электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51038.

УДК 623.466.55

Особенности применения алгоритма с прогнозирующей моделью при адаптивном оптимальном управлении

Платунова А.В., *студент*
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Динамика и управление полётом ракет и космических аппаратов»

Научный руководитель: Клишин А.Н., к.т.н., доцент
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Динамика и управление полётом ракет и космических аппаратов»
kafsm3@sm.bmstu.ru

В наши дни число прикладных задач, для которых использование традиционных методов, основанных на точном знании математической модели объекта управления, непрерывно растет. Неуклонное усложнение задач автоматического управления приводит к необходимости разработки и усовершенствованию алгоритмов управления, которые способны отвечать повышенным требованиям к качеству управления. Успехи в области развития электроники и вычислительной техники, появление сверхмощных электронных вычислительных машин (ЭВМ) делает возможным реализовать найденные решения на практике.

Математические модели, в полной мере описывающие реальную работу объекта управления, достаточно сложны. Условия функционирования объекта, действующие на него возмущающие факторы постоянно меняются и часто носят случайный характер. Данные обстоятельства вынуждают использовать адаптивное оптимальное управление.

Адаптивным оптимальным алгоритмом называют такой алгоритм, который обеспечивает наилучший в смысле некоторого критерия качества результат в условиях неполного знания свойств объекта (процесса) и воздействий окружающей среды [5], что в наши дни приобретает особую важность.

Одним из возможных путей создания адаптивных систем управления динамическими объектами является построение систем, основанных на текущей идентификации параметров объекта. Такие системы позволяют максимально использовать априорную информацию о его параметрах. Одной из задач развития адаптивных систем управления с текущей идентификацией является разработка методов так называемого совмещенного синтеза управлений. [2]

Свойства адаптивного оптимального управления сильно зависят от выбранной формы критерия оптимизации, которая должна учитывать не только все компромиссные решения к требованиям управляемого полета, но и уметь осуществлять адаптацию параметров рассматриваемого критерия при изменении режима полета.

Для синтеза алгоритмов оценивания и собственно управления уже давно используются методы оптимизации по строго заданным критериям. В задаче оценивания они приводят к фильтру Калмана. В задачах собственно оптимального управления традиционные методы оптимизации приводят к нелинейному уравнению Беллмана. Однако во многих практических многоразмерных задачах эти алгоритмы, основанные на упомянутых подходах, оказываются трудно реализуемыми. [5]

В качестве одного из решений данной проблемы применяют оптимизацию по критерию обобщенной работы, который уже хорошо себя зарекомендовывал в аналитическом конструировании, сводящемуся к решению линейного уравнения в частных производных первого порядка, называемых также уравнением Ляпунова.

Использование при оптимизации функционалов обобщенной работы (функционалов неклассического типа), является путем возможного решения одной из основных задач в теории оптимального автоматического управления – формирование управляющих воздействий в режиме реального времени. Кроме того данный метод позволяет значительно снизить вычислительные затраты процесса.

Для начала сформулируем общую постановку задачи критерия обобщенной работы. Пусть для динамического объекта управления [3]

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} + f(\mathbf{x},t) = \varphi(x,t)\mathbf{u}, \qquad \mathrm{x} \in X \subset R^n, \qquad \mathrm{t} \in [t_0, t_M] \qquad (1)$$

оптимальным в смысле минимума целевого функционала обобщенной работы

$$I(u) = V_3(\mathbf{x}(t_M), t_M) + \int_{t_0}^{t_M} Q(\mathbf{x}(t), t)dt + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_M} (\mathbf{u}^T K^{-2}\mathbf{u} + \mathbf{u}_{\mathbf{оп}}^T(\tau) K^{-2}\mathbf{u}_{\mathbf{оп}})dt$$

(2)

является управление

$$\mathbf{u} = -K^2 \varphi^T(\mathbf{x},t)\frac{\partial V(\mathbf{x},t)}{\partial \mathbf{x}}, \qquad \mathbf{u} \in U \subset R^m, \qquad (3)$$

где V_3 – задаваемая положительно-определенная функция, накладывающая требования на компоненты вектора состояния объекта в заданный конечный момент времени t_M; Q – задаваемая положительно-определенная функция, накладывающая требования на компоненты вектора состояния (траекторию) при движении от текущего момента времени t_0 до конечного момента времени t_M; К – задаваемая симметрическая невырожденная матрица коэффициентов штрафа за расход управления на рассматриваемом этапе движения; $u_{оп}$ – неизвестное до решения задачи синтеза управление в оптимальной замкнутой системе.

