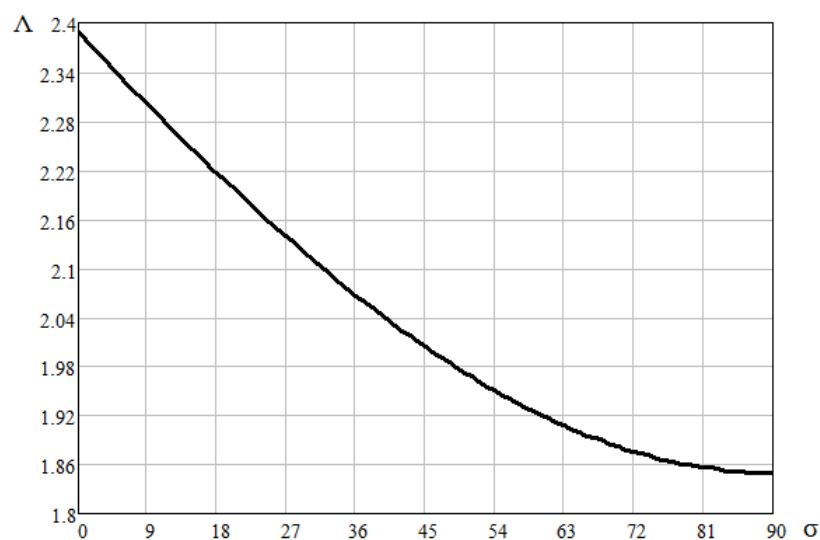


Рис. 2. Распределение параметра Польшаузена в ламинарном пограничном слое при $\overline{h_0} = 0,35$; $Pr = 0,7$, $\omega = 0,7$, $M = 6$

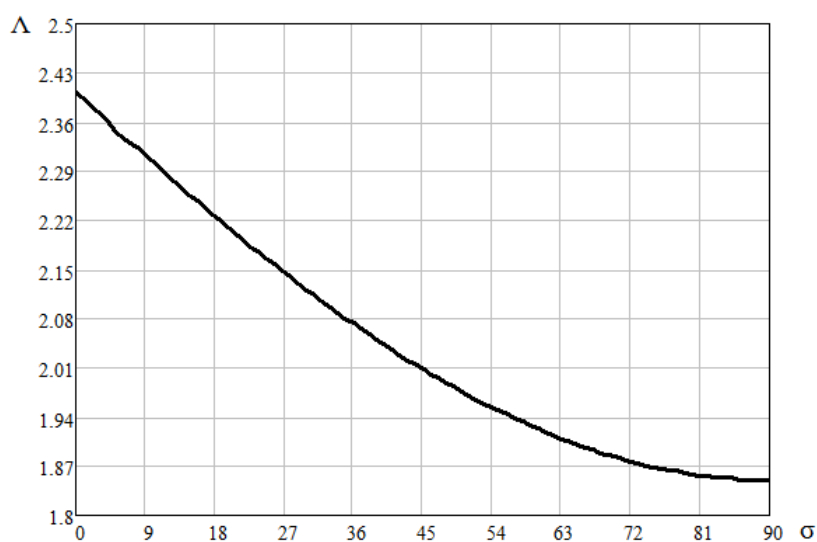


Рис. 3. Распределение параметра Польшаузена в ламинарном пограничном слое при $\overline{h_0} = 0,35$; $Pr = 0,7$, $\omega = 0,7$, $M = 10$

Рассмотрим применение формулы (52) для расчета тепловых потоков на сферической поверхности при различных числах Маха набегающего потока, исследование которых также приведено в [4]. На рис. 4-5 сплошной линией представлены полученные результаты, а крестиками – результаты расчета в рамках уравнений Навье – Стокса [4].

