электронный научно-технический журнал
ИНЖЕНЕРНЫЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51036. ISSN 2307-0595

Функция Римана для некоторых уравнений Колмогорова

12, декабрь 2014

Мастихин А. В.

УДК 519.21

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
mastihin@bmstu.ru

1. Первое уравнение Колмогорова для марковских процессов

Пусть $\xi(t) = (\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t))$, $t \in [0, \infty)$, — однородный во времени марковский процесс со счетным множеством состояний

$$N^n = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : \alpha_i = 0, 1, 2, \ldots, \quad i = 1, \ldots, n\}.$$

Обозначим переходные вероятности

$$P_{\alpha\beta}(t) = \mathbf{P}\left\{\xi(t) = \beta \mid \xi(0) = \alpha\right\}, \quad \alpha, \beta \in N^n.$$

Введем экспоненциальную (двойную) производящую функцию переходных вероятностей ($|s| \leq 1$)

$$\mathcal{F}(t; z; s) = \sum_{\alpha\beta} \frac{z^\alpha}{\alpha!} P_{\alpha\beta}(t) s^\beta$$

и линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами

$$h_k\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = \sum_{\gamma} p_\gamma^k \frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma}, \quad k = 1, \ldots, l,$$

соответствующие распределению вероятностей

$$\{p_\gamma^k \geq 0, \quad \sum_\gamma p_\gamma^k = 1; \quad p_{\varepsilon^k}^k = 0\}, \quad k = 1, \ldots, l,$$

определяемому процессом (см. [1]).

Двойная производящая функция переходных вероятностей $\mathcal{F}(t; z; s)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \mathcal{F}(t; z; s)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{l} \lambda_k z^{\varepsilon^k} \left(h_k\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) - \frac{\partial^{\varepsilon^k}}{\partial z^{\varepsilon^k}}\right) \mathcal{F}(t; z; s), \ \mathcal{F}(0; z; s) = e^{zs}, \tag{1}$$

называемому первым уравнением Колмогорова для двойной производящей функции [1].

Пусть $\gamma \in N^n$ — поглощающие состояния процесса. Вероятности попадания из состояния α в поглощающее состояние γ называются финальными вероятностями [2]. Для нахождения финальных вероятностей $q_{\alpha\gamma}$ используется производящяя функция

$$\Phi_\alpha(s) = \sum_\gamma q_{\alpha\gamma} s^\gamma, \quad |s| \leqslant 1,$$

и экспоненциальная производящая функция

$$\Phi(z; s) = \sum_\alpha \frac{z^\alpha}{\alpha!} \Phi_\alpha(s). \tag{2}$$

Рассуждая, как при доказательстве теоремы 3.1 работы [1], можно показать, что

$$\Phi(z; s) = \lim_{t \to \infty} \mathcal{F}(t; z; s)$$

и $\Phi(z; s)$ удовлетворяет стационарному первому уравнению

$$\sum_{k=1}^{l} \lambda_k z^{\varepsilon^k} \left(h_k \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) - \frac{\partial^{\varepsilon^k}}{\partial z^{\varepsilon^k}} \right) \Phi(z; s) = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим стационарные уравнения на трех примерах марковских процессов, интерпретируемых как процессы эпидемии [3].

2. Стационарные уравнения Колмогорова для процессов эпидемии

Для марковских процессов с взаимодействием частиц, таких как процессы эпидемии Вейса [4], эпидемии Гани [5] и процесса общей эпидемии Бартлетта — Мак-Кендрика [6], задача о финальных вероятностях приводит к задачам Гурса для гиперболических уравнений.

Для процесса эпидемии Вейса получаем [7] гиперболическое уравнение

$$z_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1 \partial z_2} + (\mu - z_2) \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} - \mu \Phi = 0 \tag{4}$$

с граничными условиями

$$\Phi(0, z_2; s) = e^{z_2 s}, \quad \Phi(z_1, 0; s) = e^{z_1}.$$

Для эпидемии Гани получено [8] уравнение

$$\lambda_1 z_2 \Big(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1 \partial z_3} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1 \partial z_2} \Big) + \lambda_2 z_3 \Big(\frac{\partial \Phi}{\partial z_1} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1 \partial z_3} \Big) + \lambda_3 \Big(\Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} \Big) = 0, \tag{5}$$

сводимое к гиперболическому, с граничными условиями

$$\Phi(0, z_2, z_3; s_2, s_3) = e^{z_2 s_2 + z_3 s_3}, \quad \Phi(z_1, 0, 0; s_2, s_3) = e^{z_1}. \tag{6}$$

Для процесса общей эпидемии Бартлетта — Мак-Кендрика имеем гиперболическое уравнение

$$z_1 z_2 \Big(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1 \partial z_1} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1 \partial z_2} \Big) + \mu z_1 \Big(\Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} \Big) = 0 \tag{7}$$

с граничными условиями

$$\Phi(0, z_2; s) = e^{z_2 s}, \quad \Phi(z_1, 0; s) = e^{z_1}.$$

Первые два уравнения решены методом Римана в [7] и [8], для третьего была получена функция Римана.

