

Применение векторного исчисления в задачах сферической геометрии

12, декабрь 2014

Панкратов В. А., Ткачева О. С.

УДК: 514.13+514.116+514.742.2

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

mathmod@outlook.com

Введение

В курсе аналитической геометрии, читаемом студентам первого курса инженерно-технических специальностей, для решения задач стереометрии используется аппарат векторной алгебры, позволяющий решать эти задачи без использования громоздких геометрических построений. Элементы векторной алгебры также находят свое применение при решении многих задач планиметрии [1]. Например, с использованием инструментария векторной алгебры достаточно просто удастся доказать свойства медиан треугольника, теоремы синусов и косинусов.

Одним из классических разделов математики является сферическая геометрия [5]. Использование векторного исчисления в сферической геометрии известно [2,6,7] и при решении задач сферической геометрии во многих случаях также позволяет обойтись без громоздких построений. Однако анализ показывает, что каждый из упомянутых источников освещает лишь отдельные вопросы, связанные с применением векторной алгебры к решению задач сферической геометрии, причем часть результатов допускает усиление и обобщение. Например, предложенная в [7] теорема, устанавливающая условия пересечения трех сферических прямых, сформулирована только для частного случая. В пособии [2] была доказана, как приложение векторного исчисления, сферическая теорема косинусов сторон. В предложенной работе применение инструментария векторной алгебры несколько расширено: приведены доказательства сферических теорем косинусов углов и сторон, а также теорема синусов.

При изучении векторной алгебры одними из базовых понятия является понятие линейной независимости векторов. Это понятие активно используется при доказательстве различных фактов в аналитической геометрии [4]. В сферической геометрии использование этого понятия также оказалось весьма плодотворным.

В работе предлагается единый подход к доказательству свойств высот, медиан и биссектрис сферического треугольника с использованием понятия линейной зависимости векторов. Также статья содержит строгое изложение основных понятий сферической геометрии с использованием инструментария векторной алгебры.

Статья может быть полезна студентам МГТУ им. Н. Э. Баумана, обучающимся по направлению подготовки «Прикладная математика» и "Математика и компьютерные науки", а также студентам других специальностей, интересующимся как возможностями применения векторной алгебры для решения различных задач, так и собственно сферической геометрией, в качестве материала для самостоятельного изучения.

1. Точки и прямые на единичной сфере

Рассмотрим сферу единичного радиуса с центром в точке O . *Большой окружностью* называют сечение этой сферы произвольной плоскостью, проходящей через точку O . Большие окружности рассматривают как *сферические прямые*.

Сфера, на которой большие окружности рассматриваются в качестве прямых, представляет собой модель неевклидовой геометрии, в которой нет параллельных (т.е. непересекающихся) прямых.

Точки на сфере будем обозначать прописными буквами латинского алфавита, а сферические прямые – строчными буквами.

Каждой точке A сферы можно сопоставить вектор $\overrightarrow{OA}$ с началом в центре сферы (точке O) и концом в точке A (рис. 1). Для обозначения указанного вектора будем использовать прописные буквы латинского алфавита в полужирном начертании. Например, точке A сопоставим вектор $\mathbf{A}$.

Заметим, что точке A можно сопоставить любой ненулевой вектор, сонаправленный с вектором $\mathbf{A}$. Обратно, любой ненулевой вектор однозначно определяет точку на сфере. Для ее нахождения нужно провести луч из точки O , для которого этот вектор является направляющим, и найти точку пересечения луча со сферой.

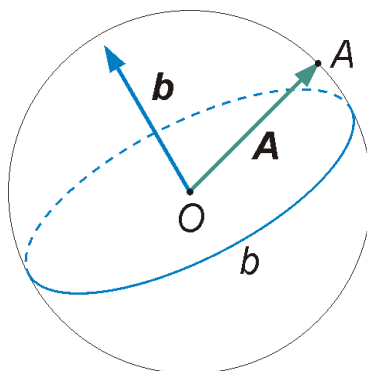


Рис. 1. Точка и прямая на сфере

Сферической прямой b сопоставляют ненулевой вектор $\mathbf{b}$, ортогональный плоскости, в которой лежит сферическая прямая (рис. 1). Начало вектора $\mathbf{b}$ помещают в центр сферы – точку O . Отметим, что направление вектора $\mathbf{b}$ и его модуль не имеют значения.

