

УДК 539.3

Расчет на прочность ортотропных локально нагруженных оболочек

Виноградов Ю. И.^{1,*}

[*yuvino@rambler.ru](mailto:yuvino@rambler.ru)

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Слоистые ортотропные композиционные оболочки как элементы тонкостенных конструкций, к которым предъявляется требование по весовому совершенству при малых запасах прочности, вытесняют аналогичные из других материалов. При этом не удается избежать нежелательного локального нагружения оболочек. С целью частичного решения проблемы оценки прочности по напряжениям строится алгоритм аналитического решения краевых задач для оболочек локально нагруженных по площадкам, границы которых не совпадают с их линиями главных кривизн. Приводятся результаты решения задач для цилиндрических, конических, сферических и тороидальных оболочек.

Ключевые слова: слоистые ортотропные оболочки, локальное нагружение

Введение

Слоистые композиционные оболочки, как элементы летательных аппаратов, вытесняют аналогичные из других материалов. Однако их эффективное в весовом отношении использование требует повышенного внимания при расчетах к виду нагрузки, величине и характеру распределения напряжений [1]. При этом механические характеристики, необходимые для расчетов, также определяются с учетом вида нагрузки [2]. Анализ прогрессирующего разрушения определяется с учетом концентраторов напряжений [3]. Строятся теории для анализа напряженного состояния и оценки прочности слоистых композитов [4]. Определяется стратегия и развитие композиционных и функциональных материалов [5]. Исследуются критерии разрушения образцов композитов с концентраторами напряжений [6].

Известно, что оболочки в конструкциях летательных аппаратов часто нагружены локально по малым площадкам. Возникает концентрация напряжений. Как следствие возникает проблема оценки их прочности по напряжениям в зависимости от структуры материала, формы и параметров оболочек, а также от формы площадок нагружения, границы которых не совпадают с линиями главных кривизн оболочек.

С целью частичного решения проблемы оценки прочности по напряжениям строится алгоритм аналитического решения краевых задач для локально нагруженных оболочек классических форм из ортотропных композиционных материалов.

В качестве математической модели механики деформирования слоистых ортотропных оболочек принимаются результаты работы Я.М. Григоренко и А.Т. Василенко.

Особенностями уравнений Григоренко, Василенко [7], отличающими их от аналогичных уравнений, полученных другими авторами, являются непрерывность их решений при произвольной форме меридиана, в том числе и с угловыми точками, а также то, что в уравнения не входят кривизна меридиана и производная от толщины h оболочки. Граничные условия накладываются непосредственно на основные неизвестные - перемещения и соответствующие им усилия.

1. Каноническая матричная форма дифференциальных уравнений

Рассматриваются замкнутые в окружном направлении цилиндрические, конические, сферические и тороидальные оболочки.

Используется метод Фурье разделения переменных. Поскольку физические соотношения не позволяют разделить все факторы на две группы, соответствующие симметричному (без штрихов) и антисимметричному (со штрихами) случаям относительно начала окружной координаты, то разложения всех факторов и внешней нагрузки для каждого номера n гармоники содержат $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$.

Таким образом, получается система обыкновенных дифференциальных уравнений шестнадцатого порядка в канонической матричной форме [8].

$$\mathbf{y}'(s) = A(s)\mathbf{y}(s) + \mathbf{f}(s), (*) = \frac{d}{ds}(*), \quad (1)$$

$\mathbf{y}(s) = \left\| N_x, N_z, \widehat{S}, M_z, u_x, u_z, v, \mathcal{G}_s, N'_x, N'_z, S', M'_x, u'_x, u'_z, v', \mathcal{G}'_s \right\|^T$ - столбец силовых и кинематических параметров, характеризующих состояние сечения оболочки нормального к ее оси;

$A(s) = \left\| a_{ij} \right\|^{16}$ - матрица размерности 16×16 , элементами $a_{ij} = a_{ij}(s)$, $j = 1, 2, \dots, 16$ которой являются коэффициенты разрешающей системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, записанной в канонической матричной форме;

$\mathbf{f}(s) = \left\| f_1(s), \dots, f_{16}(s) \right\|^T$ - столбец параметров внешнего поверхностного воздействия на оболочку.

Матричное уравнение (1) решается аналитически [9].

2. Математическое моделирование локальной поверхностной нагрузки

Представляет интерес рассмотреть задачи, когда оболочка подвергается локальной нагрузке по площадке, границы которой не совпадают с линиями главных кривизн.

Допустим, что граница площадки приложения нагрузки в области изменения координат s, φ ($s_0 \leq s \leq s_1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$) исходной поверхности описывается уравнением $F(s, \varphi) = 0$ для $s_1 \leq s \leq s_2, \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$. Кривая $F(s, \varphi) = 0$ допускает разбиение на отдельные участки, на которых ее уравнение может быть записано различным образом. Уравнение $F(s, \varphi) = 0$ разрешается относительно φ . Рассматриваемую кривую, ограничивающую поверхность приложения нагрузки, целесообразно представлять состоящей из двух участков, описываемых уравнениями $\varphi = f_1(s)$ и $\varphi = f_2(s)$, рис.1.

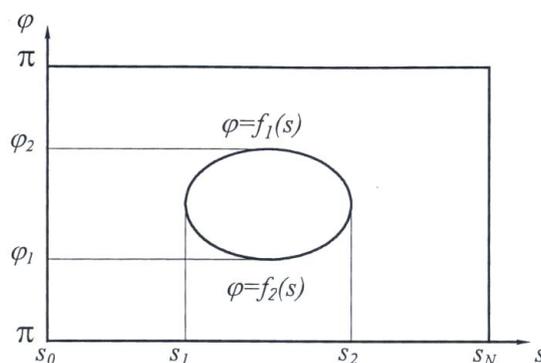


Рис. 1 Схема границы локальной нагрузки

Эти функции могут быть представлены различными выражениями для различных интервалов изменения аргумента s .

Для определения элементов столбца $f_n(S)$ правой части дифференциального уравнения (1), необходимо действующую по заданной площадке нагрузку разложить в ряд Фурье по окружной координате φ .

Приложенную нагрузку $q_x(s, \varphi)$ представляют в виде:

$$q_x(s, \varphi) = \frac{A_0(s)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n(s) \cos n\varphi + B_n(s) \sin n\varphi \right], \quad (2)$$

где коэффициенты $A_n(s)$, $B_n(s)$ определяют следующим образом

$$A_n(s) = \frac{1}{\pi} \int_{f_2(s)}^{f_1(s)} q(s, \varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad B_n(s) = \frac{1}{\pi} \int_{f_2(s)}^{f_1(s)} q(s, \varphi) \sin n\varphi d\varphi. \quad (3)$$

Очевидно, что в (3) пределы интегрирования являются функциями от s . Коэффициенты A_n , B_n зависят от меридиональной координаты s , что усложняет решение рассматриваемой задачи по сравнению со случаем, когда оболочка нагружена по площадке, ограниченной координатными линиями.

