электронный научно-технический журнал
ИНЖЕНЕРНЫЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51036. ISSN 2307-0595

Моделирование электрогенерирующих элементов с переменной площадью сечения электродов

03, март 2015

Лошкарев А. И.[1], Облакова Т. В.[1,*]

УДК: [621.311.61: 621.3.014.2]: 001.6

[1]Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
[*]Obltv@inbox.ru

Введение

В статье авторов [1] рассматривалась задача о расчете влияния электрического сопротивления электродов постоянного сечения на выходную мощность ЭГЭ. Возникающая при этом неэквипотенциальность электродов приводит к потере мощности электрогенерирующего элемента (ЭГЭ) за счет работы некоторых его участков в неоптимальном режиме. Снижение электрических потерь при увеличении толщины электродов, и соответственно их массы, означает повышение требований к степени обогащения ядерного горючего за счет увеличения интенсивности поглощения нейтронов материалами электродов.

В этой связи представляет интерес вопрос о возможности снижения электрических потерь или увеличения длины электродов при тех же потерях за счет переменной площади их поперечного сечения при сохранении массы. В настоящей работе рассматривается возможность увеличения рабочей длины электрода в наиболее актуальном случае одностороннего токосъема, когда рабочая длина электрогенерирующего элемента составляет половину высоты активной зоны реактора-термоэмиссионного преобразователя (см. [2]). Анализ удобно проводить при многопараметрическом представлении зависимости площади поперечного сечения электродов от координаты сечения.

Описание модели

В настоящей работе рассматривается односторонний токосъем, схематически изображенный на рисунке 1. В соответствии с математической моделью, приведенной в статье [1] , полный ток $J_К(x)$, протекающий через произвольное поперечное сечение катода, находящееся на расстоянии x от начала координат, дается выражением:

$$J_К(x) = \int_0^x \Pi(x')j(x')dx', \quad (1)$$

где $j(x)$ −локальная плотность тока, генерируемая бесконечно малым элементом ТЭП на расстоянии x от начала координат, $\Pi(x)$ −наружный периметр нормального сечения катодной оболочки на том же расстоянии.

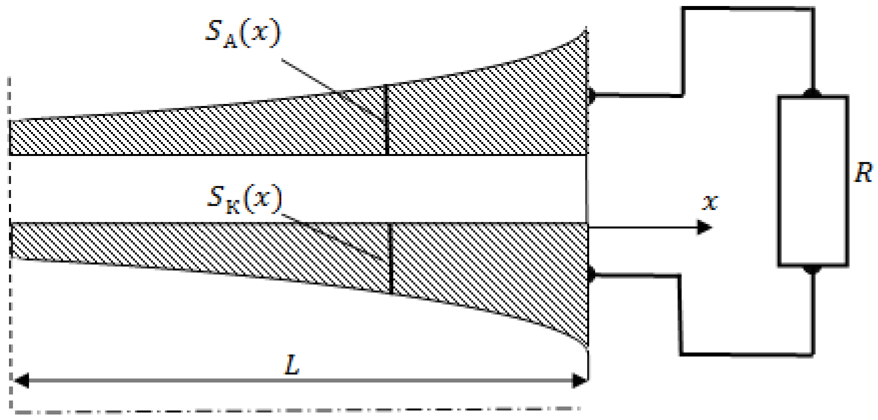

Рисунок 1. Схема подсоединения коммутационных проводников к электродам: $S_А(x) = S_К(x)$- площадь сечения электродов, R – сопротивление нагрузки.

Очевидно, что величина тока, протекающего по аноду в x −вом сечении для одностороннего токосъема, дается следующим выражением:

$$J_А(x) = J_К(x) \tag{2}$$

При этом $J_Н = J_К(L) = \int_0^L \Pi(x')j(x')dx'$ − ток через нагрузку.