Теорема 1. Любой ненулевой вектор $\mathbf{b}$ определяет единственную сферическую прямую.

Доказательство. Каждый ненулевой вектор однозначно определяет проходящую через центр сферы плоскость, для которой он является нормальным вектором. Сферическая прямая задается как пересечение сферы и указанной плоскости. Следовательно, такая прямая единственна.

Будем говорить, что вектору $\mathbf{b}$ соответствует сферическая прямая b .

Условие принадлежности точки на сфере некоторой сферической прямой задает следующая теорема.

Теорема 2. Пусть на сфере заданы сферическая прямая b и точка A . Точка A лежит на сферической прямой b тогда и только тогда, когда соответствующие векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{b}$ ортогональны.

Доказательство. Пусть на сфере заданы некоторая прямая b и точка A , лежащая на этой прямой (рис. 2). Проведем вектор $\mathbf{A}$, соответствующий точке A . Этот вектор параллелен плоскости, в которой лежит сферическая прямая b . Вектор $\mathbf{b}$, сопоставленный сферической прямой, ортогонален этой плоскости. Следовательно, он ортогонален вектору $\mathbf{A}$.

Пусть векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{b}$ ортогональны. Предположим, что точка A не принадлежит сферической прямой b . Рассмотрим сферическую прямую b , соответствующую вектору $\mathbf{b}$. Выберем на сферической прямой b некоторую точку C так, чтобы соответствующий ей вектор $\mathbf{C}$ был неколлинеарен вектору $\mathbf{A}$. Этот вектор параллелен плоскости, в которой лежит сферическая прямая b и, следовательно, вектор $\mathbf{C}$ ортогонален вектору $\mathbf{b}$.

Поскольку векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$ неколлинеарны, то вектор $\mathbf{d} = [\mathbf{A}, \mathbf{C}]$ (векторное произведение векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$, см. [3,4]) будет ненулевым и ортогональным этим векторам. Заметим, что вектор $\mathbf{d}$ будет коллинеарен вектору $\mathbf{b}$, поскольку оба эти вектора ортогональны паре неколлинеарных векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$.

Следовательно, векторы $\mathbf{d}$ и $\mathbf{b}$ определяют одну и ту же плоскость, которая ортогональна этим векторам и проходит через точку O . Заметим, что эта плоскость определяет сферическую прямую b . Отложим от точки O вектор $\mathbf{A}$. Поскольку вектор $\mathbf{A}$ параллелен плоскости, определяющей сферическую прямую b , то точка A принадлежит этой плоскости, а следовательно, принадлежит прямой b .

Таким образом, предположение о том, что точка A не принадлежит прямой b , является неверным.

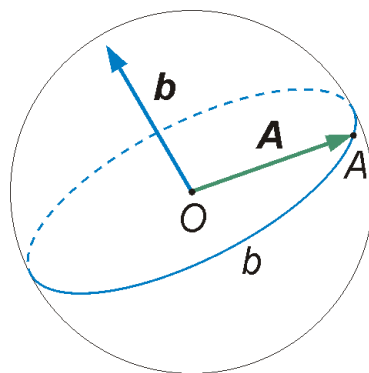


Рис. 2.

Теорема 3. Пусть $\mathbf{b}$ — некоторый ненулевой вектор, а b — соответствующая ему сферическая прямая. Тогда любому вектору $\mathbf{c} = \lambda \mathbf{b}$, где λ — ненулевое действительное число, также соответствует прямая b .