Допустим, что цилиндрическая оболочка равномерным давлением нагружена локально по эллиптической площадке ее поверхности. Мы должны разложить ее в ряд Фурье по окружной координате φ . Это обусловлено выбранным методом Фурье разделения переменных разрешающей системы дифференциальных уравнений механики деформирования замкнутых в окружном направлении оболочек.

Уравнение эллипса, ограничивающего площадку приложения нагрузки, записываем в виде:

$$\left(\frac{s}{a_m}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{b_m}\right)^2 = 1, \quad -a_m \leq s \leq a_m, \quad -b_m \leq \varphi \leq b_m. \quad (4)$$

В задачах рассматривали эллипсы с такими соотношениями полуосей a_m и b_m , чтобы их площади были равными площади круга радиуса a_0 . Это условие позволяет выразить b_m через a_m и a_0 . Из уравнения (4) эллипса следует

$$f_1(s) = b_m \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{s}{a_m}\right)^2}, \quad f_2(s) = -b_m \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{s}{a_m}\right)^2}.$$

Переходя к декартовым координатам, получаем

$$f_1(s) = R \cdot b_m \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{s}{a_m}\right)^2}, \quad f_2(s) = -R \cdot b_m \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{s}{a_m}\right)^2}.$$

Площадь круглой площадки с радиусом a_0 : $S_0 = \pi \cdot a_0^2$.

Площадь эллиптической площадки

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^{a_m} f_1(s) ds = 4 \int_0^{a_m} R b_m \sqrt{1 - \left(\frac{s}{a_m}\right)^2} ds = \frac{4Rb_m}{a_m} \int_0^{a_m} \sqrt{a_m^2 - s^2} ds = \\ &= \frac{4Rb_m}{a_m} \left[\frac{1}{2} \left(s \sqrt{a_m^2 - s^2} + a_m^2 \arcsin \frac{s}{a_m} \right) \right] \Big|_0^{a_m} = \\ &= \frac{4Rb_m}{a_m} \left[\frac{1}{2} \left(a_m \sqrt{a_m^2 - a_m^2} + a_m^2 \arcsin \frac{a_m}{a_m} \right) \right] = \frac{4Rb_m}{a_m} \frac{1}{2} a_m^2 \frac{\pi}{2} = \pi R a_m b_m. \end{aligned}$$

Приравниваем площади круга и эллипса $\pi R a_m b_m = \pi a_0^2$.

Получаем

$$b_m = \frac{1}{R} \frac{a_0^2}{a_m}.$$

3. Слоистые ортотропные локально нагруженные оболочки

Краевые задачи механики деформирования оболочек различных форм решаются мультипликативным методом [10] аналитически.

Цилиндрическая шарнирно опертая оболочка

Оболочка посередине длины нагружена по площадкам, очерченным окружностью и эллипсами, оси которых совпадают с направлениями главных кривизн.

По площадкам оболочка нагружена равномерным давлением $p = 1 \text{ МПа}$, рис.2.

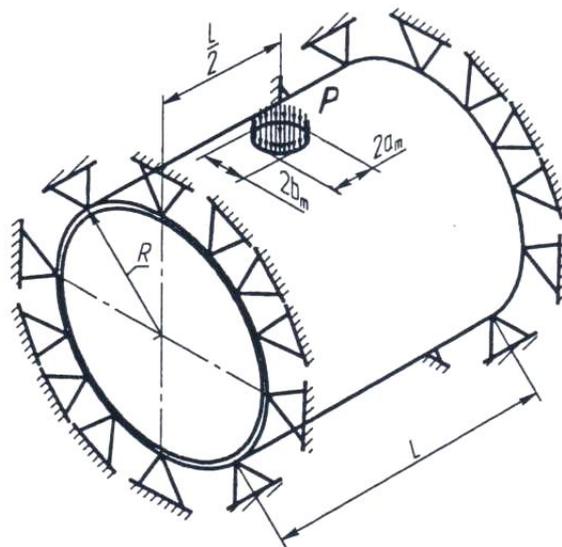


Рис. 2 Расчетная схема локально нагруженной цилиндрической оболочки

Начало координат s и φ совмещаем с центром площадки. Учитывая симметрию задачи по длине l оболочки, рассматриваем только ее половину. Половину оболочки делим по длине на интервалы $0 \leq s \leq a_m$, где она нагружена, и $a_m \leq s \leq l/2$, где нагрузка отсутствует.

На интервале $0 \leq s \leq a_m$, если ось a_m эллипса проходит через точку $\varphi = 0$, определяют коэффициенты разложения нагрузки.

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{f_2}^{f_1} p d\varphi = \frac{2p}{\pi} b_m \sqrt{1 - \left(\frac{s^2}{a_m^2}\right)} = 2 \frac{p}{\pi} \left(\frac{a_0}{a_m}\right)^2 \frac{1}{R} \sqrt{a_m^2 - s^2}, \quad n = 0;$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{f_2}^{f_1} p \cos n\varphi d\varphi = 2 \frac{p}{\pi} \frac{1}{n} \left(nb_m \sqrt{1 - \left(\frac{s^2}{a_m^2} \right)} \right) = \frac{2p}{\pi n} \sin \left[\frac{n}{R} \left(\frac{a_0}{a_m} \right)^2 \sqrt{a_m^2 - s^2} \right], \quad n \geq 1;$$

$$B_n = 0, \quad n \geq 1.$$

Коэффициенты разложения нагрузки в ряд Фурье записывают в виде:

$$q_x^c = \begin{cases} \frac{p}{\pi} \left(\frac{a_0}{a_m} \right)^2 \frac{1}{R} \sqrt{a_m^2 - s^2}, & n = 0; \\ \frac{2p}{\pi n} \sin \left[\frac{n}{R} \left(\frac{a_0}{a_m} \right)^2 \sqrt{a_m^2 - s^2} \right], & n \geq 1. \end{cases}$$

$$q_x^s = q_z^c = q_z^s = q_\varphi^c = q_\varphi^s = 0, \quad m_s^c = m_s^s = m_\varphi^c = m_\varphi^s = 0,$$

где верхний индекс с показывает, что данный коэффициент стоит при \cos в разложении нагрузки в ряд Фурье, а s - при \sin .

Механические свойства материала оболочки определяются значениями модулей упругости $E_s = 3,86E_0, E_\varphi = 0,827E_0, G_{s\varphi} = 0,414E_0$ и коэффициента Пуассона $\nu = 0,26$.