3. Вывод функции Римана для некоторых типов гиперболических уравнений

Для гиперболического уравнения

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = 0 \tag{8}$$

решение граничной задачи $u(x, y_0) = \varphi(y)$, $u(x_0, y) = \psi(x)$, $\varphi(x_0) = \psi(y_0)$ дается формулой [9]

$$u(x, y) = R(x, y_0; x, y)\varphi(x) + R(x_0, y; x, y)\psi(y) - R(x_0, y_0; x, y)\varphi(x_0) +$$
$$+ \int\limits_{x_0}^{x} \left[b(t, y_0)R(t, y_0; x, y) - \frac{\partial R(t, y_0; x, y)}{\partial t} \right] \varphi(t)\, dt +$$
$$+ \int\limits_{y_0}^{y} \left[a(x_0, \tau)R(x_0, \tau; x, y) - \frac{\partial R(x_0, \tau; x, y)}{\partial \tau} \right] \psi(\tau)\, d\tau, \tag{9}$$

где $R(x_0, y_0; x, y)$ — функция Римана. По определению функция Римана $R(x_0, y_0; x, y)$ для гиперболического уравнения (8) является решением сопряженного уравнения

$$L^*(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial (au)}{\partial x} - \frac{\partial (bu)}{\partial y} + cu = 0 \tag{10}$$

относительно переменных x и y.

Кроме того, требуется выполнение следующих соотношений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R(x_0, y_0; x_0, y)}{\partial y} - a(x_0, y)R(x_0, y_0; x_0, y) = 0; \\ \dfrac{\partial R(x_0, y_0; x, y_0)}{\partial x} - b(x, y_0)R(x_0, y_0; x, y_0) = 0; \\ R(x_0, y_0; x_0, y_0) = 1; \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R(x_0, y; x, y)}{\partial x_0} - a(x, y_0)R(x_0, y; x, y) = 0; \\ \dfrac{\partial R(x, y_0; x, y)}{\partial y_0} - b(x_0, y)R(x, y_0; x, y) = 0; \\ R(x, y; x, y) = 1. \end{cases}$$

Отметим еще следствия [10], вытекающие из формулы Римана.

Во-первых, решение дифференциального уравнения однозначно определяется начальными условиями.

Во-вторых, при непрерывном изменении начальных данных соответствующее решение изменяется непрерывно.

В-третьих, значение функции в точке P зависит не от всей совокупности начальных данных, а только от начальных данных вдоль части начальной кривой, вырезаемой из нее характеристиками, выходящими из точки P.

Теорема 1. Пусть $g(y)$ — непрерывная в односвязной области $D \subset \mathbb{R}$ функция, $k \in \mathbb{R}$. Тогда для гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + kg(y)u(x,y) = 0 \tag{12}$$

функция Римана имеет вид

$$R(x_0, y_0; x, y) = J_0\Big(2\sqrt{-k(x-x_0)(f(y)-f(y_0))}\Big), \tag{13}$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка; $f(y)$ — первообразная для $g(y)$ на D.

Доказательство. Так как функция $g(y)$ непрерывна на D, то она имеет на D первообразную $f(y)$ и $g(y) = f'(y)$. Уравнение (12) совпадает с сопряженным и имеет вид

$$L^*(u) = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + kf'(y)\, u(x,y) = 0,$$

Функцию Римана для уравнения $L(u) = 0$ ищем в виде ряда [11]

$$R(x_0, y_0; x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v_j(x,y)(x-x_0)^j(y-y_0)^j}{j!j!}.$$

Нулевой коэффициент, согласно [11], находится из соотношения

$$\ln v_0(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} a\,dx + b\,dy = 0, \quad v_0(x,y) = 1.$$

Интеграл берется по отрезку, соединяющему точки $(x_0; y_0)$ и $(x; y)$. В полярных координатах для точки, совпадающей с концом отрезка, $x = x_0 + r_0\cos\vartheta$, $y = y_0 + r_0\sin\vartheta$; для переменной точки из этого отрезка $X = x_0 + r\cos\vartheta$, $Y = y_0 + r\sin\vartheta$, где $\vartheta = \text{const}$, $r \in [0; r_0]$.