Функция $V(\mathbf{x},t)$ в формуле (3) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\right)^T f = -Q, \qquad V(\mathbf{x}, t_M) = V_3(\mathbf{x}). \tag{4}$$

Критерий обобщенной работы является удобным при оптимизации системы, так как в нем $u_{оп} = u$. Одновременно с этим, благодаря линейности уравнений в частных производных для V, он значительно облегчает решение задачи получения оптимальных управлений.

Функционалы и задачи такого плана называются терминальными или квазитерминальными. В таких задачах определяется оптимальное управления при движении объекта в конкретный (конечный) момент времени t_M. Такие постановки задачи оптимального управления, естественные для режимов посадки, самонаведения, стыковки летательных аппаратов, пуска технологических объектов, неприемлемы в стационарных режимах [5].

Для стационарных режимов используются нетерминальные оптимальные управления. Нетерминальная постановка задачи характерна для режимов типа демпфирования угловых колебаний, стабилизации заданной перегрузки, заданного углового положения ЛА и т.д. [2] Основным отличием от терминальных задач заключается в том, что оптимальные управления формируются не в конечный фиксированный момент времени, а используется скользящий интервал [t_0, $t+T_{оп}$], где t-текущее время, $T_{оп}$ – интервал на котором реализуется оптимальное управление.

Существуют различные формы алгоритмов управления для задач минимизации функционала обобщенной работы. Наиболее универсальным из них считается алгоритм с прогнозирующей моделью. Его суть состоит в том, что оптимальное управление определяется прогнозированием свободного движения управляемого объекта при фиксированном управлении на интервалах времени. Кроме того, одним из преимуществ алгоритма с прогнозируемой моделью является то, что он может осуществлять требующую во многих прикладных задачах оптимизацию на больших промежутках времени, так называемую «глобальную оптимизацию», а также применим при решении широко используемой задачи совмещенного синтеза.

При методе с применением прогнозирующей модели с учетом (1)-(4) полная производная $\dot{V}$, вычисленная в силу уравнения свободного движения объекта

$$\dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{M}} = f(\mathbf{x}_{\mathrm{M}}, t) \tag{5}$$

равна $\dot{V} = -Q(\mathbf{x_M}, t)$.

С учетом условия для терминальной задачи

$$V\big(\mathbf{x_M}(t_M)\big) = V_З(\mathbf{x_M}(t_M)).$$

И таким образом,

$$V\big(\mathbf{x_M}(t)\big) = V_З\big(\mathbf{x_M}(t_M)\big) + \int_t^{t_M} Q(\mathbf{x_M}, t)dt\,.$$

Будем считать, что текущее время и интервал оптимизации разбиты на достаточно короткие циклы длинной Δt_u. Начало очередного цикла с точностью до Δt_u совпадает с текущим моментом t. В начале каждого цикла система контроля и оценивания реального управляемого процесса определяет вектор состояния **x**(*t*) и задает начальное условие в модель (5) свободного движения, обеспечивая в начале каждого цикла равенство $\mathbf{x_M}(t) = \mathbf{x}(t)$.

Таким образом,

$$V(\mathbf{x}(t)) = V_З(\mathbf{x_M}(t_M)) + \int_t^{t_M} Q(\mathbf{x_M}, t)dt.$$

Такая форма модели при фиксированных управлениях объекта, работающая в укоренном режиме времени $\tau = t/\varkappa$, где $\varkappa = const \gg 1$, называется прогнозирующей моделью.

