

Методика изложения теории предельных напряженных состояний Мора без использования круговой диаграммы

03, март 2015

Даниленко К. Б.^{1,*}

УДК: 539.3

¹Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

* dcb@bmstu.ru

Немецкий ученый О. Х. Мор (1835-1919) в 1882 г. предложил графическое изображение напряженного состояния (НС) и на основе этого изображения разработал в 1888 г. критерий пластичности и разрушения. Но работа не вызвала должного интереса, и ему пришлось повторно обратиться к этой теме в 1900 г. Именно этот год считается годом создания теории предельных состояний, или теории Мора.

Указанное графическое изображение НС носит название круговой диаграммы Мора (или просто «кругов Мора») и является одним из многочисленных способов (наряду, например, с эллипсоидом напряжений [1], и октаэдром напряжений [2]) визуализировать НС, то есть предложить наглядную графическую интерпретацию столь сложного физического понятия, как напряженное состояние. Математически образом НС выступает тензор напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

или, в главных напряжениях:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

причем

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (2)$$

Более подробно применение тензорного анализа к задачам механики сплошной среды описано в работе [3].

Изложение теории предельных состояний Мора традиционно, следуя методике того же самого автора, производится на основании круговой диаграммы. Этот вывод подробно представлен, например, в работах [4], [5]. Другие способы визуализации НС и некоторые критерии предельного состояния описаны в статье [6].

Однако в некоторых сокращенных курсах сопротивления материалов тема «Круговая диаграмма Мора» не излагается, что ставит перед преподавателем сложную задачу. В самом деле, круги Мора являются лишь дополнением к традиционному, математическому, изложению общей теории НС, пусть наглядным и удобным, однако без него все же можно обойтись. А вот вывести уравнение теории предельных состояний теории Мора без опоры на круговую диаграмму – задача нетривиальная, и автору не удалось найти ее решения в литературе.

Несмотря на эту «вынужденность», предлагаемый метод имеет даже ряд преимуществ по сравнению с традиционным изложением теории предельных состояний по кругам Мора.

Во-первых, он не требует такого длинного вывода, каковой сопутствует традиционному методу, и в то же время приводит к тому же самому результату. Во-вторых, студентам можно продемонстрировать еще один способ визуализации НС на плоскости (в осях $\sigma_1(\sigma_3)$, а не в осях $\tau(\sigma)$, как на круговой диаграмме). Тем более, позже, при изложении темы «Теория выносливости», подобный прием все равно используется при построении диаграммы предельных амплитуд [7] или диаграммы Вёлера [8], и студенты оказываются подготовленными к построению графиков в осях $\sigma_a(\sigma_m)$, что облегчает понимание весьма сложной диаграммы предельных амплитуд. Наконец, в четвертых, в предлагаемом методе удается обойти основной недостаток теории Мора – отсутствие круга для случая трехосного растяжения, экспериментальные результаты по которому получить крайне сложно, если вообще возможно.

Итак, изучается двухосное напряженное состояние (Рис. 1, а) с главными растягивающим σ_1 и сжимающим σ_3 напряжениями. Второе главное напряжение (1) не учитывается: оно может быть любым при соблюдении неравенств (2).