Вычислительный эксперимент выполнен для оболочки с параметрами $\frac{1}{R} = \frac{1}{2}; \frac{R}{h} = 40$ и площадки с параметрами $a_m = \frac{R}{6}, \frac{R}{12}, \frac{R}{24}; a_0 = \frac{R}{12}$.

Значение $a_m = \frac{R}{6}$ соответствует эллиптической площадке, большая ось которой параллельна оси оболочки; $a_m = \frac{R}{12}$ - круговой площадке; $a_m = \frac{R}{24}$ - эллиптической площадке, у которой малая ось параллельна оси оболочки.

На каждом из краев оболочки необходимо задать по восемь граничных условий. Рассмотрим только правую симметричную часть $\left(\frac{l}{2} \leq s \leq l \right)$ оболочки. Краевые условия следующие

- при $s=0$ (начало в точке $\frac{l}{2}$) $N_x = N_x' = 0, u_z = v = u_z' = v' = 0, \vartheta_s = \vartheta_s' = 0;$
- при $s=l/2$ (конец в точке l) $M_x = M_x' = 0, u_x = u_z = v = u_x' = u_z' = v' = 0.$

Матричные краевые условия ($Hu=r$) формируем для среднего сечения $s=0$ оболочки по длине и для ее правого края.

Ненулевые элементы матрицы $H_1(0)$ размером 8×16 - $h_{1,1} = 1, h_{2,6} = 1, h_{3,7} = 1, h_{4,8} = 1, h_{5,9} = 1, h_{6,14} = 1, h_{7,15} = 1, h_{7,16} = 1;$ а матрицы $H_k(l)$ 8×16 - $h_{1,4} = 1, h_{2,5} = 1, h_{3,6} = 1, h_{4,7} = 1, h_{5,12} = 1, h_{6,13} = 1, h_{7,14} = 1, h_{8,15} = 1.$

Коническая шарнирно опертая оболочка

Геометрические параметры оболочки, рис. 4, $-\frac{R}{h} = 40, \frac{R_1}{h} = 35, \frac{R_2}{h} = 45,$

$\frac{l}{R} = 41,231$; площадки - $a_m = R/6, R/12, R/24$; $a_0 = R/12$.

Механические свойства материала - $E_s = 3,86E_0, E_\varphi = 0,827E_0, G_{s\varphi} = 0,414E_0,$
 $\nu = 0,26.$

Функции формы оболочки

- радиус сечения оболочки, нормального к ее оси,

$$r(s) = R_1 + s \cos(\alpha(s)), \quad 0 \leq s \leq l;$$

- угол наклона образующей оболочки к ее оси

$$\alpha(s) = \arctg\left(\frac{R}{R_2 - R_1}\right), \quad 0 \leq s \leq l.$$

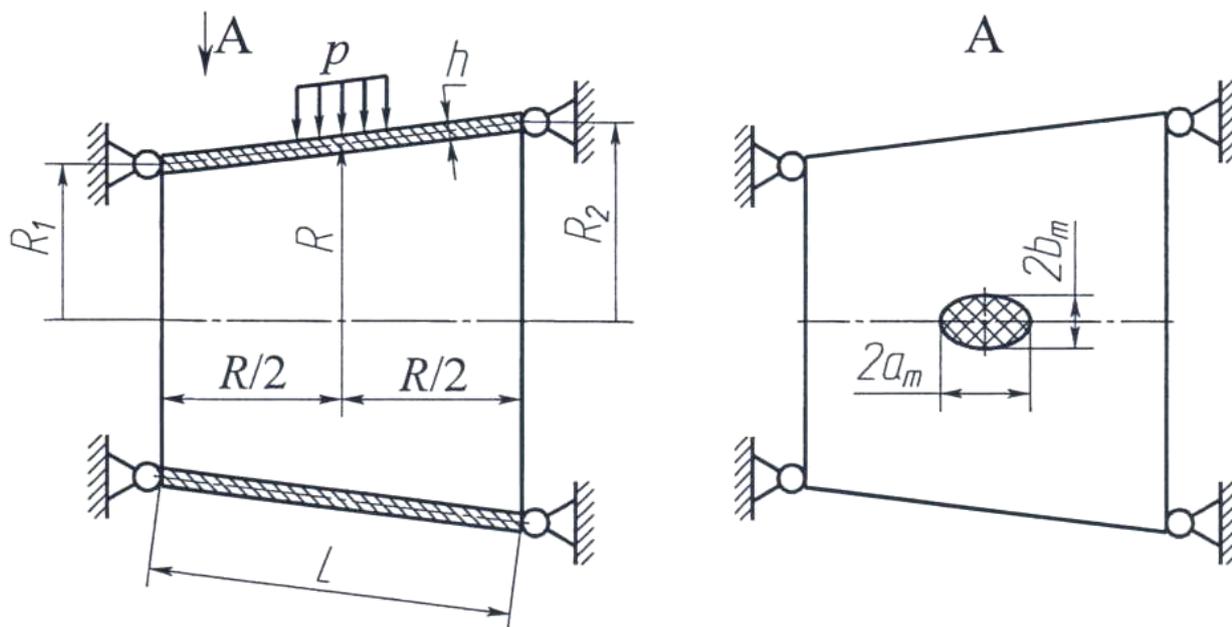


Рис. 4 Расчетная схема локально нагруженной конической оболочки

На рис.5 приведены графики изменения нормальных напряжений в направлении оси у внешней σ_s^+ и у внутренней σ_s^- поверхностей оболочки при $\varphi=0$, т.е. для нулевой образующей.