Получаем уравнение прогнозирующей модели

$$\frac{d\mathbf{x_M}}{d\tau} + \varkappa f(\mathbf{x_M}, \varkappa\tau) = 0.$$

Система оценивания и контроля задает начальные условия для интегрирования уравнения свободного движения с помощью прогнозирующей модели в режиме ускоренного времени. Темп интегрирования $\varkappa$ выбирается таким образом, чтобы при каждом цикле $t_M - t$ осуществить нахождение частной производной $\partial V/\partial x_i$ с необходимой точностью. Для этого $\varkappa$ при управлении реальными процессами достигает порядка сотни тысячи единиц.

При численной реализации метода с прогнозирующей моделью все необходимые вычисления выполняются циклически с продолжительностью цикла Δt_u. Численный алгоритм с прогнозирующей моделью включает в себя операции [9]:

1) Измерение или оценка текущего состояния объекта в дискретные моменты, соответствующие началу очередного цикла формирования управления;

2) Прогнозирование свободного (неуправляемого) движения объекта на заданном интервале $[t_0, t_M]$ оптимизации управления (интервал прогнозирования) с

начальными условиями, совпадающими с текущим в момент t_0 состоянием объекта или лежащим в некоторой окрестности этого состояния;

3) Вычисление градиента изменения функции V(x,t) для текущего состояния объекта;

4) Формирования сигнала управления.

Выше мы принимали, что при свободном движении управляющие воздействия принимались равным нулю u=0, т.е. движение при нулевых органах управления. В действительности реальное управляемое движение на интервале оптимизации сильно отличается от рассматриваемого, что приводит к значительной погрешности во время расчета. Большей точности можно добиться, если условия свободного движения принимать при фиксированных положениях органов управления в определенный момент времени. Таким образом, соответствующее уравнение динамической модели будет выглядеть

$$\dot{\mathbf{x}} = f[\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), t],$$

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{u}(t),$$

где (**x, y**) - составной вектор состояния объекта; **u** - вектор управления. Субвектор **y** в дальнейшем будет именоваться управляющим фактором.

Свободное движение будет описываться как

$$\frac{d\mathbf{x}_{\text{М}}}{d\tau} + \varkappa f(\mathbf{x}_{\text{М}}, \mathbf{y}, \tau) = 0, \qquad \frac{d\mathbf{y}_{\text{М}}}{d\tau} = 0.$$

Целевой функционал обобщенной работы с квадратичными затратами на управление, можно записать в следующем виде:

$$I = V_3(\mathbf{x}(t_M), \mathbf{y}(t_M), t_M) + \int_{t_0}^{t_M} Q\,(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{y}(\tau), \tau) d\tau + 0{,}5 \int_{t_0}^{t_M} (\,\mathbf{u}^{\mathbf{T}}(\tau) K^{-2} \mathbf{u}(\tau) + \mathbf{u}_{\mathbf{оп}}^{\mathbf{T}}(\tau) K^{-2} \mathbf{u}_{\mathbf{оп}}(\tau)) d\tau,$$

Тогда управляющие воздействия

$$\mathbf{u} = -K^2 \frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}}\ , \tag{6}$$

где *V* удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial V}{d\tau} - f \frac{\partial V}{d\mathbf{x}} = -Q,$$

которое при оценке движения по прогнозирующей модели обращается $\dot{V} = -Q$.

Тогда для одного цикла прогнозирующей модели можно вычислить

$$V(\mathbf{x}(t)) = V_3(\mathbf{x}_{\text{М}}(\tau_M), \mathbf{y}_{\text{М}}(\tau_M), \tau_M) + \varkappa \int_{\tau}^{\tau_M} Q(\mathbf{x}_{\text{М}}, \mathbf{y}_{\text{М}}, \tau) d\tau.$$

Для того, чтобы определить $\frac{\partial V}{d\mathbf{y}}$ численно, нужно менять начальные условия по $\mathbf{y}_{\mathrm{M}}$ при каждом цикле прогнозирующей модели.

Структура алгоритма оптимального управления с прогнозирующей моделью для терминальной задачи представлена на рис. 1.

Существует несколько вариантов алгоритмов с прогнозирующей моделью, отличающимися друг от друга определенными возможностями и вычислительными затратами:

1. Алгоритм с численным дифференцированием;
2. Модифицированный алгоритм;
3. Алгоритм с матрицей чувствительности;
4. Алгоритм с синхронным детектированием;
5. Алгоритм с аналитическим решением.