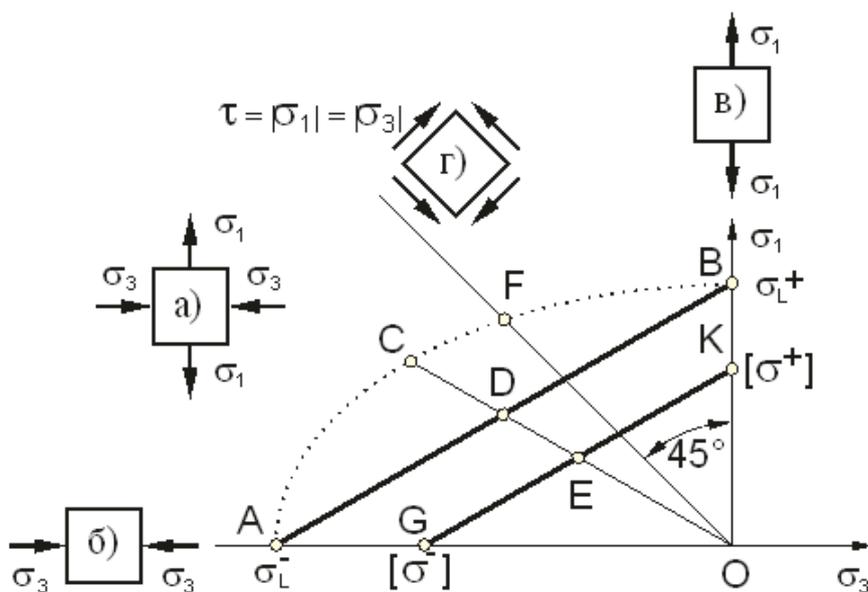


Рис.1

Таким образом, всякий луч на диаграмме, исходящий из нуля, представляет собой плоское НС с неизменным соотношением между σ_1 и σ_3 . Задаваясь этим соотношением, напряжения синхронно увеличивают от нуля (когда коэффициент запаса равен бесконечности) вплоть до наступления предельного состояния, каковым считается возникновение пластических деформаций для пластичного материала, или разрушение для хрупкого, когда коэффициент запаса обращается в единицу [9]. Достигнув предельного состояния, на диаграмме ставят точку, и проводят новое испытание с другим соотношением.

Таким образом, результаты экспериментов формируют пунктирную линию АСFB (или истинную диаграмму предельных состояний). Она аппроксимируется прямой АВ (схематизированная диаграмма). Разница между линиями на рисунке увеличена в целях наглядности.

Такая схематизация, помимо упрощения расчетов, позволяет искусственно повысить прочность. В самом деле, рассмотрим произвольный луч ОС, и на нем – рабочую точку Е, то есть точку с интересующим нас НС. Реальная точка предельного состояния – точка С, но согласно схематизации таковой считается точка D. Таким образом, реальный коэффициент запаса

$$n_L^p = \frac{|OC|}{|OE|}$$

и расчетный (схематизированный) коэффициент запаса

$$n_L^c = \frac{|OD|}{|OE|} = n_L$$

оказываются в следующем соотношении:

$$n_L^c \leq n_L^p$$

Нетрудно видеть, что коэффициент запаса искусственно занижается, что требует от расчетчика дополнительных мер по повышению прочности и, следовательно, безопасности конструкции в целом.

На диаграмме можно выделить три частных случая:

- б) НС, в котором $\sigma_1 = 0$, то есть чистое сжатие (луч ОА);
- в) НС, в котором $\sigma_3 = 0$, то есть чистое растяжение (луч ОВ);
- г) НС «чистый сдвиг», в котором $\tau = |\sigma_1| = |\sigma_3|$ (луч ОF)

Таким образом, точки А и В – предельные состояния одноосных сжатия и растяжения соответственно, поэтому напряжения в них равны предельным свойствам материала. Для обеспечения общности и коэффициент запаса, и предельные напряжения снабжаются индексом «L», от слова «limit» – предел [2]. Следовательно, диаграмму можно использовать в качестве диаграммы и пластичности, и разрушения: в первом случае полагают $n_L = n_T$, $\sigma_L^+ = \sigma_{TP}$, $\sigma_L^- = \sigma_{TC}$, во втором $n_L = n_B$, $\sigma_L^+ = \sigma_{BP}$, $\sigma_L^- = \sigma_{BC}$.

Прямая GK, проходящий через точку Е, как и любая прямая, параллельная прямой АВ, состоит из точек с равноопасными НС. Напряжения, соответствующие точкам G и K, традиционно обозначим через $[\sigma^-]$ и $[\sigma^+]$, соответственно. Выведем уравнение пря-

мой ГК. Оно имеет общий вид $\sigma_1 = k \cdot \sigma_3 + b$. Найдем координаты точек G и K и подставим их в уравнение прямой:

Координаты точки G: $\sigma_1 = 0; \sigma_3 = -[\sigma^-]$; точки K: $\sigma_1 = [\sigma^+]; \sigma_3 = 0$

Тогда для K из уравнения прямой: $[\sigma^+] = k \cdot 0 + b$, то есть $b = [\sigma^+]$

для G: $0 = -k \cdot [\sigma^-] + b = -k \cdot [\sigma^-] + [\sigma^+]$, следовательно, $k = \frac{[\sigma^+]}{[\sigma^-]}$

откуда следует

$$\sigma_1 = \frac{[\sigma^+]}{[\sigma^-]} \sigma_3 + [\sigma^+] \quad (3)$$

В предельном состоянии (прямая АВ) все напряжения больше в n_L раз, то есть в формуле (3) заменяем: $\sigma_1 \rightarrow n_L \cdot \sigma_1$, $\sigma_3 \rightarrow n_L \cdot \sigma_3$, а допускаемые напряжения переходят в предельные: $[\sigma^-] \rightarrow \sigma_L^-$, $[\sigma^+] \rightarrow \sigma_L^+$. Тогда из формулы (3) получаем:

$$n_L \cdot \sigma_1 = \frac{\sigma_L^+}{\sigma_L^-} \cdot n_L \cdot \sigma_3 + \sigma_L^+; \quad n_L \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_L^+}{\sigma_L^-} \sigma_3 \right) = \sigma_L^+; \quad n_L = \frac{\sigma_L^+}{\sigma_1 - \frac{\sigma_L^+}{\sigma_L^-} \sigma_3} \quad (4)$$

