электронный научно-технический журнал
ИНЖЕНЕРНЫЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51036. ISSN 2307-0595

Оптимизация системы амортизации упругой конструкции на основе минимаксного функционала

04, апрель 2015

Тушев О. Н.[1], Беляев А. В.[1,*]

УДК: 51.74

[1]Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
[*]beliaev@bk.ru

Введение

Задача оптимального выбора характеристик систем амортизации для защиты упругих конструкций от ударных нагрузок имеет важное прикладное значение. Она принадлежит к обширному классу задач параметрического синтеза конструкций, которые решаются на различных этапах проектирования любых объектов. В ряде случаев возникает потребность получения экстремальных значений определенных характеристик, что приводит к необходимости постановки многокритериальных задач оптимизации.

Прямое решение многокритериальной задачи в общем случае возможно, если использовать понятие оптимальности по Парето. Решение называется Парето-оптимальным, если значение любого из критериев можно улучшить лишь за счет ухудшения хотя бы одного из оставшихся критериев. Разработана теория таких задач и построены алгоритмы нахождения решений, которые представляют собой гиперповерхности в пространстве варьируемых параметров [1, 2]. В инженерных задачах такие решения требуют конкретизации с помощью введения дополнительных условий и могут оказаться неудовлетворительными с практической точки зрения.

Задача параметрической оптимизации часто ставится как минимизация (максимизация) скалярного критерия в ограниченной области [3]. При этом предполагается, что задача каким-либо способом трансформирована к однокритериальной. Самым распространенным приемом является оптимизация одного наиболее важного критерия, а на остальные накладываются ограничения. Например, в задаче оптимальной амортизации минимизируется ход штока амортизатора, а внутренние силовые факторы амортизируемого объекта ограничиваются из условий прочности [4]. Помимо этого существуют различные способы «свертывания» векторного критерия в скалярный, для чего необходимо располагать информацией о сравнительной важности критериев – элементов векторного критерия. Далеко не всегда операция свертывания является простой и однозначной, поскольку требования к системе могут быть весьма разнообразны. Например, для амортизируемого объекта, как правило, необходимо выполнить требования по прочности, по времени затухания переходных процессов при ударных нагрузках, по перемещениям. Предпочтительной является постановка задачи, в которой критерии однородны (имеют одну размерность и равноценны). В этом случае часто оказывается целесообразной свертка, выделяющая из них тот, который имеет наибольшее (наименьшее) значение. К этому классу относится известная оптимизационная задача равнопрочности конструкции, когда минимизируется максимальное напряжение [5]. Такие постановки приводят к минимаксным целевым функционалам. Аналогичная постановка задачи оптимизации возникает при минимизации максимальных перемещений объекта при заданных ограничениях на перегрузки [6].

В статье представлена методика решения многокритериальной задачи параметрической оптимизации системы амортизации. Показано, что поиск оптимальных упругих и демпфирующих характеристик ограничен областью практически реализуемых значений для заданного типа пневмо-гидравлических амортизаторов. В заключительной части статьи на примере балочной модели конструкции определены характеристики амортизаторов, при которых для заданного внешнего воздействия обеспечивается минимальное перемещение нижней балки с учетом ограничений на значения реакций упругих связей и перегрузки.

1. Постановка задачи

Характер внешней нагрузки часто не позволяет считать элементы конструкции абсолютно жесткими. Для упрощения задачи обычно континуальную упругую систему заменяют дискретной моделью методами конечного элемента или конденсации. Допустим, что такая модель получена и её динамика описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t, \mathbf{A}) + \mathbf{Z}(t), \qquad (1)$$

где $\mathbf{X}$ - вектор фазовых координат, $\mathbf{F}$ - нелинейная вектор-функция, t - время, $\mathbf{A} = (a_1, a_2, ..., a_m)^T$ - вектор варьируемых параметров амортизации. Будем считать, что система находится под действием произвольной ударной нагрузки $\mathbf{Z}(t)$.

