

Метод фундаментального решения в курсах «Дифференциальные уравнения» и «Уравнения математической физики»

04, апрель 2015

Облакова Т. В.^{1,*}

УДК: 517.9

¹Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

[*Obltv@inbox.RU](mailto:Obltv@inbox.RU)

Введение

Реорганизация учебного процесса, проводимая в последние годы, сопровождается сокращением количества аудиторных часов, отводимых на изучение курса математики и диктует необходимость разработки новых методических подходов к изложению базового курса математики. На первый план выходит формирование навыков поиска и анализа информации, умения грамотно пользоваться справочными материалами [1], [2].

Важнейшим разделом базовой фундаментальной подготовки инженера является раздел дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и в частных производных. К счастью, все еще значительное количество часов отводится на изучение линейных уравнений с постоянными коэффициентами и их систем. Подробно излагаются методы вариации постоянных, подбора частного решения для уравнений с правой частью специального вида, при этом решение задачи Коши сводится к решению алгебраической системы уравнений относительно набора произвольных постоянных. В курсе уравнений математической физики задача Коши решается разными методами в зависимости от вида уравнения, наличия правой части, количества пространственных переменных. Полученные этими разными методами формулы, однако, допускают единообразную интерпретацию.

Курс «Дифференциальные уравнения»

Рассмотрим вначале, например, решение задачи Коши для уравнения $u' + au = f$ с начальным условием $u(0) = u_0$. Для решения этого уравнения учащемуся необходимо осуществить последовательность процедур. На первом этапе находится общее решение однородного уравнения $u' + au = 0$, имеющее вид $u(t) = Ce^{-at}$. Далее для поиска частного решения неоднородного уравнения применяется метод вариации постоянной:

$$\begin{aligned}
C'e^{-at} - aCe^{-at} + aCe^{-at} &= f(t), \\
C' &= f(t)e^{at}, \\
C(t) &= \int_0^t f(s)e^{as}ds, \\
u(t) &= e^{-at} \int_0^t f(s)e^{as}ds + C_1e^{-at}.
\end{aligned}$$

Последний этап решения - это подбор постоянной C_1 , приводящий к очевидному результату $C_1 = u_0$.

При взгляде на полученное решение

$$u(t) = u_0e^{-at} + \int_0^t f(s)e^{-a(t-s)}ds \quad (1)$$

понятно, что все описанные выше этапы сводятся к вычислению одного интеграла, представляющего собой свертку функции $E(t) = \theta(t)e^{-at}$ с функцией $f(t)\theta(t)$, описывающей внешнее воздействие интенсивности $f(t)$, включаемое в нулевой момент времени (здесь через $\theta(t)$ обозначена функция Хевисайда). Заметим в скобках, что первое слагаемое в (1) также представляет собой результат свертки $E(t)$ с функцией $u_0\delta(t)$, описывающей начальное условие как результат импульсного воздействия в нулевой момент времени. Здесь использовано стандартное обозначение $\delta(t)$ для дельта-функции Дирака.

Функция $E(t) = \theta(t)e^{-at}$ характеризует линейный дифференциальный оператор $\frac{d}{dt} + a$ и называется его фундаментальным решением. По своему физическому смыслу она представляет отклик системы на единичное импульсное воздействие:

$$LE(t) = \delta(t) \quad (2)$$

Решение задачи Коши для уравнения вынужденных колебаний $u'' + a^2u = f$ с начальными условиями $u(0) = u_0, u'(0) = u_1$, аналогично может быть найдено и записано в общем виде:

$$u(t) = u_1 \frac{\sin at}{a} + u_0 \cos at + \frac{1}{a} \int_0^t \sin a(t-\tau) f(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Правая часть формулы (3) представляет собой свертку фундаментального решения $E(t) = \theta(t) \frac{\sin at}{a}$ оператора $\frac{d^2}{dt^2} + a^2$ с функцией $f(t)\theta(t) + u_1\delta(t) + u_0\delta'(t)$, описывающей комбинированное влияние внешних сил и начальных условий (см. методическую работу [1]).

При работе с формулами (1) и (3) целесообразно обратить внимание аудитории на наличие функции, характеризующей линейную динамическую систему, описываемую дифференциальным уравнением.

В общем случае уравнения вида (2) решаются операционно, и этот способ поиска фундаментального решения приходится отложить до курса операционного исчисления. Однако, как отмечено в [3], фундаментальным решением для дифференциального оператора с обыкновенными производными $L = a_0 \frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_0$ может служить функция $E(t) = \theta(t)y(t)$, где $y(t)$ - частное решение однородного уравнения $Ly = 0$, удовлетворяющее простому набору начальных условий:

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-2)}(0), y^{(n-1)}(0) = 1/a_0.$$

Изучаемый в дальнейшем операционный метод решения дифференциальных уравнений и их систем с применением преобразования Лапласа выглядит более выигрышным, поскольку экономит хотя бы на подборе произвольных коэффициентов, начальные условия используются на первом этапе.