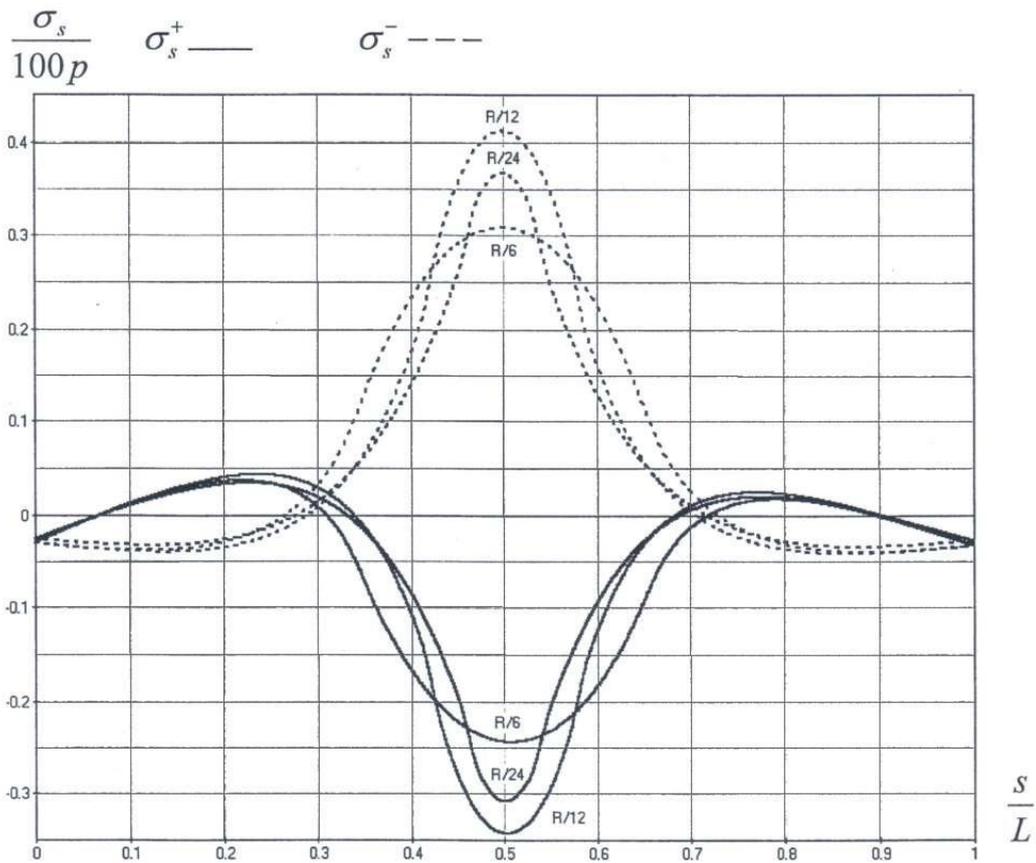


Рис. 5 Изменение нормальных напряжений вдоль образующей ($\varphi = 0$) конической оболочки: σ_s^+ – у внешней, σ_s^- – у внутренней поверхности оболочки

Сферическая шарнирно опертая оболочка

Параметры сферической оболочки, показанной на рис. 6, - $\frac{R}{h} = 44,721$; $\frac{R_1}{h} = 40$, $\frac{l}{h} = 41,467$. Параметры площадки - $a_m = R_1 / 6$, $R_1 / 12$, $R_1 / 24$; $a_0 = R_1 / 12$.

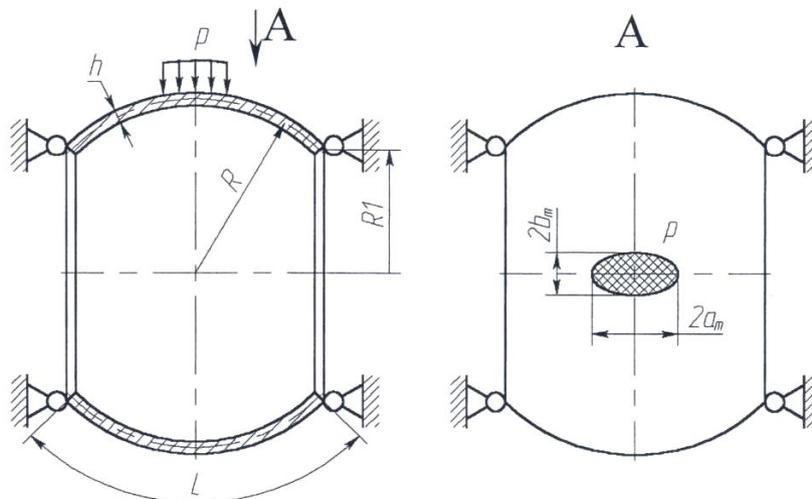


Рис. 6 Расчетная схема локально нагруженной сферической оболочки

Механические свойства материала оболочки как у конической.

Функции формы оболочки:

- радиус сечения оболочки, нормального к ее оси,

$$r(s) = R_1 + \sin(\alpha(s)), \quad 0 \leq s \leq l;$$

- угол наклона образующей оболочки к ее оси

$$\alpha(s) = \arcsin\left(\frac{R_1}{R}\right) + \frac{s}{R}, \quad 0 \leq s \leq l.$$

На рис. 7 приведены графики изменения нормальных напряжений в меридиональном направлении у внешней σ_s^+ и у внутренней σ_s^- поверхности оболочки для нулевой образующей.