Рекуррентная формула для вычисления коэффициентов ряда получается при подстановке ряда в сопряженное уравнение и имеет вид [11]:

$$v_j(x,y) = -\frac{j}{r_0^j}\int\limits_0^{r_0} r^{j-1} L^*(v_{j-1}(X,Y))\,dr.$$

Так как

$$L^*(v_0) = -kf'(y) = -kg(y),$$

то

$$v_1 = -\frac{1}{r_0}\int\limits_0^{r_0}(-kf'(y))\,dr = \frac{k}{r_0}\int\limits_0^{r_0} f'(y_0 + r\sin\vartheta)\,dr =$$

$$= \frac{k}{r_0\sin\vartheta} f(y_0 + s\sin\vartheta)\Big|_0^{r_0} = \frac{k}{r_0\sin\vartheta}(f(y) - f(y_0)) = \frac{k}{y - y_0}(f(y) - f(y_0)).$$

Далее,

$$L^*(v_1) = -kg(Y)v_1 = -\frac{k^2}{Y - y_0} g(Y)(f(Y) - f(y_0)) =$$

$$= -\frac{k^2}{r\sin\vartheta} g(y_0 + r\sin\vartheta)(f(y_0 + r\sin\vartheta) - f(y_0)),$$

поэтому

$$v_2 = -\frac{2k^2}{r_0^2}\int\limits_0^{r_0}(-1)\frac{rg(Y)}{r\sin\vartheta}(f(Y) - f(y_0))\,dr =$$

$$= \frac{2k^2}{r_0^2\sin^2\vartheta}\int\limits_0^{r_0}(f(y_0 + r\sin\vartheta) - f(y_0))\,d(f(y_0 + r\sin\vartheta) - f(y_0)) = \frac{k^2}{(y - y_0)^2}(f(y) - f(y_0))^2.$$

Вычисленные v_1, v_2 составляют основание индукции по j Докажем шаг индукции, а именно, предполагая, что $v_j = \dfrac{k^j(f(y) - f(y_0))^j}{(y - y_0)^j}$, покажем, что $v_{j+1} = \dfrac{k^{j+1}(f(y) - f(y_0))^{j+1}}{(y - y_0)^{j+1}}$. Поскольку

$$L^*(v_j) = -kg(Y)v_j = -\frac{k^{j+1}}{(Y - y_0)^j} g(Y)(f(Y) - f(y_0))^j =$$

$$= -\frac{k^{j+1}}{(r\sin\vartheta)^j} g(y_0 + r\sin\vartheta)(f(y_0 + r\sin\vartheta) - f(y_0))^j,$$

заключаем, что

$$v_{j+1} = -\frac{(j+1)k^{j+1}}{{r_0}^{j+1}}\int\limits_0^{r_0}(-1)\frac{r^j g(Y)}{(r\sin\vartheta)^j}(f(Y) - f(y_0))^j\,dr =$$

$$= \frac{(j+1)k^{j+1}}{r_0^{j+1}\sin^j\vartheta}\int\limits_0^{r_0}(f(y_0 + r\sin\vartheta) - f(y_0))^j\,d(f(y_0 + r\sin\vartheta) - f(y_0)) = \frac{k^{j+1}(f(y) - f(y_0))^{j+1}}{(y - y_0)^{j+1}}.$$

Окончательно получаем функцию Римана в виде

$$R(x_0, y_0; x, y) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{v_j(x,y)(x - x_0)^j(y - y_0)^j}{j!j!} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{k^j(f(y) - f(y_0))^j(x - x_0)^j}{j!j!} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\Big(2\Big(-\dfrac{k(f(y) - f(y_0))(x - x_0)}{2}\Big)^{1/2}\Big)^{2j}}{j!j!} = J_0\Big(2\sqrt{-k(x - x_0)(f(y) - f(y_0))}\Big).$$

Заключение

Полученная функция Римана может быть использована при решении задачи финального распределения как для классической (двухмерной) эпидемии Бартлетта—Мак-Кендрика, так и и для многомерной эпидемии Гани. Отметим еще, что, пользуясь результатом групповой классификации Ли [12], можно показать, что рассмотренная задача Гурса не сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Список литературы

1. Калинкин А.В. Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием // Усп. матем. наук. 2002. Т. 57, № 2. С. 23–84.
2. Севастьянов Б.А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука. 1971. 436 с.
3. Эпидемии процесс // Математическая энциклопедия. Т. 5. М.: Советская энциклопедия. 1985. Кол. 1008.
4. Weiss G. On the spread of epidemics by carries // Biometrics. 1965. Vol. 21, № 2. P. 481–490.
5. Gani J. Approaches to the modelling of AIDS // Lecture notes in biomathematics. Vol. 86. Stochastic processes in epidemic theory. Heidelberg: Springer. 1990. P. 145–154.
6. Bartlett M.S. Some evolutionary stochastic processes // J. of Royal Statistical Society. Series B (Methodological). 1949. Vol. 11, № 2. P. 211–229.
7. Калинкин А.В. Финальные вероятности ветвящегося процесса с взаимодействием частиц и процесс эпидемии // Теория вероятн. и ее примен. 1998. Т. 43, № 4. С. 773–780.
8. Мастихин А.В. Финальное распределение для Марковского процесса эпидемии Гани // Математические заметки. 2007. Т.82, № 6. С. 873–884.
9. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1985. 312 с.
10. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
11. Copson E.T. Partial Differential Equations. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1975. 280 p.
12. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1978. 389 с.