Из уравнений Кирхгофа, записанных для замкнутого контура, проходящего по катоду, аноду, через сечение x и нагрузку, вытекают следующие интегральные уравнения для локальной разности потенциалов $v(x)$ между противолежащими участками катода и анода:

$$v(x) = V_Н + \int_x^L J_К(x')\left(\frac{\rho_К}{S_К(x')} + \frac{\rho_А}{S_А(x')}\right)dx'. \tag{3}$$

Здесь через $\rho_А$ и $\rho_К$ обозначены удельные электросопротивления материалов анода и катода, соответственно, $V_Н$ - напряжение на нагрузке, $S_А(x) = S_К(x)$- площадь сечения электродов.

Двукратное дифференцирование выражения (3) с учетом соотношений (1) и (2) дает:

$$\frac{dv}{dx} = -J_К(x)\left(\frac{\rho_К}{S_К(x)} + \frac{\rho_А}{S_А(x)}\right) \tag{4}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{\rho_К}{S_К(x')} + \frac{\rho_А}{S_А(x')}\right)^{-1}\frac{dv}{dx}\right] + \Pi(x)j(v) = 0 \tag{5}$$

Если принять допущение о линейности ВАХ на рабочем участке: $\frac{j}{j_0} = 2 - \frac{v}{v_0}$ (см. [3],[4]), то $\frac{dj}{j_0} = -\frac{dv}{v_0}$, откуда $dv = -\frac{v_0}{j_0}dj$. Тогда уравнение (5) можно переписать в виде:

$$\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{\rho_К}{S_К(x)} + \frac{\rho_А}{S_А(x)}\right)^{-1}\frac{v_0}{j_0}\frac{dj}{dx}\right] = \Pi(x)j(x). \tag{6}$$

Будем считать наружный периметр нормального сечения катодной оболочки постоянным $\Pi(x)=\Pi$, введем параметр $\varkappa^2=\Pi\left(\frac{\rho_К}{\overline{S}_K}+\frac{\rho_А}{\overline{S}_А}\right)\frac{j_0}{v_0}=\Pi\frac{j_0}{v_0}\frac{\rho_К}{\overline{S}_K}(1+\overline{r})$,
где $\overline{r}=\frac{\rho_А}{\overline{S}_А}/\frac{\rho_К}{\overline{S}_K}=\frac{\rho_А}{S_А(x)}/\frac{\rho_К}{S_К(x)}$ – относительное сопротивление анода также полагаемое постоянным, $\overline{S}_K=\frac{1}{L}\int_0^L S_К(x)dx$ – средняя величина сечения катода и аналогично определяемая $\overline{S}_А$ – средняя площадь сечения анода. Тогда уравнение (6) можно переписать в виде:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\varkappa^2}\frac{S_К(x)}{\overline{S}_K}\frac{dj}{dx}\right]=j(x). \tag{7}$$

Введем двухпараметрическое представление площади $S_К(x)$, вытекающее из соотношения

$$\frac{1}{\varkappa^2}\frac{S_К(x)}{\overline{S}_K}=\left(c\frac{x}{L}+d\right)^2, \tag{8}$$

где c и d - параметры, определяющие площадь сечения $S_К(x)$.

Условие постоянства массы $\overline{S}_K\cdot L=\int_0^L S_К(x)dx$ приведет к соотношению

$$\frac{1}{\varkappa^2}=\frac{1}{L}\int_0^L\left(c\frac{x}{L}+d\right)^2dx, \tag{9}$$

откуда находим пределы изменения параметра d от $d_{min}=0$ до $d_{max}=\frac{1}{\varkappa}$ при $c=0$.

Аналитическое решение задачи

В указанных предположениях (8)-(9) уравнение для плотности тока (7) превратится в уравнение Эйлера:

$$\frac{d}{dx}\left[\left(c\frac{x}{L}+d\right)^2\frac{dj}{dx}\right]-j(x)=0,$$

Или

$$\left(c\frac{x}{L}+d\right)^2\frac{d^2j}{dx^2}+2\frac{c}{L}\left(c\frac{x}{L}+d\right)\frac{dj}{dx}-j(x)=0 \tag{10}$$

Как известно (см.[5]), подстановкой $c\frac{x}{L}+d=e^y$ (10) сводится к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2j}{dy^2}+\frac{dj}{dy}-\frac{L^2}{c^2}j=0,$$

откуда легко находится решение:

$$j(x)=A\left(c\frac{x}{L}+d\right)^{k_1}+B\left(c\frac{x}{L}+d\right)^{k_2}, \tag{11}$$

где $k_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{4L^2}{c^2}}$.