Введем вектор параметров качества системы $\mathbf{Y} = (y_1, ..., y_k, y_{k+1}, ..., y_l)^T$. Как правило, это – относительные перемещения, абсолютные ускорения, внутренние силовые факторы и т.д. Обычно часть $|y_i|(i = 1, 2...k)$ необходимо минимизировать, на остальные $|y_i|(i = k+1,..,l)$ - наложить ограничения. Пусть $\mathbf{Y}^* = (y_{k+1}^*, ..., y_l^*)^T$ - вектор предельно допустимых значений, а T - заданный интервал времени, который может быть равен, например, времени затухания переходного процесса. Тогда задачу можно сформулировать так:

$$\min_{\mathbf{A}} \left[\max_{t} |y_i(\mathbf{A}, t)|, t \in T \right]; \quad i = 1, ..., k, \qquad (2)$$

$$\text{при } L_i = \max_t \left| y_i\left(\mathbf{A}, t\right) \right| - y_i^* \le 0; \quad i = k+1, \ldots, l.$$

Определение оптимальных характеристик пассивной амортизации трактуется как многокритериальная задача нелинейного программирования. Для общности постановки к (2) требуется добавить ограничения на $\mathbf{A}$, однако в классе пассивных, технически реализуемых амортизаторов, предлагаемый ниже способ практически устраняет эту необходимость. При $k > 1$ задача (2) является многокритериальной и может быть решена, только если учитывать дополнительную информацию о сравнительной важности критериев. Если критерии однородны и равноценны, то выражение (2) можно записать так:

$$\min_{\mathbf{A}} G\left[\max_t \left| y_i\left(\mathbf{A}, t\right); i = 1, \ldots, k; \ t \in T \right| \right], \tag{3}$$

$$\text{при } L_i \le 0; \quad i = k+1, \ldots, l,$$

где G - оператор свертки, конкретный вид которого зависит от специфики решаемой задачи.

2. Метод решения

Важным этапом формирования задачи оптимизации является параметризация характеристик системы амортизации. С практической точки зрения необходимо, чтобы при варьировании параметров в процессе итерации характеристики находились в заданном классе, который может быть реализован определенным типом амортизаторов. Нарушение этого условия приводит к получению некоторых абстрактных оптимальных характеристик, которые не представляют интерес с инженерной точки зрения. Например, это характерно для пневмогидравлических амортизаторов [7], которые используются для защиты объектов от интенсивных динамических нагрузок. В них упругая (позиционная) характеристика реализуется сжатым газом, а демпфирующая (скоростная) характеристика – дросселированием жидкости. Характеристики таких типов амортизаторов хорошо аппроксимируются кусочно-непрерывными или кусочно-линейными функциями.

Считая характеристики амортизаторов сепарабельными ($c\left(x, \dot{x}\right) = f\left(x\right) + d\left(\dot{x}\right)$, где $x, \tilde{o}$- перемещение и скорость штока амортизатора соответственно), что практически всегда имеет место в реальных амортизаторах, будем искать их в классе кусочно-линейных функций. Из условия пассивности амортизации следует, что характеристики должны находиться в первом и третьем квадрантах. Кроме того, считаем их неубывающими, что свойственно большинству типов амортизаторов. Убывание, как правило, связано с разрушением упругих элементов, разгерметизацией поршня и т.д.

Рассмотрим случай, когда характеристика амортизатора зависит только от перемещения x, то есть $c\left(x\right) = f\left(x\right)$. Обозначим через $f_i, b_i, \left(i = 1, 2, \ldots, n\right)$ координаты точек сопряжения участков и значение $f_1 = f(0)$ (рис.1). Зададим совокупность параметров a_i вектора $\mathbf{A}$ с помощью следующих соотношений:

$$f_1 = \exp a_1, \quad f_i - f_{i-1} = \exp a_i \left(i = 2, \ldots, n\right),$$

$$b_1 = \exp a_{n+1},\ b_i - b_{i-1} = \exp a_i \left(i = n+2, ..., 2n-1\right).$$

При таком способе параметризации любым вариациям $a_i, \forall i$ соответствуют изменения характеристик в заданном классе и многочисленные координатные ограничения типа $b_1 > 0,\ b_2 > b_1$ и т.д. естественным образом выполняются.

Заметим, что в начале координат предусматривается разрыв первого рода, причем величина скачка варьируется и определяется a_1. Такой разрыв характерен для пневмогидравлических амортизаторов, а также для характеристик вида $sign\left(x\right)$.