Применимы также разнообразные сочетания перечисленных алгоритмов.

В качестве примера применения приведенной методики рассмотрим синтез оптимальных управлений с помощью алгоритма прогнозирующей модели с использованием матрицы чувствительности для летательного аппарата с математической моделью вида:

$$\frac{x_1}{dt} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 y,$$

$$\frac{x_2}{dt} = a_4 x_1,$$

$$\frac{dy}{dt} = u,$$

где $\mathrm{x}_1 -$ это скорость летательного аппарата; $\mathrm{x}_2 -$ его координата ; $\mathrm{y} =$ δ – управление ; a_1, a_2,$\mathrm{a}_3 -$ массовые коэффициенты, равные $a_1 = \frac{K_v}{m}$, $a_2 = \frac{K_x}{m}$, $a_3 = \frac{K_\delta}{m}$. От системы требуется выработать такое управление u, которое позволит летательному аппарату переместиться в определенную точку фазового пространства.

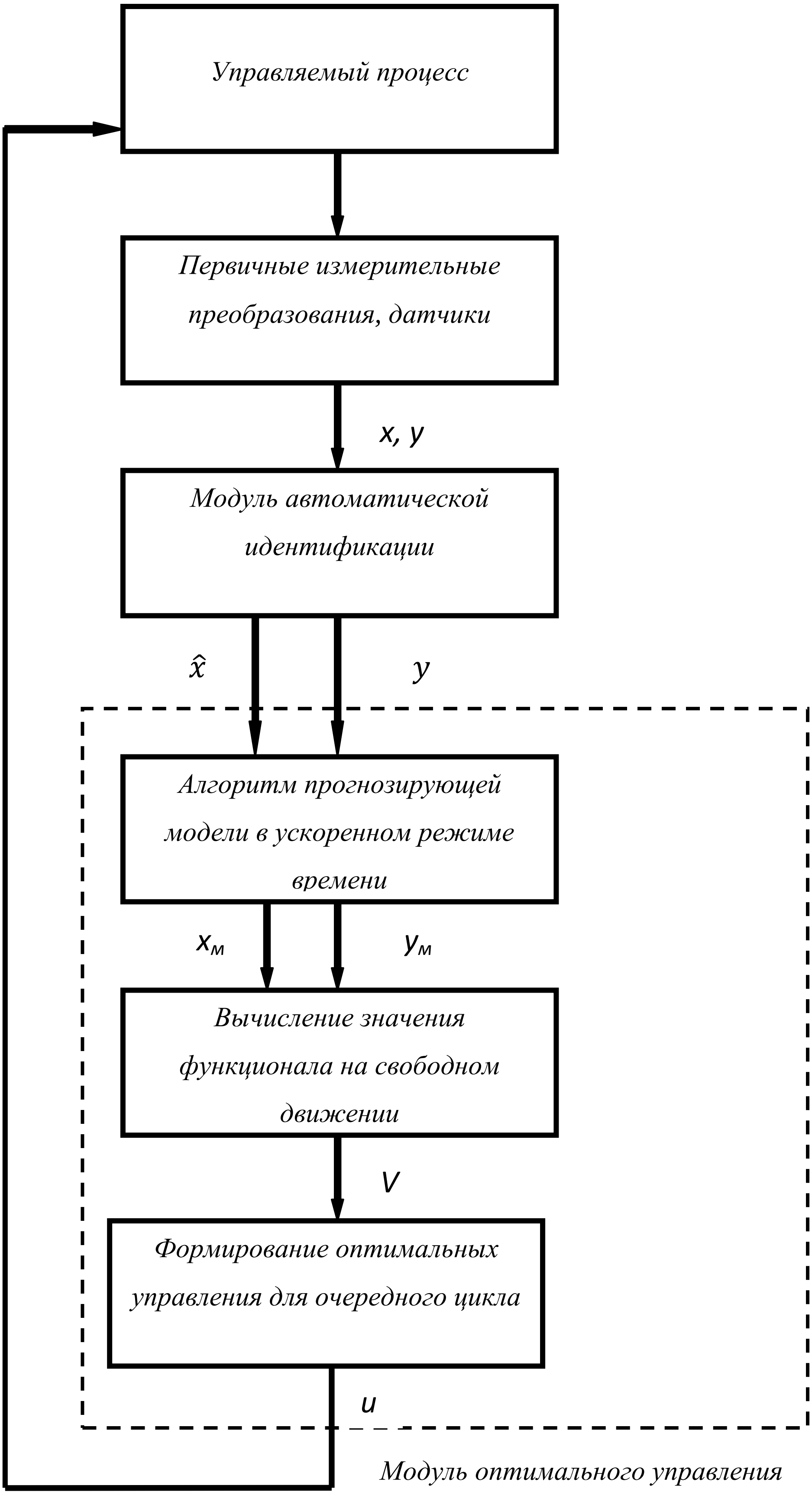

Рис. 1. Общий вид алгоритма оптимального управления с прогнозирующей моделью при управлении скоростью изменения управляющих воздействий

При этом допустимые значения координаты (скорости колебаний) ограничены диапазоном $x_{1\min} < x < x_{1\max}$.

В этом случае члены оптимального функционала обобщенной работы будут выражены:

$$V_3 = 0.5\beta(x_2 - x_{2к}),$$

$$Q = \begin{cases} \propto_1 x_1 - \propto_1 x_{1max}, \ если \ x_1 > x_{1max} \\ 0, \qquad если \ x_{1min} < x_1 < x_{1max} \\ \propto_2 x_1 - \propto_2 x_{1min}, если \ x_1 < x_{1min} \end{cases}$$