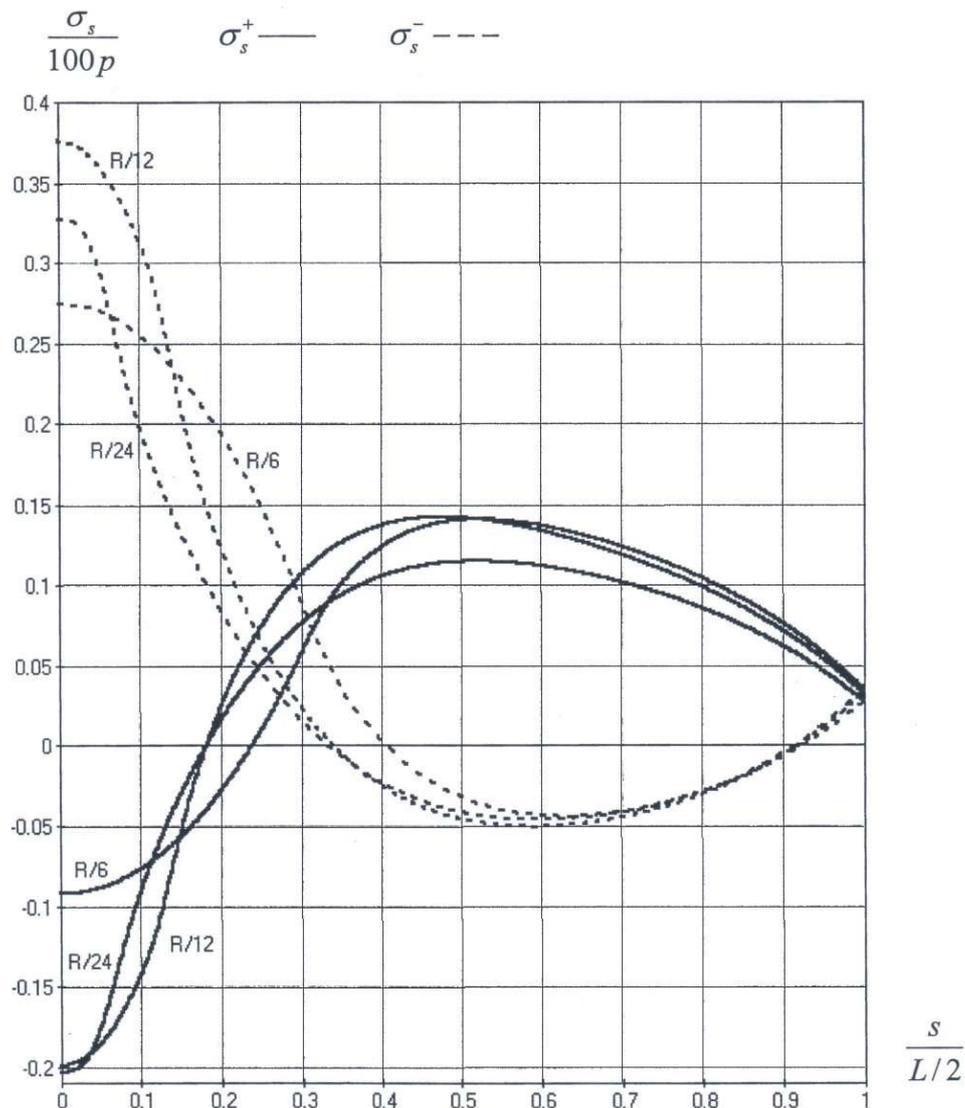


Рис. 7 Изменение нормальных напряжений вдоль меридиана ($\varphi = 0$) сферической оболочки: σ_s^+ — у внешней, σ_s^- — у внутренней поверхности оболочки

Тороидальная шарнирно опертая оболочка.

Оболочка показана на рис. 8. Ее параметры - $\frac{R_1}{h} = 40$; $\frac{R_2}{h} = 40$; $\frac{l}{h} = 62,832$.

Параметры площадки - $a_m = R_1/6$, $R_1/12$, $R_1/24$; $a_0 = R_1/12$.

Механические свойства материала оболочки как у конической.

Функции формы оболочки

- радиус сечения оболочки, нормального к ее оси,

$$r(s) = R_1 + \frac{R_1}{2} \sin(\alpha(s)), \quad 0 \leq s \leq l;$$

- угол наклона образующей оболочки к ее оси

$$\alpha(s) = \frac{s}{R_1/2}, \quad 0 \leq s \leq l.$$

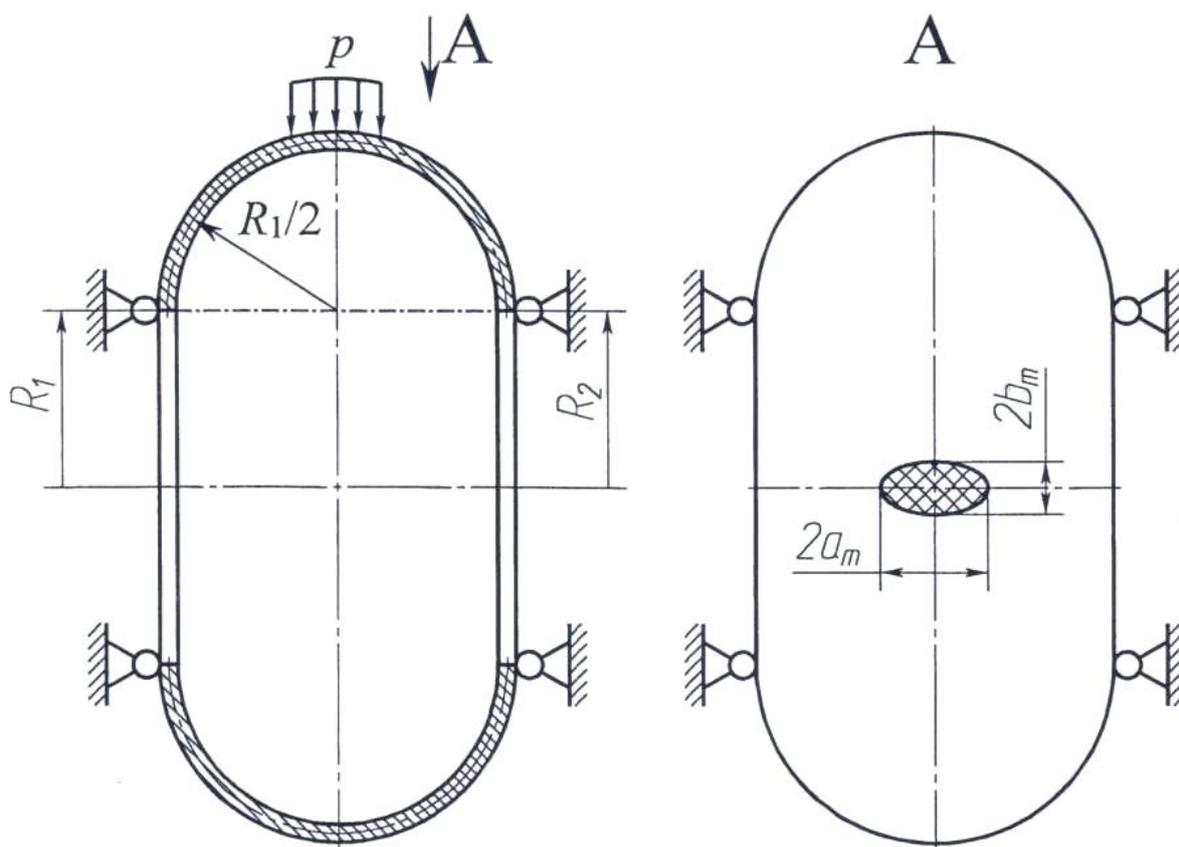


Рис. 8 Расчетная схема локально нагруженной тороидальной оболочки

Результаты решения краевой задачи показаны в виде графиков на рис. 9.