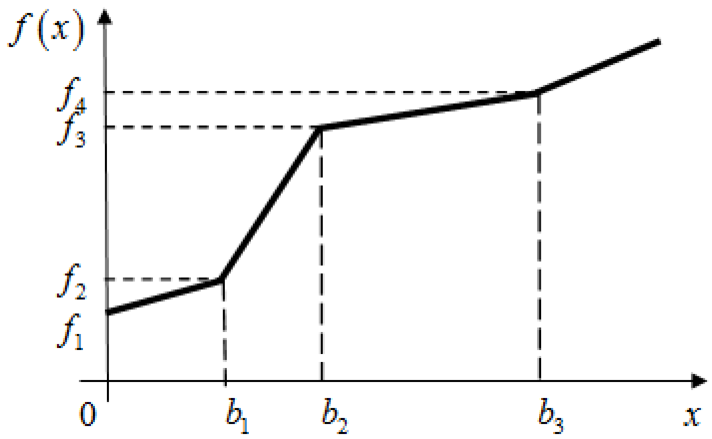

Рис. 1. Вид характеристики амортизатора

Неаддитивность «минимаксных» функционалов, сложность математического описания, высокая размерность $\bar{A}$ ограничивают возможные подходы к решению поставленной задачи методами нелинейного программирования, не использующие производные.

Применим для учета ограничений метод штрафных функций. Тогда (3) трансформируется к виду

$$\min_{\mathbf{A}} \left\{ G\left[\max_t \left| y_i\left(\mathbf{A}, t\right)\right|; i = 1, ..., k \right] + \sum_{j=k+1}^{l} h_j L_j^2 H\left(L_j\right) \right\}, \qquad (4)$$

где H - функция Хевисайда, $h_j, \forall j$ - коэффициенты штрафа.

Метод погружения (штрафных функций) широко описан в литературе [8] и является эффективным приемом учета нелинейных ограничений. При этом в подавляющем числе публикаций по нелинейному программированию отсутствуют надежные рекомендации по априорному выбору коэффициентов штрафа. Это приводит к необходимости решать последовательность задач безусловного поиска с возрастающим штрафом, что очень сильно затягивает процесс получения решения.

Результаты статьи [9], которая по нашему мнению незаслуженно забыта, принципиально позволяют исключить решение последовательности задач безусловного поиска. Если задать коэффициенты штрафа по формуле

$$h_j = \frac{4}{\varepsilon_j^2}\left[G\left(\tilde{\mathbf{A}}\right) - c_0\right]; \quad j = k+1,\ldots,l, \tag{5}$$

то ограничения будут выполняться с ошибкой, не большей ε_j, $\tilde{\mathbf{A}}$ - любая точка допустимой области; c_0- нижняя оценка целевой функции (в данном случае удобно положить $c_0 = 0$). Расчеты показывают, что (5) дает сильно завышенный штраф, приводящий к серьезным вычислительным трудностям. Поэтому ε_j не следует задавать меньше 20% от допуска. Как правило, фактическая точность оказывается значительно выше и удовлетворяет инженерным требованиям. Заметим, что формула (5) позволяет варьировать величину коэффициента штрафа в процессе поиска по мере уменьшения целевой функции и изменении требований к точности, что положительно сказывается на сходимости решения. Понятно, что высокая точность нужна только в окрестности оптимума. Как показали вычисления, использование формулы (5) позволяет обеспечить необходимую точность выполнения ограничений за одну итерационную процедуру. При этом поиск решения не затягивается.

Для безусловной минимизации (4) предлагается использовать метод «деформируемого» многогранника, не требующий определения производных [10]. Суть метода в следующем: в пространстве поиска размерности m задается многогранник с $m+1$ вершинами. Деформируясь специальным образом (сжатие, редукция, отражение, растяжение) и адаптируясь тем самым к топологии пространства поиска, многогранник движется к экстремуму. Метод обеспечивает хорошую сходимость и имеет простую численную реализацию.

3. Пример

В качестве примера рассмотрим задачу оптимальной амортизации конструкции, состоящей из двух упругих балок (рис.2). Масса верхней балки аппроксимирована шестью сосредоточенными массами - с первой по шестую, масса нижней балки – с седьмой по десятую.

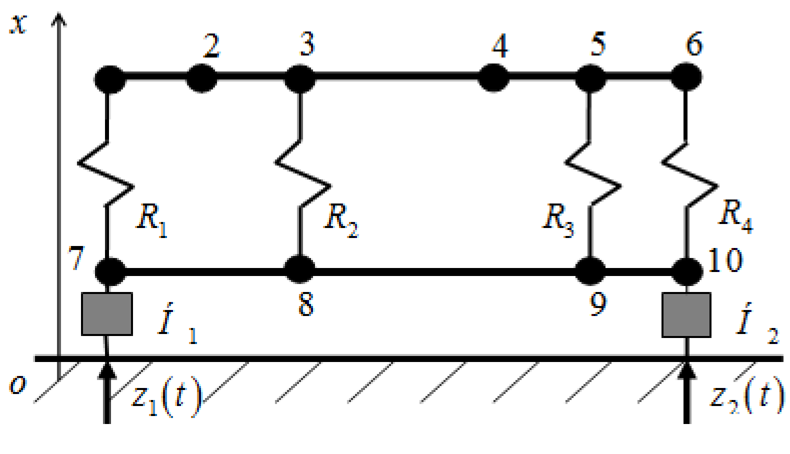

Рис. 2. Расчетная балочная модель конструкции

Перемещения масс вдоль вертикальной оси OX обозначим $x_i\,(i=1,2...,10)$. Балки между собой соединены упругими связями, жесткости которых R_1, R_2, R_3, R_4. Нижняя балка закреплена к жесткому основанию посредством двух одинаковых амортизаторов H_1 и H_2.