Как известно, за эквивалентное НС принимается одноосное растяжение, для которого

$$n_L^{экв} = \frac{\sigma_L^+}{\sigma_{экв}} \quad (5)$$

Условие эквивалентности:

$$n_L = n_L^{экв} \quad (6)$$

Тогда из формул (4) и (5) следует:

$$\frac{\sigma_L^+}{\sigma_{экв}} = \frac{\sigma_L^+}{\sigma_1 - \frac{\sigma_L^+}{\sigma_L^-} \sigma_3},$$

и, окончательно:

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \frac{\sigma_L^+}{\sigma_L^-} \sigma_3$$

Как уже указывалось, полученная формула в точности соответствует формуле эквивалентного напряжения, выведенной с использованием кругов Мора.

В завершение необходимо дать ряд пояснений.

Теория Мора – феноменологическая, то есть основана на экспериментальных фактах, а не на произвольных предположениях, как критерий Треска-Сен-Венана или критерий Хубера-Мизеса. Произвольные предположения все же есть: независимость от второго главного напряжения и аппроксимация экспериментальных точек прямой линией, но они не носят принципиального характера. Например, критерий Треска-Сен-Венана также не учитывает σ_2 . В 1925 г. немецкий инженер В. Лоде экспериментально доказал, что оно все же влияет на прочность, но несущественно.

А схематизация прямой, как уже указывалось, позволяет дополнительно повысить прочность.

Еще одним аргументом в пользу теории Мора является ее условие эквивалентности (6) – приравниваются коэффициенты запаса, а не какие-то посторонние величины.

Предельные напряжения в теории Мора – с одной стороны, ее самые сильные качества, потому что это единственный критерий, который их учитывает. С другой стороны, это ее главная слабость, потому что материалов, для которых есть надежные сведения по этим механическим характеристикам, не так много. От момента создания материала до точного и достоверного определения его характеристик проходит зачастую несколько лет.

Более подробно с различными теориями прочности можно ознакомиться по работе [10].

Список литературы

1. Димитриенко Ю.И., Сборщиков С.В., Беленовская Ю.В., Анискович В.А., Перевислов С.Н. Моделирование микроструктурного разрушения и прочности керамических композитов на основе реакционно-связанного SiC. // Наука и образование: электронное научно-техническое издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. - 2013, № 11. С.475-496. DOI: 10.7463/1113.0659438 Режим доступа: <http://technomag.bmstu.ru/doc/659438.html> (Дата обращения: 10.03.15)
2. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: учебник для вузов / Феодосьев В. И. - 11-е изд., стер. - М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. - 590 с.: ил. - (Механика в техническом университете: в 8 т.; т. 2).
3. Димитриенко Ю.И. Механика сплошной среды : учеб. пособие для вузов : в 4 т. / Димитриенко Ю. И. - М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011. - Т. 1 : Тензорный анализ. - 2011. - 463 с.
4. Макаров Е.Г. Сопротивление материалов на базе Mathcad. - СПб: БХВ-Петербург, 2004, 512 с.
5. Подскребко М.Д. Сопротивление материалов: учебник / М.Д. Подскребко. - Минск: Вышэйшая школа, 2007, 797 с.
6. Кузнецова М.С., Гуськов А.М. Конечно-элементное моделирование поведения гранулированных материалов при малоцикловом нагружении, // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. - 2014. № 11. С. 696–707. DOI: 10.7463/1114.0738252 Режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/738252.html> (Дата обращения: 10.03.15)
7. Кинасошвили Р.С. Сопротивление материалов. 6-е изд., перераб. – М.: Физматлит, 1960. — 388 с.

8. Арпишкин А.Ю., Мягков Л.Л. Методы оценки выносливости деталей двигателей. // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. – 2011. № 09. С. 1-13. Режим доступа: <http://technomag.bmstu.ru/doc/220368.html> (Дата обращения: 10.03.15)
9. Димитриенко Ю.И. Механика сплошной среды : учеб. пособие для вузов : в 4 т. / Димитриенко Ю. И. - М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011. - Т. 2. Универсальные законы механики и электродинамики сплошных сред. - 2011. - 559 с.
10. Димитриенко Ю.И. Механика сплошной среды : учеб. пособие для вузов : в 4 т. / Димитриенко Ю. И. - М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011. - Т. 4 : Основы механики твердых сред. - 2013. - 623 с.