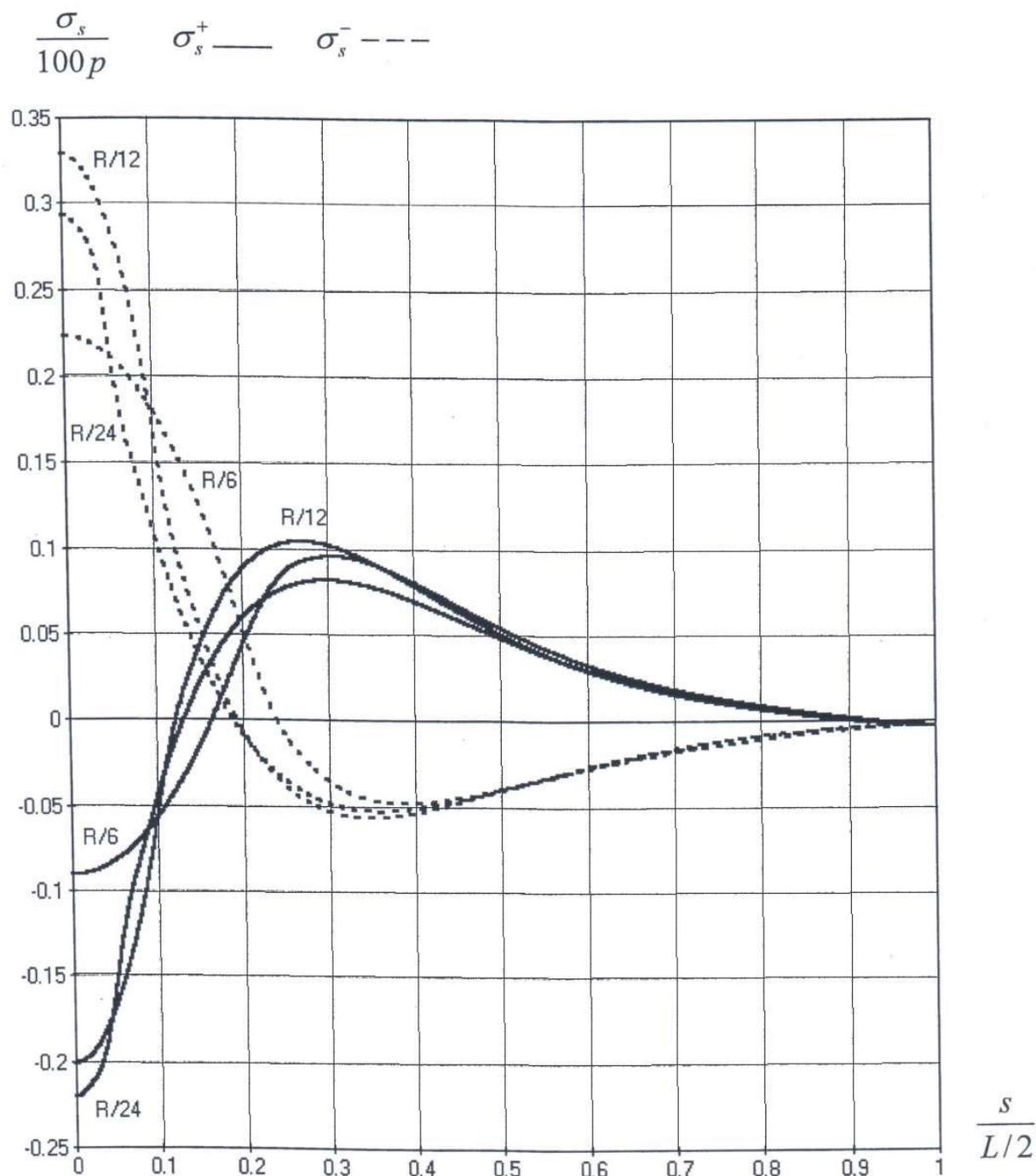


Рис. 9 Изменение нормальных напряжений вдоль образующей ($\varphi = 0$) тороидальной оболочки: σ_s^+ – у внешней, σ_s^- – у внутренней поверхности оболочки

Цилиндрическая шарнирно опертая оболочка

Расчетная схема задачи показана на рис.10. Оболочка шарнирно неподвижно закреплена по краям; нагружена по эллиптической площадке и площадке, очерчивающей эллипс линиями главных кривизн. Геометрические параметры оболочки и механические

свойства ее материала как и в предыдущей задаче. Геометрические параметры эллиптической площадки - $a_m = R/24$ и $b_m = \frac{1}{R} \frac{a_0^2}{a_m}$, где $a_0 = R/12$.

Учитывая симметрию по длине, рассматривалась только половина оболочки.