где V_3 – слагаемое функционала, характеризующее качество управляемого процесса, Q - слагаемое функционала, соответствующее штрафующей функции при выходе объекта за ограничения. Штрафующие коэффициенты выбираются в зависимости от требования к строгости границам. Более строгой границе следует назначать большее абсолютное значение $\propto$.

Для нахождения оптимального управления (6) вычисление $\frac{\partial V}{\partial y}$ производим при помощи матрицы чувствительности. Структурная схема алгоритма прогнозирующей модели с применением матрицы чувствительности показана на рис. 2 [10].

Результаты численного моделирования данного примера представлены на рис. 3, 4. При этом принимались:

$a_1 = -0.8;\ a_2 = -0.009;\ a_3 = 0.1; a_4 = 0.125\ \ \varkappa = 14; t_M = 3c;\ \Delta t_u = 0.05;\ x_{2\_end} = 75;$

$\beta = 4{,}5; y(0) = 0.5; x_1(0) = 0;\ x_2(0) = 0;\ \propto_1 = \propto_2 = 60.$

Таким образом, использование прогнозирующей модели имеет ряд преимуществ и позволяет [2]:

1) Сохранить универсальность комплекса алгоритмов системы, обеспечиваемую непосредственным решением задачи оптимизации управления в процессе функционирования системы (совмещенный синтез оптимального управления);

2) Достичь значительной простоты в организации адаптивности синтезируемого управления путем соответствующих настроек прогнозирующей модели по результатам идентификации динамических характеристик управляемого объекта;

3) Углубить исследования свойств движения объекта, управляемого на основе минимизации критерия обобщенной работы.

Однако многократное численное интегрирование свободного движения при алгоритме с прогнозирующей моделью приводит к появлению ошибок особенно на