Подстановка очевидных граничных условий

$$J_К(0)=0, J_К(L)=J_н \tag{12}$$

позволяет найти неопределенные коэффициенты A и B. В самом деле, из соотношения (4) с учетом (8) можно получить, что

$$\frac{dv}{dx}=-J_К(x)\frac{\rho_К}{S_К}(1+\overline{r})=-J_К(x)\frac{v_0}{\Pi j_0}\frac{\varkappa^2\overline{S}_K}{S_К(x)}=-J_К(x)\frac{v_0}{\Pi j_0}\frac{1}{\left(c\frac{x}{L}+d\right)^2}.$$

Следовательно, условие первое условие в (12) означает, что $\left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=0} = 0$ и $\left.\frac{dj}{dx}\right|_{x=0} = 0$.

После дифференцирования (11) и подстановки $x = 0$ и $x = L$ получаем систему

$$\begin{cases} Ak_1 d^{k_1-1} + Bk_2 d^{k_2-1} = 0 \\ Ak_1(c+d)^{k_1-1} + Bk_2(c+d)^{k_2-1} = \dfrac{L}{c}\dfrac{J_{\text{н}}}{\Pi(c+d)^2} \end{cases}$$

Для вычисления коэффициентов A и B решаем систему и после подстановки в (11) находим закон изменения плотности тока вдоль длины электрода:

$$j(x) = \frac{J_{\text{н}}L}{c\Pi}\frac{\frac{d^{k_2-k_1}}{k_1}\left(c\frac{x}{L}+d\right)^{k_1} - \frac{1}{k_2}\left(c\frac{x}{L}+d\right)^{k_2}}{(c+d)^{k_1+1}d^{k_2-k_1} - (c+d)^{k_2+1}}.$$

Следовательно,

$$v(x) = E - \frac{v_0}{j_0}j(x) = E - \frac{v_0}{j_0}\frac{J_{\text{н}}L}{c\Pi}\frac{\frac{d^{k_2-k_1}}{k_1}\left(c\frac{x}{L}+d\right)^{k_1} - \frac{1}{k_2}\left(c\frac{x}{L}+d\right)^{k_2}}{(c+d)^{k_1+1}d^{k_2-k_1} - (c+d)^{k_2+1}},$$

$$V_{\text{Н}} = v(L) = E - \frac{v_0}{j_0}\frac{J_{\text{н}}L}{c\Pi}\frac{\frac{d^{k_2-k_1}}{k_1}(c+d)^{k_1} - \frac{1}{k_2}(c+d)^{k_2}}{(c+d)^{k_1+1}d^{k_2-k_1} - (c+d)^{k_2+1}} = E - \frac{v_0}{j_0}\frac{J_{\text{н}}}{\Pi L}\Lambda,$$

где

$$\Lambda = \frac{\mathrm{L}^2}{c(c+d)k_1k_2}\frac{k_2 - k_1\left(\frac{c+d}{d}\right)^{k_2-k_1}}{1-\left(\frac{c+d}{d}\right)^{k_2-k_1}} = \frac{c}{c+d}\frac{k_2 - k_1\left(\frac{c+d}{d}\right)^{k_2-k_1}}{\left(\frac{c+d}{d}\right)^{k_2-k_1} - 1},$$

а уравнение ВАХ ЭГЭ $J_{\text{н}} = J_{\text{н}}(V_{\text{Н}})$ можно записать в виде:

$$\frac{J_{\text{н}}}{j_0\Pi\mathrm{L}} = \left(2 - \frac{V_{\text{н}}}{v_0}\right)\frac{c+d}{c}\cdot\frac{\left(\frac{c+d}{d}\right)^{k_2-k_1} - 1}{k_2 - k_1\left(\frac{c+d}{d}\right)^{k_2-k_1}}. \tag{13}$$