Доказательство. Знак числа λ определяет направление вектора $\mathbf{c}$: если $\lambda > 0$, то вектор $\mathbf{c}$ сонаправлен с вектором $\mathbf{b}$, если $\lambda < 0$, то вектор $\mathbf{c}$ направлен в противоположную сторону относительно вектора $\mathbf{b}$. Длина вектора $\mathbf{c}$ задается соотношением $|\mathbf{c}| = \lambda |\mathbf{b}|$ и при $\lambda \neq 0$ отлична от нуля. Поскольку векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ параллельны при любом ненулевом λ , то вектор $\mathbf{c}$ ортогонален плоскости, задающей сферическую прямую b . Согласно теореме 1, каждому вектору соответствует единственная сферическая прямая. Следовательно, ему соответствует прямая b .

Таким образом, на основании теоремы 3 сферической прямой можно сопоставить любой ненулевой вектор, ортогональный плоскости, задающей эту прямую, например, вектор единичной длины. В указанном смысле будем говорить, что сферической прямой соответствует вектор.

Приведенные теоремы 1, 2 и 3 служат теоретическим обоснованием одного из способов задания сферических прямых. Рассмотрим другой способ задания прямой на сфере.

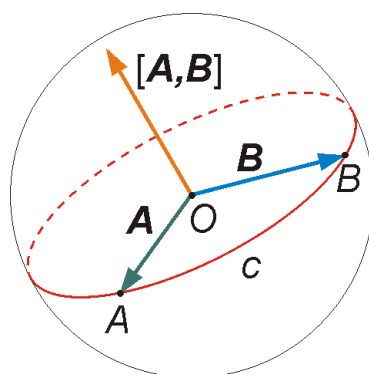


Рис. 3. Прямая, проходящая через две заданные точки

Теорема 4. Через любые две несовпадающие точки A и B , не являющиеся диаметрально противоположными, проходит единственная сферическая прямая.

Доказательство. Точкам A и B соответствуют векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ (рис. 3). Поскольку точки A , B и O не лежат на одной прямой, через них можно провести плоскость, причем единственную. Поскольку через указанные точки проходит единственная плоскость, то и соответствующая сферическая прямая определена однозначно.

Замечание. Если точки A и B являются диаметрально противоположными, то через них можно провести бесконечно много сферических прямых.

Следствие 1. Сферической прямой, проходящей через две несовпадающие точки A и B , не являющиеся диаметрально противоположными, можно сопоставить вектор $\mathbf{c} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]$.

Доказательство. Рассмотрим векторное произведение векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ (см. [3,4]). Поскольку точки A и B не совпадают и не являются противоположными, а векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ ненулевые по построению, то вектор $\mathbf{c} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ также отличен от нулевого. Этот вектор по свойству векторного произведения ортогонален плоскости, задаваемой векторами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Следовательно, его можно сопоставить сферической прямой c , проходящей через точки A и B .

В сферической геометрии нет параллельных прямых: любые две сферические прямые либо пересекаются, либо совпадают. Отметим, что если две прямые пересекаются в некоторой точке A , то они пересекаются и в диаметрально противоположной точке A' (рис. 4).

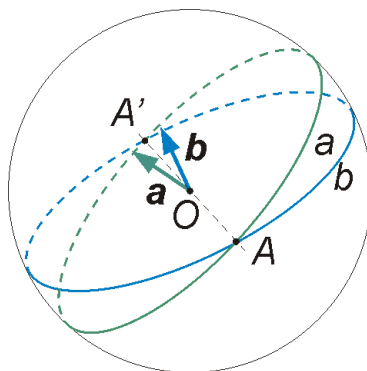


Рис. 4. Пересечение двух сферических прямых

Теорема 5. Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны, то прямые a и b пересекаются, но не совпадают.

Доказательство. Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны, а прямые a и b совпадают. Тогда одной сферической прямой (например, прямой a), соответствуют два ненулевых вектора, ортогональные одной и той же плоскости. Последнее возможно только в том случае, если эти векторы коллинеарны, что противоречит предположению теоремы.