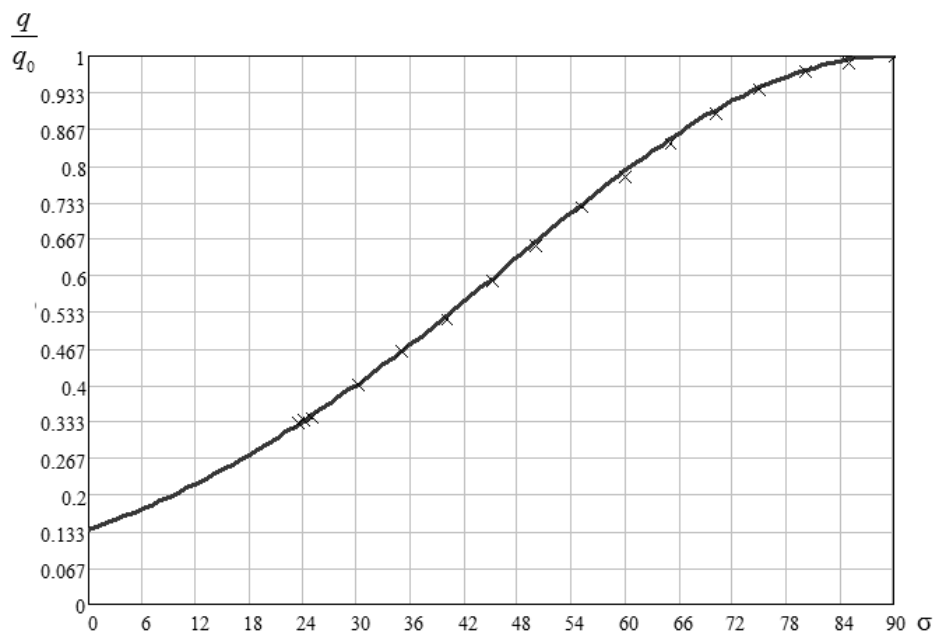


Рис. 4. Зависимость q/q_0 для сферической поверхности при $\overline{h_0} = 0,25$; $Pr = 0,7$, $\omega = 0,7$, $M = 4,11$

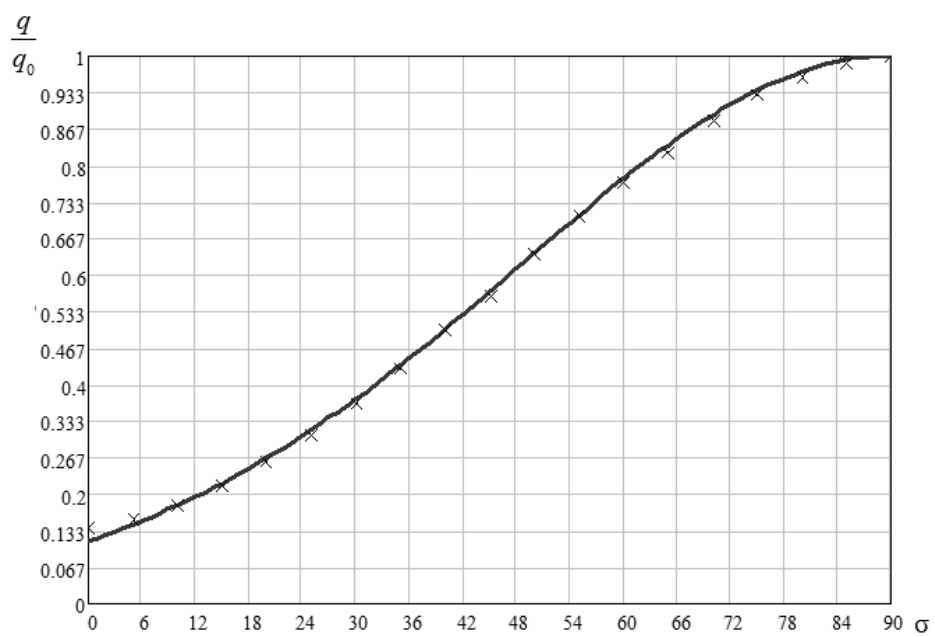


Рис. 5. Зависимость q/q_0 для сферической поверхности при $\overline{h_0} = 0,25$; $Pr = 0,7$, $\omega = 0,7$, $M = 10$