Из формулы (13) следует, что максимальная мощность на нагрузке равна

$$W_{\text{Н}}^{max} = (J_{\text{Н}}V_{\text{Н}})_{max} = \Pi L j_0 v_0\cdot\frac{c+d}{c}\cdot\frac{\left(\frac{c+d}{d}\right)^{k_2-k_1} - 1}{k_2 - k_1\left(\frac{c+d}{d}\right)^{k_2-k_1}}. \tag{14}$$

Заметим, что соотношение (9) позволяет получить явную зависимость между параметрами c и d:

$$c = -\frac{3d}{2} + \frac{d}{2}\sqrt{\frac{12}{\varkappa^2L^2}\cdot\left(\frac{L}{d}\right)^2 - 3}\,. \tag{15}$$

Однако использование соотношения (15) приводит к существенно более громоздким формулам.

Анализ полученных результатов

Найдем асимптотику при $c \to 0$ и $d \to d_{max} = \frac{1}{\varkappa}$, что соответствует предельному случаю электродов постоянного сечения. Поскольку

$$k_2 - k_1 = \sqrt{1 + \frac{4L^2}{c^2}} \sim \frac{2L}{c},$$

то

$$\frac{1}{\Lambda}=\frac{c+d}{c}\cdot\frac{\left(\frac{c+d}{d}\right)^{k_2-k_1}-1}{k_2-k_1\left(\frac{c+d}{d}\right)^{k_2-k_1}}\sim\frac{d}{c}\frac{e^{\frac{2L}{d}}-1}{\frac{L}{c}\,e^{\frac{2L}{d}}+\frac{L}{c}}=\frac{\operatorname{th}\frac{L}{d}}{\frac{L}{d}}=\frac{\operatorname{th}\varkappa L}{\varkappa L}.$$

Тогда формула (13) приобретет вид

$$\frac{J_{\text{н}}}{j_0\Pi\text{L}}=\left(2-\frac{V_{\text{н}}}{v_0}\right)\frac{\operatorname{th}\varkappa L}{\varkappa L},$$

что совпадает с результатом, полученным в работе [1].

Если же $d\to d_{min}=0$, то из соотношения (9) получаем, что $c\to\frac{\sqrt{3}}{\varkappa}$. В этом случае в формуле (12) множитель $\frac{1}{\Lambda}$ приобретает вид $\frac{2}{1+\sqrt{1+\frac{4}{3}\varkappa^2L^2}}$, что позволяет сравнить безразмерные ВАХ ЭГЭ $\frac{J_{\text{н}}}{j_0\Pi\text{L}}$ в рассмотренных предельных случаях при различных значениях $\varkappa L$ в зависимости от $\frac{V_{\text{н}}}{v_0}$ (см. рис 2.). Во втором случае (электроды переменного сечения) относительный ток на нагрузке больше.