Условие совпадения прямых задает теорема 3 — векторы, задающие эти прямые, должны быть пропорциональны.

Условия, при которых три сферические прямые пересекаются в одной точке, задает следующая теорема.

Теорема 6. Три попарно несовпадающие сферические прямые a , b и c пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда соответствующие им векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ параллельны одной плоскости (компланарны).

Доказательство. Пусть три попарно несовпадающие сферические прямые a , b и c пересекаются в одной точке D (рис. 5). Поскольку точка D принадлежит прямой a , то согласно теореме 2 векторы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{a}$ ортогональны. Из этих же соображений следует, что вектору $\mathbf{D}$ ортогональны векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Следовательно, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ параллельны одной плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{D}$.

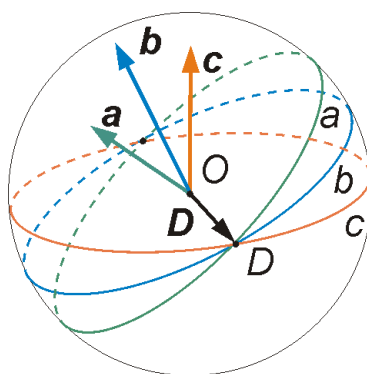


Рис. 5. Пересечение трех прямых.

Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ параллельны одной плоскости (компланарны), а соответствующие им прямые a , b и c не пересекаются в одной точке. Рассмотрим точку пересечения прямых b и c — точку D . Соответствующий этой точке вектор $\mathbf{D}$ ортогонален векторам $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Следовательно $\mathbf{D}$ ортогонален плоскости, которой параллельны векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Но этой же плоскости по условию теоремы параллелен и вектор $\mathbf{a}$. Следовательно, вектор $\mathbf{D}$ ортогонален вектору $\mathbf{a}$. Согласно теореме 2, это возможно лишь в случае, когда точка D лежит на прямой a . Таким образом, прямая a пересекается с прямыми b и c в одной точке — точке D .

Заметим, что в случае, если какие либо две из трех рассматриваемых прямых совпадают, утверждение теоремы выполняется всегда.

Согласно теореме 6, для доказательства того, что три прямые пересекаются в одной точке, нужно установить компланарность векторов, задающих эти прямые. Укажем конструктивный способ доказательства компланарности этих векторов. Поскольку три вектора компланарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы [3,4], следовательно для доказательства компланарности трех векторов достаточно показать их линейную зависимость.

2. Угол между сферическими прямыми

Рассмотрим две сферические прямые a и b , пересекающиеся в точке A . Углом между двумя сферическими прямыми называют угол между касательными к этим линиям, проведенными в точке пересечения. Для определения угла между касательными можно найти угол между векторами, параллельными этим касательным (рис. 6).

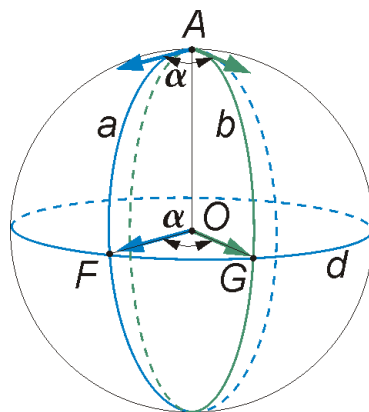


Рис. 6. Определение угла между сферическими прямыми

Напомним, что всякой сферической прямой соответствуют две точки на сфере, которые высекаются из сферы ее диаметром, перпендикулярным к плоскости этой прямой [6]. Эти точки называют *полюсами* сферической прямой, а саму прямую – *полярной* пары диаметрально противоположных точек. В силу симметрии полярю можно задать, указав одну из точек – ее полюсов.