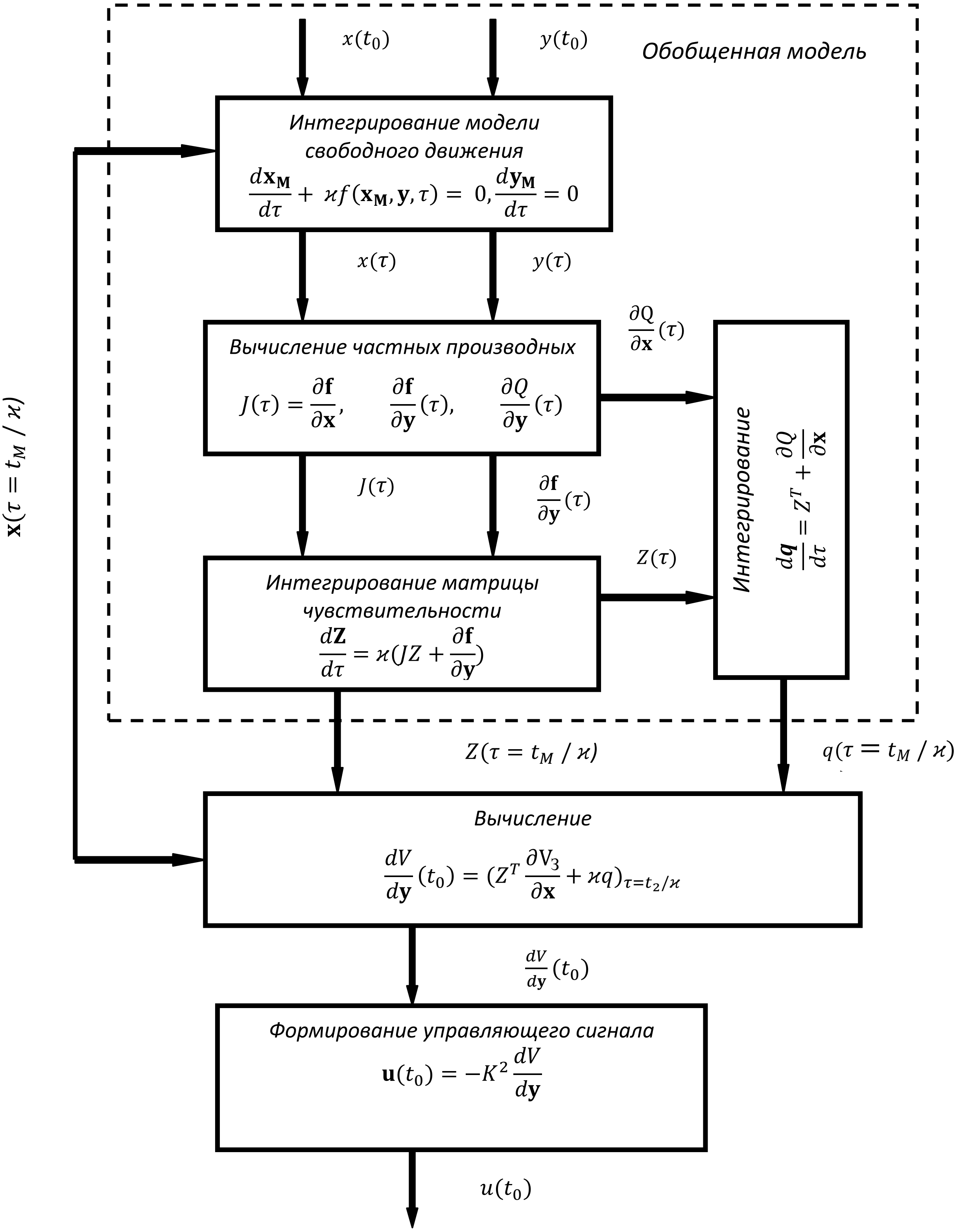

Рис. 2. Структурная схема алгоритма оптимального управления с прогнозирующей моделью с использованием матрицы чувствительности