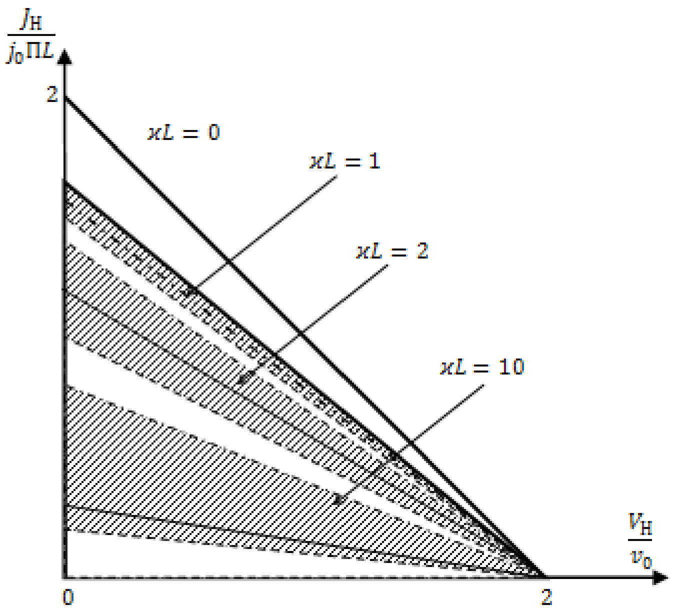

Рисунок 2. Диапазон изменения ВАХ ЭГЭ при $0\le d\le d_{\max}$ в зависимости от $\varkappa L$:

- - - - - - - - - - - - $d=d_{\max}$

-·-·-·-·-·-·-·-·- $d=0$

———————— $d=d_{\text{опт}}$

Практически используемые длины электродов определяются из соотношения $(\varkappa L)_{\text{крит}}\le 1$ (см. [2],[6]). Проведем исследование мощности ЭГЭ на максимум по параметру d от $d_{min}=0$ до $d_{max}=\frac{1}{\varkappa}$ при $c=0$ при $\varkappa L=1$, что приводит к следующим результатам таблица 1). Интересно, что максимальное значение относительной мощности на нагрузке достигается при промежуточных значениях параметра $0 < d < d_{max} = \frac{1}{\varkappa}$ (см. рис. 3).

Таблица 1

Параметры формы	$\varkappa d$	0	0.2	0.3	0.4	0.5	1
	$\varkappa c$	$\sqrt{3}$	1,423	1,262	1,097	0,927	0
Относительная мощность		0,791	0,809	0,811	0,811	0,809	0,762

При уровне электрических потерь 24% в ЭГЭ с электродами постоянного сечения, применение профилированных электродов ($\varkappa d = 0{,}3 - 0{,}4$) снижает эти потери до 19%, то есть на 5% абсолютных, или 20% относительных. Аналитическое исследование при других значениях $\varkappa L$ приводит к результатам, показанным на рисунке 3.