Проведем сферическую прямую d , являющуюся полярной точки A . Если точку A рассматривать как "северный полюс" на сфере, то полярю будет "экватором". Пусть прямые a и b пересекаются с прямой d в точках F и G соответственно, причем эти точки выбраны так, чтобы угол FOG был равен наименьшему из двух углов, образованных пересечением соответствующих касательных.

Поскольку касательные, проведенные в точке A к сферическим прямым a и b , параллельны плоскости, в которой лежит сферическая прямая d , и лежат в плоскостях, содержащих сферические прямые a и b , то угол α между касательными можно найти, вычислив угол между векторами $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$. Поскольку рассматривается сфера единичного радиуса, то $|\mathbf{F}| = |\mathbf{G}| = 1$. Поэтому

$$\alpha = \arccos(\mathbf{F}, \mathbf{G}), \text{ если } (\mathbf{F}, \mathbf{G}) \geq 0,$$

$$\alpha = \pi - \arccos(\mathbf{F}, \mathbf{G}), \text{ если } (\mathbf{F}, \mathbf{G}) < 0.$$

Особую роль в различных построениях играют взаимно перпендикулярные сферические прямые, т.е. прямые, пересекающиеся под прямым углом.

Теорема 7. Сферические прямые a и b пересекаются под прямым углом тогда и только тогда, когда соответствующие им векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ортогональны.

Доказательство. Угол между двумя сферическими прямыми есть угол между плоскостями, в которых лежат эти прямые (см. рис. 6). Поскольку векторы **a** и **b** ортогональны плоскостям, в которых лежат прямые *a* и *b*, то из взаимной перпендикулярности этих прямых следует ортогональность соответствующих им векторов.

И обратно, из ортогональности векторов **a** и **b** вытекает, что угол между соответствующими прямыми *a* и *b* плоскостями – прямой. Следовательно, и сами прямые пересекаются под прямым углом.

Заметим, что по построению векторы **a** и **b** – ненулевые. Поэтому критерием перпендикулярности сферических прямых *a* и *b* является равенство нулю скалярного произведения векторов **a** и **b**: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.

Для двух сферических прямых общий перпендикуляр единственный. Им является поляр к точке пересечения этих прямых (см. рис. 6). Из соображений симметрии вытекает, что эта поляр будет одной и той же для обеих точек пересечения сферических прямых.

Если зафиксировать некоторую сферическую прямую, то все прямые, перпендикулярные к ней, пересекаются в двух диаметрально противоположных точках сферы. Эти точки являются полюсами рассматриваемой сферической прямой.

3. Сферический треугольник

Три сферические прямые, не пересекающиеся в одной точке, делят сферу на восемь областей. Каждую из этих областей, ограниченную указанными тремя сферическими прямыми, называют *сферическим треугольником*.

Точки пересечения сферических прямых называют вершинами треугольника, дуги сферических прямых, ограниченные вершинами – сторонами треугольника, а углы, образованные сторонами треугольника в его вершинах – углами сферического треугольника.

Отметим, что углом между двумя пересекающимися прямыми будем считать наименьший из двух дополняющих друг друга углов, т. е. острый. Угол при вершине треугольника не всегда равен углу между соответствующими прямыми, поскольку угол между прямыми принадлежит отрезку $[0, \pi / 2]$, в то время как угол при вершине треугольника принадлежит множеству $[0, \pi)$.

Рассмотрим один из таких сферических треугольников – треугольник *ABC* (рис. 7).

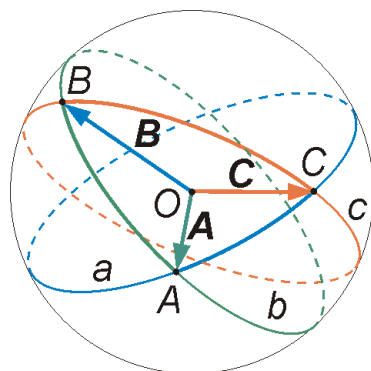


Рис. 7. Сферический треугольник

Вершинам этого треугольника можно сопоставить векторы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$. С использованием этих векторов можно получить векторы, задающие сферические прямые a , b и c , на которых лежат стороны этого треугольника:

$$\mathbf{a} = [\mathbf{A}, \mathbf{C}], \mathbf{b} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}], \mathbf{c} = [\mathbf{B}, \mathbf{C}].$$

Теперь углы треугольника ABC можно найти через углы между векторами, соответствующими сферическим прямым. При правильном выборе направлений векторов, задающих сферические прямые, углы сферического треугольника можно найти именно как углы между этими векторами.