Нагрузка задана перемещением основания $z_1(t)$, $z_2(t)$ в местах установки амортизаторов (рис.3).

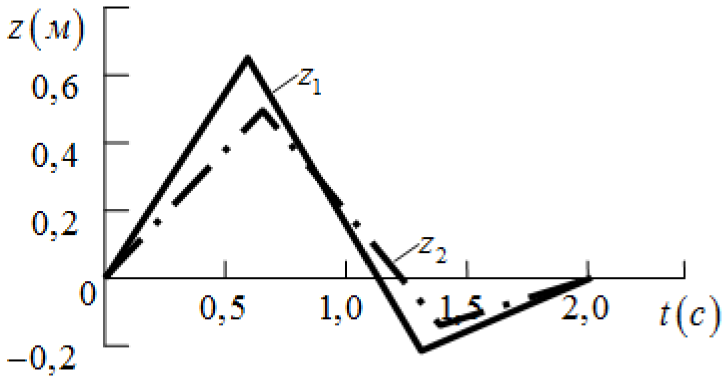

Рис. 3. Перемещения основания в местах расположения амортизирующих опор

Характеристики амортизаторов представим кусочно-линейными функциями

$$c_1(x_7 - z_1; \dot{x}_7 - \dot{z}_1) = f\, sign(x_7 - z_1) + d\, sign(\dot{x}_7 - \dot{z}_1),$$
$$c_2(x_{10} - z_2; \dot{x}_{10} - \dot{z}_2) = f\, sign(x_{10} - z_2) + d\, sign(\dot{x}_{10} - \dot{z}_2),$$

где $x_7(t)$, $x_{10}(t), \dot{x}_7(t), \dot{x}_{10}(t)$ - перемещения и скорости соответственно нижней балки в местах крепления к ней штоков амортизаторов.

В задаче требуется определить значения параметров амортизаторов f и d, при которых для заданного внешнего воздействия обеспечивается минимальное перемещение нижней балки относительно основания, при условии, что абсолютные значения реакций упругих связей R_1, R_2, R_3, R_4 и ускорение первой массы $\ddot{x}_1$ не превышают заданных допустимых значений $R_1^*, R_2^*, R_3^*, R_4^*$ и $\ddot{x}_1^*$ соответственно.

В соответствии с изложенной методикой оптимизации системы амортизации упругой конструкции на основе минимаксного функционала выберем девять параметров качества системы. Первые четыре $y_1 = x_7 - z_1$, $y_2 = x_8 - z_3$, $y_3 = x_9 - z_4$, $y_4 = x_{10} - z_2$ - характеризуют относительные перемещения масс нижней балки и основания, в том числе ходы амортизаторов (y_1, y_4), следующие четыре $y_5 = R_1$, $y_6 = R_2$, $y_7 = R_3$, $y_8 = R_4$ - внутренние силовые факторы и последний параметр $y_9 = \ddot{x}_1$ - ускорение первой массы. Перемещения абсолютно жесткого основания в точках z_3, z_4 под массами 8 и 9 находятся линейным преобразованием по известным перемещениям основания в точках z_1, z_2.

Задачу оптимизации сформулируем как минимаксную задачу, в которой необходимо минимизировать параметры качества y_1, y_2, y_3, y_4 при условии, что значения параметров качества $y_5 \div y_9$ не больше, чем заданные допустимые значения $y_5^* \div y_9^*$.

Анализ критериев $y_1 \div y_4$ позволяет установить, что они однородны и равноценны. Поэтому, исходя из физического смысла задачи оператор-свертку задаем в виде

$$G\left[\max_t |y_i|; i=1,...,4;\ t\in T\right] = \max_{i=1,...4}\left[\max_t |y_i|;\ t\in T\right]$$

На рис.4 изображена картина поиска на плоскости a_1, a_2 для двух различных начальных приближений (I, II). Исходные треугольники имеют вершины с номерами 1, 2 и 3. Шаги первого варианта поиска обозначены точками, шаги второго варианта – кружками. Над точками и кружками указан номер приближения, экстремальные точки отмечены стрелками. Из рисунка видно, что поиск из двух различных подобластей пространства дает практически совпадающие результаты.