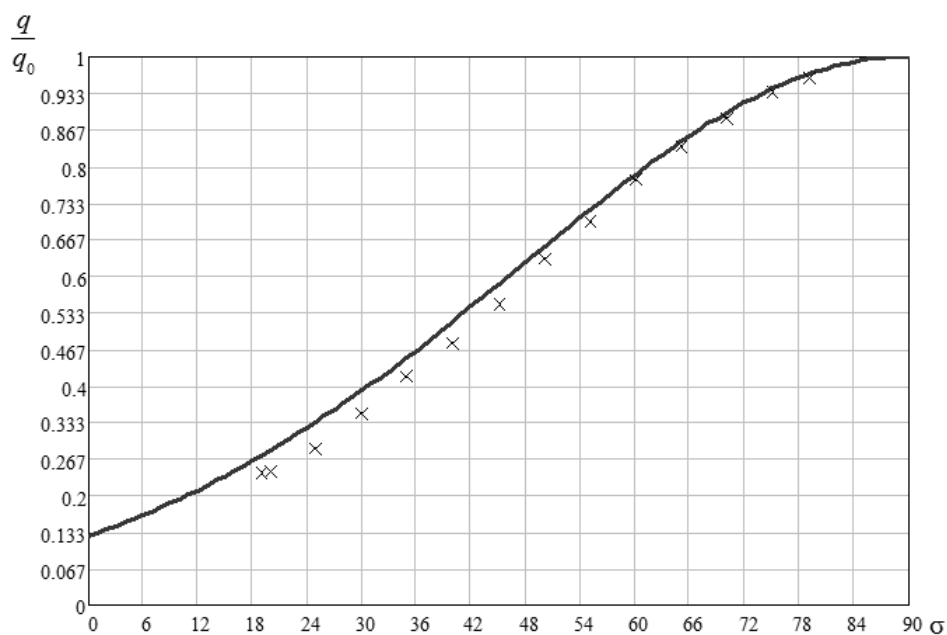


Рис. 6. Зависимость q / q_0 для сферической поверхности при $\overline{h_0} = 0,35$; $Pr = 0,7$, $\omega = 0,7$, $M = 6$

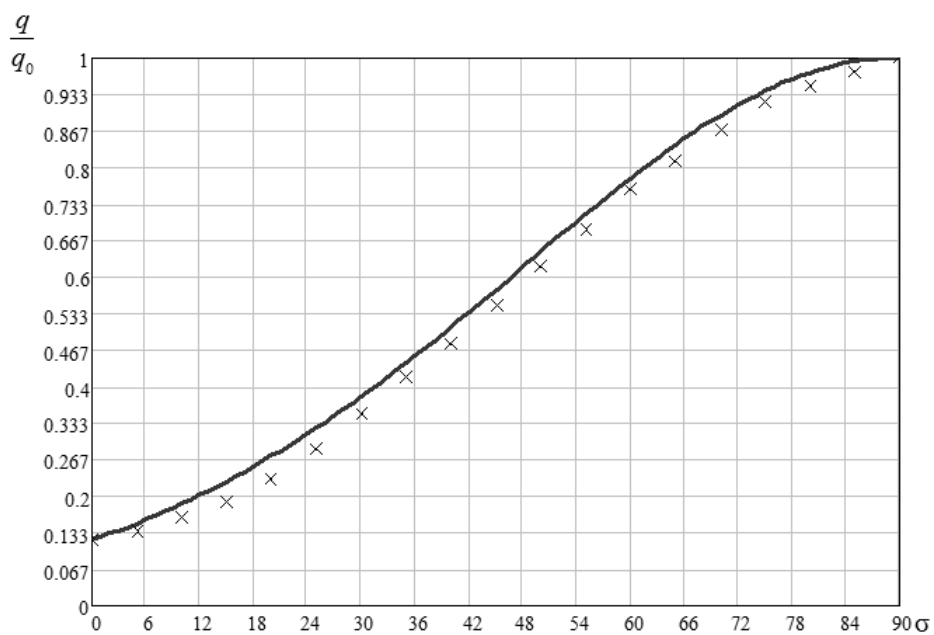


Рис. 7. Зависимость q / q_0 для сферической поверхности при $\overline{h_0} = 0,35$; $Pr = 0,7$, $\omega = 0,7$, $M = 10$

Заключение

Метод, рассмотренный в рамках данной работы, был применен для расчёта величины теплопередачи в произвольной точке поверхности, отнесенной к величине теплового потока в точке полного торможения на поверхности сферы. Применение модифицированного метода Польгаузена позволило получить зависимости в простой аналитической форме для описания процесса обтекания сверхзвуковым потоком газа.

Модификация метода состояла в том, что энтальпия представлялась в виде полинома четвертой степени, как и скорость в оригинальном методе Польгаузена.

Для сравнения результатов расчета по предложенному методу использовалось точное решение, полученное в рамках уравнений Навье-Стокса [4]. Относительная погрешность результатов не превышает 5%. Таким образом, полученные данные могут использоваться на начальной стадии проектирования летательных аппаратов.

Список литературы

1. Котенев В.П. Точная зависимость для определения давления на сфере при произвольном числе Маха сверхзвукового набегающего потока // Математическое моделирование. 2014. Т. 26. № 9. С. 141-148.
2. Котенев В.П., Сысенко В.А. Аналитические формулы повышенной точности для расчета распределения давления на поверхности выпуклых, затупленных тел вращения произвольного очертания // Математическое моделирование и численные методы. 2014. Т. 1. № 1-1. С. 68-81.
3. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1969. 824 с.
4. Брыкина И.Г. Методы расчета теплопередачи и трения при пространственном гиперзвуковом ламинарном обтекании тел во всем диапазоне чисел Рейнольдса: автореф. дис... д-ра. физ.-мат. наук. М., 2013. 38 с.