Пусть α , β и γ – углы треугольника ABC при вершинах A , B и C соответственно.

Не нарушая общности, предположим, что вершинам рассматриваемого треугольника буквы A , B и C сопоставлены в порядке, указанном на рис. 7, то есть переход по сторонам треугольника от вершины A к B , от B к C и от C к A осуществляется по часовой стрелке.

В этом случае угол α при вершине A равен углу между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (рис. 8).

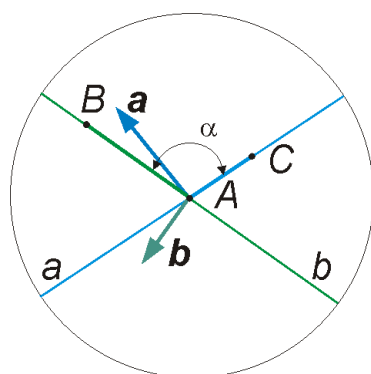


Рис. 8. Вычисление угла при вершине A .

Соответственно, угол β при вершине B может быть найден как угол между векторами $\mathbf{b}$ и $-\mathbf{c}$. Рассмотрение вектора, противоположного вектору $\mathbf{c}$, вызвано геометрическими соображениями (рис. 9).

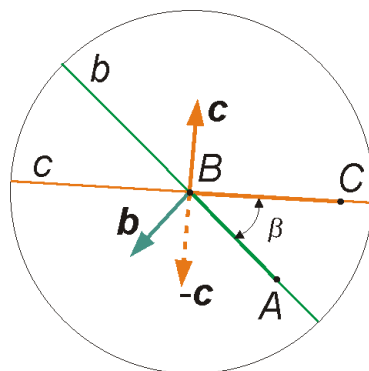


Рис. 9. Вычисление угла при вершине B .

Аналогично рассуждая, можно получить, что угол γ при вершине C определяется углом между векторами a и c (рис. 10).

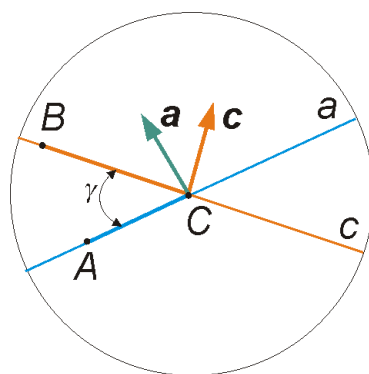


Рис. 10. Вычисление угла при вершине C .

4. Теорема о высотах сферического треугольника

Используя инструментарий векторной алгебры, покажем что в сферическом треугольнике, все углы которого отличны от прямого, высоты пересекаются в одной точке. Доказательство этого факта с использованием векторов приведено в [7]. Приведенные ниже рассуждения в целом повторяют основные этапы этого доказательства.

Отличие состоит в применении теоремы 6, которая имеет более общий характер по сравнению с результатом, использованным в [7]. Предлагаемый здесь метод рассуждений в силу его достаточно общего характера можно использовать и при доказательстве свойств медиан и биссектрис сферического треугольника.

Под пересечением в одной точке высот понимают пересечение в одной точке сферических прямых, проходящих через вершины треугольника и образующих прямые углы с прямыми, на которых лежат противоположные соответствующим вершинам стороны треугольника.

Теорема 8. В сферическом треугольнике, все углы которого отличны от прямого, сферические прямые, на которых лежат высоты, пересекаются в одной точке.