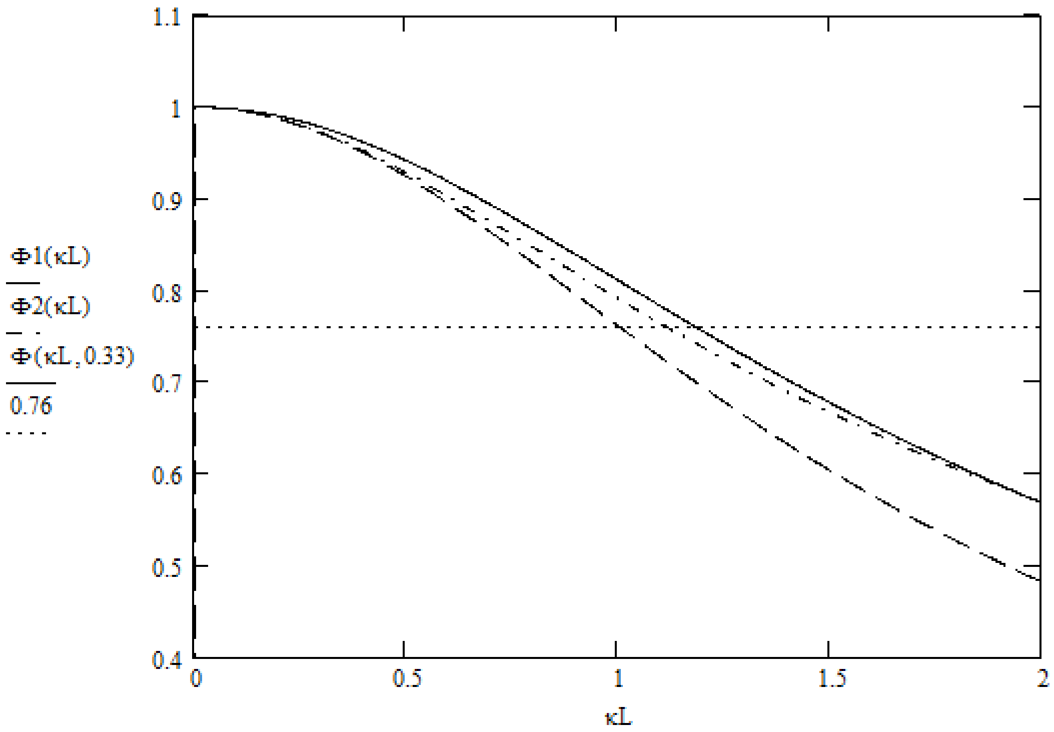

Рисунок 3. Изменение мощности ЭГЭ в зависимости от $\varkappa L$ при различных $0 \le d \le d_{\max}$:

- - - - - - - $d = d_{\max}$

-·-·-·-·- $d = 0$

——— $d = d_{\text{опт}}$

Выводы

Применение электродов переменного сечения при практически используемых значениях $(\varkappa L)_{\text{крит}} \approx 1$ снижает электрические потери на 20 % или позволяет увеличить длину электродов примерно на 20% при том же уровне электрических потерь, что представляет несомненный интерес для космических ядерных термоэмиссионных преобразователей.

Предложенный способ оптимизации электрических потерь продолжает тему поиска ресурсов для обеспечения необходимой мощности батареи низковольтных ЭГЭ, рассмотренную в ряде предыдущих работ [7], [8]. Обсуждение современного состояния и перспективных направлений применения математического моделирования в инженерных исследованиях, в том числе в области термоэмиссионных преобразователей энергии, можно найти в [9]-[11].

Список литературы

1. Лошкарев А.И., Облакова Т.В. Предельные параметры коаксиальных электрогенерирующих элементов. // Математическое моделирование и численные методы. 2015. №1. С. 7-16
2. Квасников Л.А., Кайбышев В.З., Каландаришвили А.Г. Рабочие процессы в термоэмиссионных преобразователях ядерных энергетических установок. М.: Издательство МАИ. 2001. 208 с.
3. Бондаренко В.Д., Лошкарев А.И. Аналитическая модель дугового режима и ее использование для диагностики ТЭП. // Журнал технической физики, том XLIV . Академия наук СССР. 1974. №12. С. 2529-2536.
4. Rufeh F. Experimental analysis of converter performance. // Proceedings of 3rd International Conference of Thermionic Electrical Power Generation, Vol.3, Juelich, 1972, p. 1061-1080.
5. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2001. 576 с.
6. Лошкарев А.И., Сидякин А.В. О профилировании тепловыделения по длине электрогенерирующего элемента термоэмиссионного преобразователя. // Известия Академии наук СССР. Энергетика и транспорт. М: Наука. 1968. №3. С.77-86.
7. Барышников Г.А., Левшин В.П., Лошкарев А.И. Оптимальное коммутирование низковольтных электрогенерирующих элементов с нелинейной вольтамперной характеристикой. // Известия Академии наук СССР. Энергетика и транспорт. М: Наука. 1971. № 3. С.150-154.
8. Лошкарев А.И., Облакова Т.В. Выходные параметры источника тока с последовательно-параллельным коммутированием электрогенерирующих элементов при наличии токов утечек. // Вестник МГТУ им Н.Э. Баумана. Специальный выпуск «Математическое моделирование». М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2011. С. 73-82.
9. Кайбышев В. З., Чеботарев В.И. Аналитическая модель расчета вольт-амперных характеристик термоэмиссионного преобразователя энергии. // Атомная энергия, 2012. Т. 112. № 5. С. 270-276

10. Бушуев А.Ю., Фарафонов Б.А. Математическое моделирование процесса раскрытия солнечной батареи большой площади. // Математическое моделирование и численные методы. 2014. № 2. С.101-114.
11. Александров А.А.**,** Димитриенко Ю.И. Математическое и компьютерное моделирование — основа современных инженерных наук**.** // Математическое моделирование и численные методы. 2014. № 1. С. 3-4.