Запишем линейное дифференциальное уравнение, как обыкновенное, так и с частными производными в операторной форме:

$$Lu = f \quad (4)$$

При переходе к изображениям дифференциальное уравнение (4) преобразуется в алгебраическое $P_n(p) \cdot \tilde{u}(p) = \tilde{f}(p)$, где $u(t) \rightleftharpoons \tilde{u}(p)$, $f(t) \rightleftharpoons \tilde{f}(p)$, а многочлен $P_n(p)$ определяется комбинацией производных по времени в левой части уравнения (4) и набором начальных условий. При этом фундаментальное решение, по сути, находится в процессе восстановления оригинала от $\tilde{E}(p) = \frac{1}{P_n(p)}$.

Курс «Уравнения математической физики»

Еще более актуален метод фундаментального решения в курсе уравнений математической физики. Решения линейных уравнений с частными производными легко допускают соответствующую интерпретацию.

Так решение задачи Коши для волнового уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t)$ с произвольной правой частью $f(x, t)$ и произвольными начальными условиями $u(x, 0) = u_0(x)$, $u'_t(x, 0) = u_1(x)$, дается известной формулой Даламбера:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(u_0(x - at) + u_0(x + at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (5)$$

Правая часть формулы (5) представляет собой свертку фундаментального решения $E(t) = \theta(t) \frac{\theta(at - |x|)}{2a}$ с функцией $f(x, t)\theta(t) + u_1(x)\delta(t) + u_0(x)\delta'(t)$, описывающей влияние внешних сил и начальных условий. При этом начальному возмущению u_0 соответствует двойной слой $u_0(x)\delta'(t)$, а начальному возмущению u_1 - простой слой $u_1(x)\delta(t)$ на прямой $t = 0$.

Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности с конвективным переносом и охлаждением с боковой поверхности $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b \frac{\partial u}{\partial x} - cu = f(x, t)$ с произвольной правой частью $f(x, t)$ и произвольным начальным температурным профилем $u(x, 0) = u_0(x)$, дается формулой Пуассона:

$$u(x, t) = \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}} e^{ct} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\xi) e^{-\frac{(\xi+bt)^2}{4a^2 t}} d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{c(t-\tau) - \frac{(x-\xi+b(t-\tau))^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi d\tau \quad (6)$$

Правая часть (6) очевидно есть свертка фундаментального решения $E(t) = \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}} e^{ct - \frac{(\xi+bt)^2}{4a^2t}}$ оператора теплопроводности с внешним воздействием $f(x,t)\theta(t) + u_0(x)\delta(t)$.

Формулы (1), (3), (5),(6) дают решение неоднородного уравнения в виде интеграла, причем ядро этих интегральных операторов, определяемое фундаментальным решением, во всех случаях зависит только от разности переменных. Это особенность задачи Коши: в отсутствие пространственных границ влияние точечного источника зависит только от расстояния до него, но не от направления. В отличие от краевых задач, в которых решения также представляются в виде интеграла, но ядро в этих задачах (функция Грина) устроено более сложно. Дело в том, что фундаментальное решение, определяемое формулой (2), находится с точностью до произвольного решения соответствующего однородного уравнения. При решении краевых задач для эллиптических уравнений за счет подбора гармонического в решаемой области добавка мы теряем зависимость ядра только от разности переменных, но можем учесть краевые условия. Поскольку в решении эллиптических уравнений метод функций Грина является одним из основных, обсуждаемый методический подход позволяет логически однородно увязать этот материал со всем предыдущим изложением.

Заключение

Отметим в завершение, что метод свертки с функцией влияния нашел свое отражение уже не только в монографиях, но и в справочной литературе. В относительно новом справочнике [4] выписывание решения задачи Коши для того или иного уравнения предваряется указанием фундаментального решения соответствующего оператора, решение краевой задачи – соответствующей функции Грина. И даже классический справочник [5] содержит информацию о функции Грина того или иного уравнения, соотношениях между функциями Грина, передаточными функциями и частотными характеристиками.

Список литературы

1. Сборник примерных программ математических дисциплин цикла МиЕН Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования 3-его поколения. 2008. 137 с. // Портал государственных образовательных стандартов высшего образования. Режим доступа: <http://fgosvo.ru/uploadfiles/ppd/20110329002116.pdf> (дата обращения 02.02.2015).
2. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 141100 Энергетическое машиностроение. (Квалификация (степень) «бакалавр».) / Утв.: Приказом Минобрнауки России от 8 декабря 2009 г. N 715. (в ред. Приказов Минобрнауки РФ от 18.05.2011 N 1657, от 31.05.2011 N 1975). 2011. 14 с. // Портал государственных образовательных стандар-

тов высшего образования. Режим доступа:

<http://fgosvo.ru/uploadfiles/fgos/14/20111115144231.pdf> (дата обращения 02.02.2015).

3. Лошкарев А.И., Облакова Т.В. Фундаментальное решение линейного дифференциального оператора и задача Коши: метод. указания к выполнению домашнего задания. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2007. 71 с.
4. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит. 2001. 576 с.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы: пер. с англ. / ред. пер. Араманович И. Г. 5-е изд. М.: Наука. 1984. 831 с.