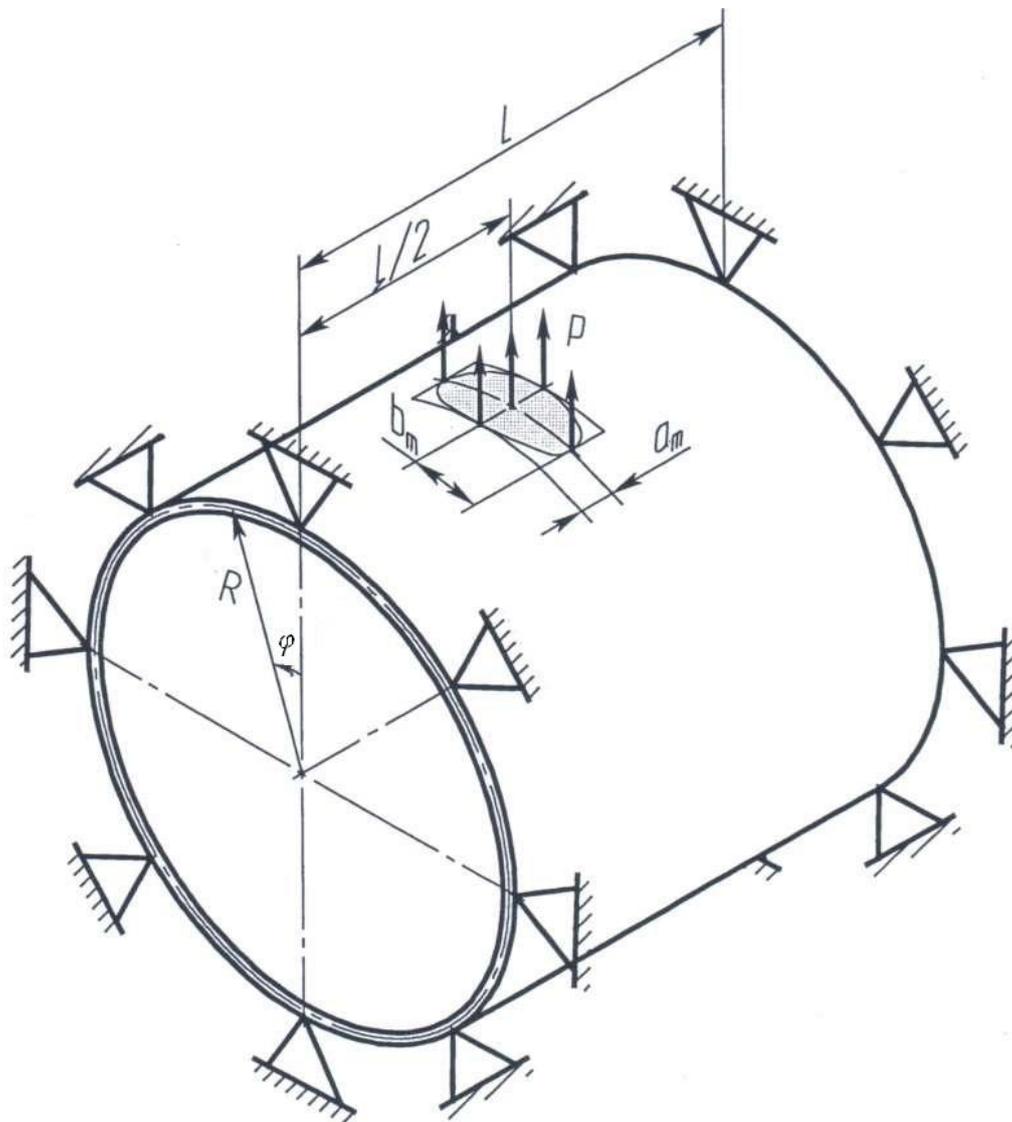


Рис. 10 Расчетная схема локально нагруженной цилиндрической оболочки

На интервале $0 \leq s \leq a_m$, где есть поверхностная нагрузка, очерченная линиями главных кривизн, коэффициенты разложения ее в ряды Фурье имеют вид:

$$A_0 = \frac{2p}{\pi} b_m, \quad n = 0; \quad A_n = 2 \frac{p}{\pi n} \sin(nb_m), \quad B_n = 0, \quad n \geq 1.$$

Результаты решения в виде графиков для нулевой образующей показаны на рис. 11 и рис. 12 для $\varphi = 0$, $\varphi = b_m/2R$ и $\varphi = b_m/R$.

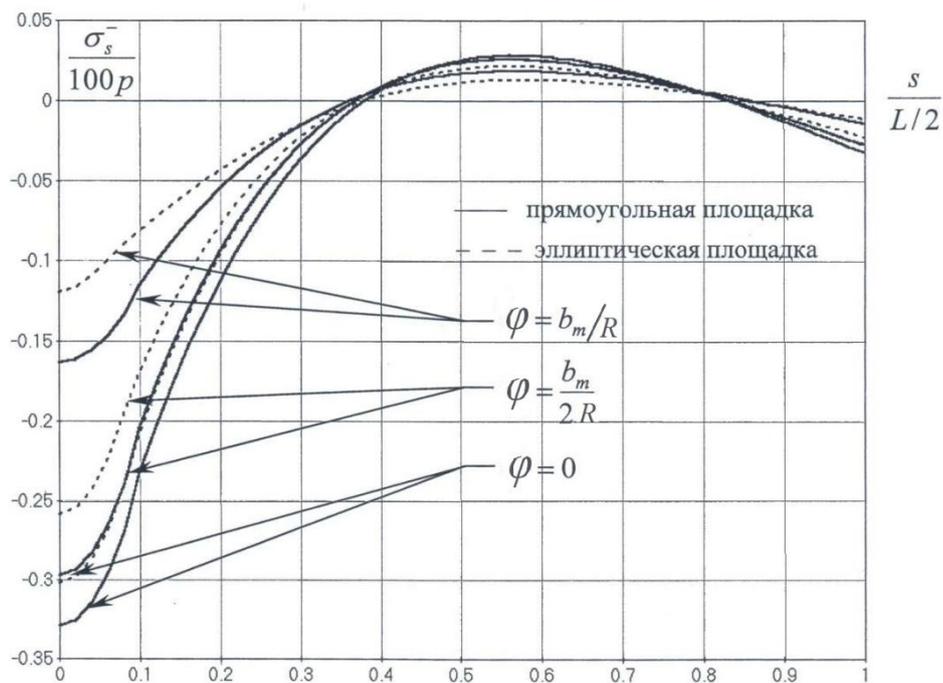


Рис. 11 Изменение нормальных напряжений вдоль образующих ($\varphi = 0$, $\varphi = \frac{b_m}{2R}$, $\varphi = \frac{b_m}{R}$) цилиндрической оболочки у внутренней поверхности оболочки

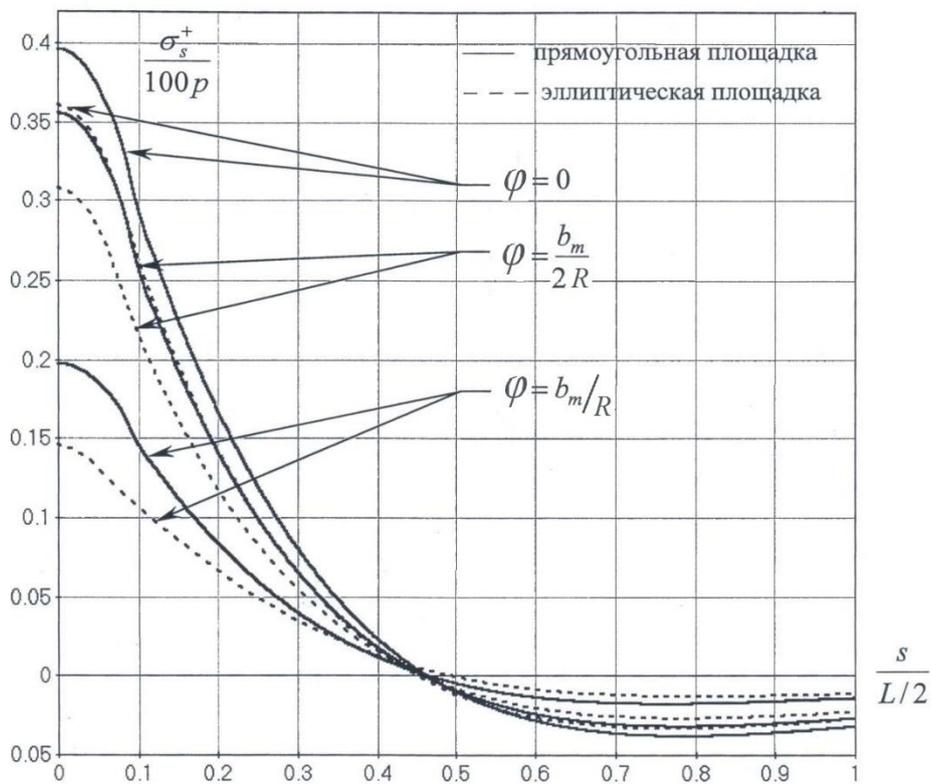


Рис. 12 Изменение нормальных напряжений вдоль образующих ($\varphi = 0$, $\varphi = \frac{b_m}{2R}$, $\varphi = \frac{b_m}{R}$) цилиндрической оболочки у внешней поверхности оболочки

Выводы

Построен и реализован алгоритм аналитического решения задач прочности локально нагруженных слоистых ортотропных оболочек классических форм.