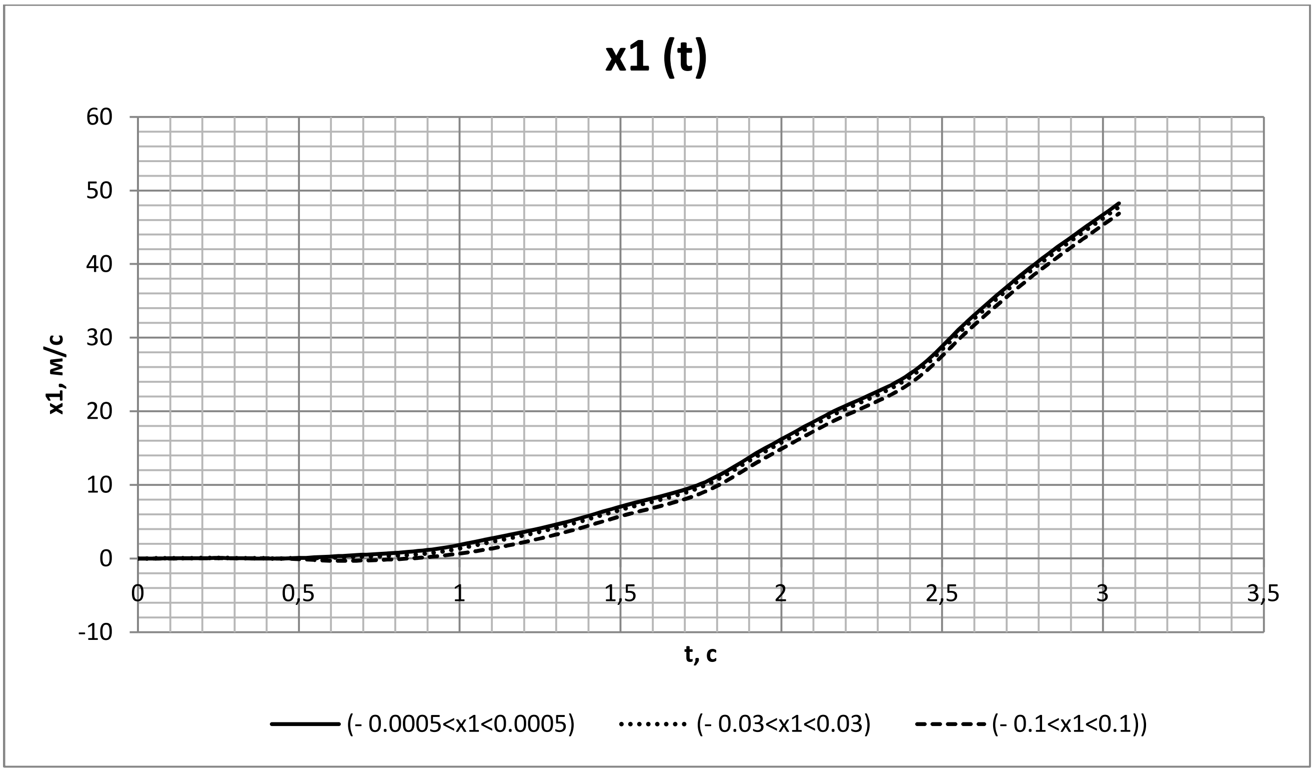

Рис. 3. График скорости объекта управления при наложении на нее различных ограничений