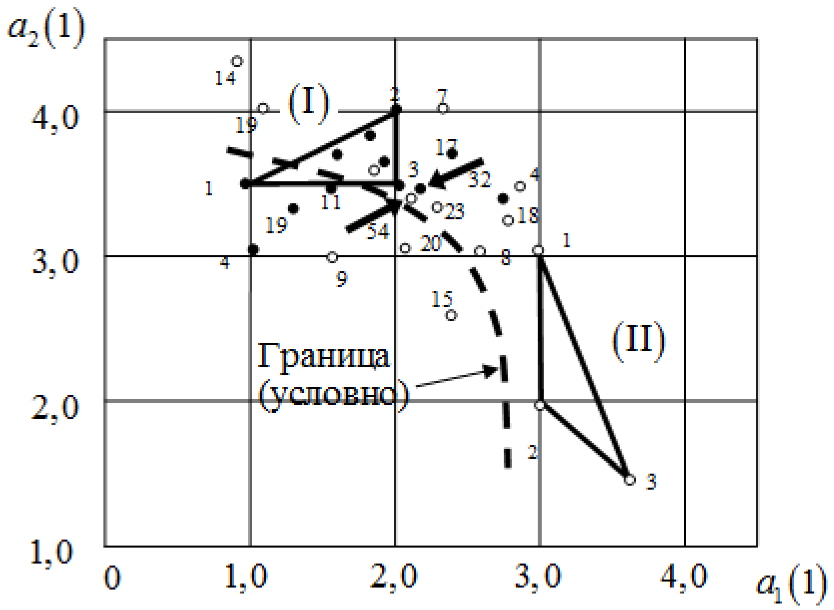

Рис. 4. Положения «деформируемого» многогранника на плоскости в процессе поиска экстремума функции

Оптимум определялся с точностью до второго знака, то есть поиск заканчивался, если значения целевой функции в вершинах многогранника совпадали до второго знака включительно. В итоге при решении задач оптимизации для двух начальных приближений потребовалось вычисление целевой функции 32 и 54 раза соответственно.

В достаточно большой окрестности экстремума активным оказалось ограничение на ускорение y_9, оно и изображено на рисунке как одна из границ допустимой области;

ошибка ε_j в формуле (5) принималась равной 30% от допуска. При этом в оптимальной точке по выполнению ограничения она не превышала 2%.

Заключение

Задача оптимизации системы амортизации упругих конструкций рассмотрена как многокритериальная задача нелинейного программирования. Предложен прием, позволяющий избавится от координатных ограничений и векторный критерий оптимальности заменить скалярным минимаксным критерием-сверткой для однородных и равноценных критериев. Коэффициент штрафа для учета ограничений выбирается на основе специальной формулы, позволяющей выбрать его величину исходя из необходимой точности нахождения оптимальной точки в допустимой области. Для ускорения итерации величина коэффициента штрафа может меняться в процессе поиска. Это позволяет существенно сократить трудоемкость поиска оптимального решения.

Список литературы

1. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1982. 256 с.
2. Соболь И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями: учеб. пособие для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Дрофа. 2006. 175 с.
3. Брахман Т. Р. Многокритериальность и выбор альтернативы в технике. М.: Радио и связь. 1984. 287 с.
4. Малков В.П., Угодчиков А.Г. Оптимизация упругих систем / монография. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1981. 288 с.
5. Н.В. Баничук. Введение в оптимизацию конструкций. М.: Наука. 1986. 301 с.
6. Проурзин В.А. Задача оптимальной амортизации упругих объектов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2004. № 2. С. 28-38.
7. Тушев О.Н., Беляев А.В. Оптимизация технических характеристик пневмогидравлических амортизаторов из условия максимума надёжности механической системы // Инженерный вестник. Электронный научно-технический журнал МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2013. № 6. Режим доступа: http://engbul.bmstu.ru/doc/597480.html (Дата обращения: 4.04.2015)
8. Фиакко А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. М.: Мир. 1972. 240 с.
9. Баранов А.Ю., Трухаев Р. И. , Хоменюк В. В. Обоснование метода погружения в вариационных задачах // Автоматика и телемеханика. 1967. № 7. С. 10-14.
10. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир. 1975. 536 с.