Выполненный параметрический анализ показал существенное влияние формы и размеров площадок нагружения, а также формы и параметров оболочек на величину возникающих в них напряжений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №15 – 08 – 99591)

Список литературы

1. Афанасьев А.В., Нгуен Д.К., Соляев Ю.О., Рабинский Л.Н., Дудченко А.А. Моделирование влияния параметров вискеризации волокон на остаточное напряженно-деформированное состояние слоистых композитов // Механика композиционных материалов и конструкций. 2014. Т. 20, № 3. С. 333-342.
2. Леоне М., Аиелло М.А., Раметта Р., Раганато У. Механические характеристики термопластичного слоистого композита с отверстием, нагружаемого через штифт // Механика композитных материалов. 2014. Т. 50, № 1. С. 71-91.
3. Чэнь С., Ли Чж., Ван Х. Анализ прогрессирующего разрушения слоистого композита со сквозным отверстием с помощью s – версии конечных элементов // Механика композитных материалов. 2014. Т. 50, № 3. С. 397-418.
4. Беккер В. Теории для анализа напряженного состояния и оценки прочности слоистых конструкций // Механика композитных материалов. 2014. Т. 50, № 5. С. 759-771.
5. Гращенков Д.В., Чирсова Л.В. Стратегия и развитие композиционных и функциональных материалов // Авиационные материалы и технологии. 2012. № 8 (Юбилейный научно-технический сборник: приложение к журналу). С. 231-241.
6. Гришин В.И., Глебова М.А., Беспалов В.А., Гоцелюк Т.Б. Исследование критериев разрушения композиционных образцов с концентраторами напряжений при сжатии // Механика композиционных материалов и конструкций. 2014. Т. 50, № 1. С. 58-86
7. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек. М.: Наука, 1992. 332 с.
8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966. 571 с.
9. Виноградов Ю.И. Метод решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Доклады АН. 2006. Т. 409, № 1. С. 15-18.
10. Виноградов Ю.И. Мультипликативный метод решения краевых задач теории оболочек // Прикладная математика и механика. 2013. Т. 77, вып. 4. С. 620- 628.
11. Лукасевич С. Локальные нагрузки в пластинах и оболочках: пер. с англ. и польск. М.: Мир, 1982. 542 с.

Strength Calculation of Locally Loaded Orthotropic Shells

Yu.I. Vinogradov^{1,*}

[*yuvino@rambler.ru](mailto:yuvino@rambler.ru)

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: laminated orthotropic shells, local load

The article studies laminated orthotropic cylindrical, conic, spherical, and toroidal shells, which are often locally loaded in the aircraft designs over small areas of their surfaces.

The aim of this work is to determine stress concentration in shells versus structure of orthotropic composite material, shell form and parameters, forms of loading areas, which borders do not coincide with lines of main curvatures of shells. For this purpose, an analytical computing algorithm to estimate strength of shells in terms of stress is developed. It enables us to have solution results of the boundary value problem with a controlled error. To solve differential equations an analytical method is used. An algorithm of the boundary value problem solution is multiplicative.

The main results of researches are graphs of stress concentration in the orthotropic shells versus their parameters and areas of loading lineated by circles and ellipses.

Among the other works aimed at determination of stress concentration in shells, the place of this one is defined by the analytical solution of applied problems for strength estimation in terms of shell stresses of classical forms.

The developed effective analytical algorithm to solve the boundary value problem and received results are useful in research and development.

References

1. Afanas'ev A.V., Nguen D.K., Solyaev Yu.O., Rabinskii L.N., Dudchenko A.A. The modeling of the fibres whiskering influence on the residueal stress-strain state of laminated composites. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii = Journal on Composite Mechanics and Design*, 2014, vol. 20, no. 3, pp. 333-342. (in Russian).
2. Leone M., Aiello M.A., Rametta R., Raganato U. The Mechanical Behavior of a Pin-Loaded Hole in a Thermoplastic Composite Laminate. *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 2014,

- vol. 50, no. 1, pp. 71-91. (English version: *Mechanics of Composite Materials*, 2014, vol. 50, iss 1, pp. 51-64. DOI: [10.1007/s11029-014-9392-4](https://doi.org/10.1007/s11029-014-9392-4)).
3. Chen X., Li Z., Wang H. Progressive Failure Analysis of an Open-Hole Composite Laminate by Using the S-Version Finite-Element Method. *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 2014, vol. 50, no. 3, pp. 397-418. (English version: *Mechanics of Composite Materials*, 2014, vol. 50, iss 3, pp. 279-294. DOI: [10.1007/s11029-014-9414-2](https://doi.org/10.1007/s11029-014-9414-2)).
 4. Becker W. Available Theories for an Analysis of Stresses and Assessment of Strength of Laminate Structures. *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 2014, vol. 50, no. 5, pp. 759-771. (English version: *Mechanics of Composite Materials*, 2014, vol. 50, iss 5, pp. 545-552. DOI: [10.1007/s11029-014-9443-x](https://doi.org/10.1007/s11029-014-9443-x)).
 5. Grashchenkov D.V., Chirsova L.V. Development Strategies of Composite and Functional Materials. *Aviatsionnye materialy i tekhnologii = Aviation Materials and Technologies*, 2012, no. S (app.), pp. 231-241.
 6. Grishin V.I., Glebova M.A., Bepalov V.A., Gotselyuk T.B. Research of failure criteria for composite specimens with stress concentrator at compression. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii = Journal on Composite Mechanics and Design*, 2014, vol. 50, no. 1, pp. 58-86. (in Russian).
 7. Grigorenko Ya.M., Vasilenko A.T. *Zadachi statiki anizotropnykh neodnorodnykh obolochek* [Statics tasks of anisotropic inhomogeneous shells]. Moscow, Nauka Publ., 1992. 332 p. (in Russian).
 8. Gantmakher F.R. *Teoriya matrits* [Matrix theory]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 571 p. (in Russian).
 9. Vinogradov Yu.I. Solution method for linear ordinary differential equations. *Doklady AN*, 2006, vol. 409, no. 1, pp. 15-18. (English version: *Doklady Mathematics*, 2006, vol. 74, iss. 1, pp. 480-483. DOI: [10.1134/S106456240604003X](https://doi.org/10.1134/S106456240604003X)).
 10. Vinogradov Yu.I. A multiplicative method for solving boundary problems of shell theory. *Prikladnaya matematika i mekhanika = Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, vol. 77, no. 4, pp. 620- 628. (in Russian).
 11. Lukasiewicz S. *Local Loads in Plates and Shells*. Sijthoff & Noordhoff International Publishers, 1979. (Russ. ed.: Lukasiewicz S. *Lokal'nye nagruzki v plastinakh i obolochkakh*. Transl. from Polish and English. Moscow, Mir Publ., 1982. 542 p.).