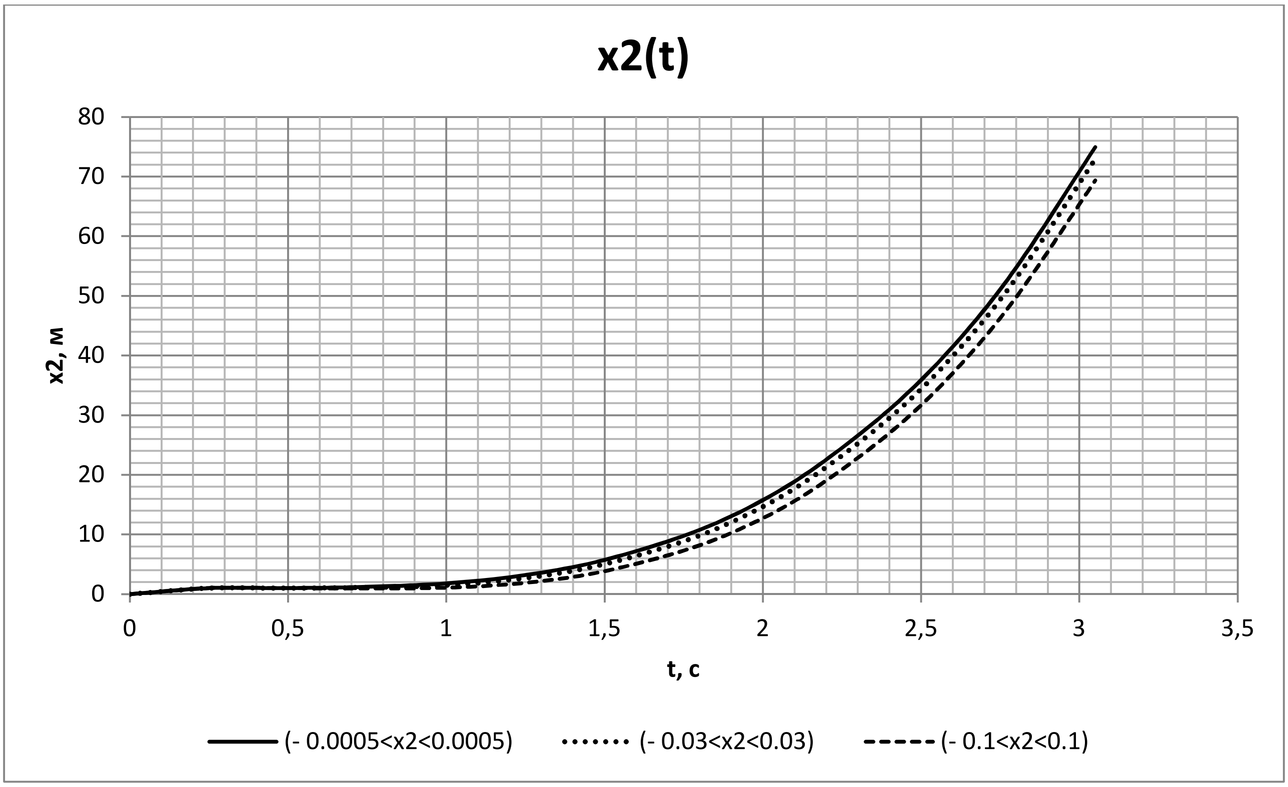

Рис. 4. График траектории объекта управления при наложении на ее скорость различных ограничений

больших интервалах времени - «глобальной оптимизации». Это является следствием того, что оптимальное управление действует уже не так эффективно.

Кроме того, прибавляются ошибки и погрешности при выборе математической модели, вычислительные ошибки (связанные с погрешностью округления чисел, погрешностью работы самого вычислительного комплекса). И если, например, ошибки численного интегрирования можно существенно уменьшить засчет уменьшения шага интегрирования, то на ошибки вычислительного комплекса повлиять достаточно сложно.

Таким образом, вывод о том, что, варьируя значениями параметров применяемого приближенного метода, можно достигнуть требуемой точности результатов моделирования, в общем случае является ошибочным. Корректные выводы в отношении точности можно сделать лишь в том случае, если математическая модель, приближенный метод ее исследования, а также МС взаимно согласованы и рассматриваются в комплексе - в рамках единого системного подхода [1,3,6].

Список литературы

1. Бабенко К.И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 849 с.
2. Буков В.Н. Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом. М.: Наука, 1987. 232 с.
3. Булычев Ю.Г., Бурлай И.В. Системный подход к моделированию сложных динамических систем в задачах с прогнозирующей моделью // Автоматика и телемеханика. 1996. № 3. С. 34-46
4. Булычев Ю.Г., Манин А.А. Синтез адаптивных систем оптимального управления стохастическими объектами на основе прогнозирующей модели //Автоматика и телемеханика. 1995. № 9. С.81-92
5. Красовский А.А., Буков В.Н., Шендрик В.С. Универсальные алгоритмы управления непрерывными процессами. – М.: Наука, 1977. – 272 с.
6. Математическое моделирование. Нелинейные дифференциальные уравнения математической физики / под ред. А.А. Сомарского М.: Наука, 1987. 280 с.
7. Методы классической и современной теории автоматического управления: учебник. В 3 т. Т.3. «Методы современной теории автоматического управления» / под ред. Н.Д. Егупова. М.:Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000. 748 с., ил.
8. Наумов А.И. применение аналитических прогнозирующих моделей в системах управления летательных аппаратов в авиационных тренажерах //Автоматика и телемеханика. 2001. № 7. С. 178-187.

9. Справочник по теории автоматического управления/ под ред. Красовского А.А. – М.:Наука, 1987. – 713

10. Феодосеев А.С. Алгоритм оптимального управления с обобщенной прогнозирующей моделью //Автоматика и телемеханика. 1977. № 7. С.16-21.

11. Фомин В.Н., Фрадков А.А., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981. 448с.