Доказательство. Рассмотрим сферический треугольник ABC и проведем через вершину A сферическую прямую h , образующую прямой угол с прямой c (рис. 11).

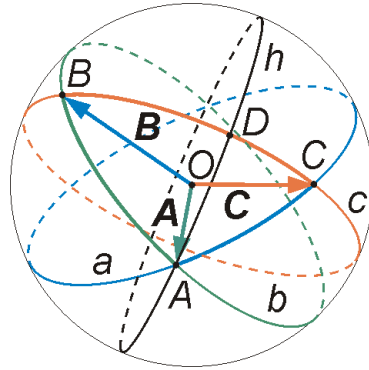


Рис. 11. Высота треугольника, опущенная из вершины A .

Согласно теореме 7, векторы, соответствующие прямым c и h , должны быть ортогональны. Заметим, что вектор $\mathbf{h} = [\mathbf{A}, \mathbf{c}]$ соответствует построенной сферической прямой h – высоте треугольника, проведенной через точку A . Действительно, вектор $\mathbf{A}$ по построению параллелен плоскости сферической прямой h . Вектор $\mathbf{c}$ также параллелен этой плоскости. Следовательно, в соответствии с определением векторного произведения, вектор $\mathbf{h}$ ортогонален каждому из векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{c}$. Следовательно, вектор $\mathbf{h}$ ортогонален плоскости сферической прямой h . Поскольку векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{c}$ – ненулевые, и не параллельны между собой, то вектор $\mathbf{h}$ также ненулевой.

Воспользовавшись равенством $\mathbf{c} = [\mathbf{B}, \mathbf{C}]$, запишем

$$\mathbf{h} = [\mathbf{A}, \mathbf{c}] = [\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]].$$

Рассуждая аналогично, для сферической прямой g , проведенной через вершину B и перпендикулярной сферической прямой a , получим вектор

$$\mathbf{g} = [\mathbf{B}, \mathbf{a}] = [\mathbf{B}, [\mathbf{A}, \mathbf{C}]],$$

а для сферической прямой f , проведенной через вершину C и перпендикулярной сферической прямой b , получим

$$\mathbf{f} = [\mathbf{C}, \mathbf{b}] = [\mathbf{C}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]].$$

Рассмотрим выражение

$$p_1 \mathbf{h} + p_2 \mathbf{g} + p_3 \mathbf{f} = \mathbf{0}.$$

С учетом найденных выражений для входящих в него векторов получим

$$p_1 [\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] + p_2 [\mathbf{B}, [\mathbf{A}, \mathbf{C}]] + p_3 [\mathbf{C}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = \mathbf{0}.$$

Примем $p_1 = p_2 = 1$, $p_3 = -1$ и воспользуемся антикоммутативностью векторного произведения: $[\mathbf{A}, \mathbf{C}] = -[\mathbf{C}, \mathbf{A}]$. В результате получим тождество Якоби [3]

$$[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] + [\mathbf{C}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] + [\mathbf{B}, [\mathbf{C}, \mathbf{A}]] = 0.$$

Следовательно, векторы $\mathbf{h}$, $\mathbf{g}$ и $\mathbf{f}$ линейно зависимы и, следовательно, компланарны [3,4]. Последнее означает, что высоты пересекаются в одной точке.

5. Теорема о медианах сферического треугольника

Медианой сферического треугольника будем называть сферическую прямую, проходящую через выбранную вершину треугольника и середину противоположной стороны. Медианой также называют дугу соответствующей сферической прямой, ограниченную вершиной треугольника и серединой противоположной стороны. Поскольку в отличие от высот треугольника точка пересечения любой пары медиан лежит "внутри" сферического треугольника, то можно не делать различий между точкой пересечения соответствующих сферических прямых и их дуг.

Для "плоских" треугольников известно свойство медиан: все медианы пересекаются в одной точке. Покажем, что аналогичным свойством обладают медианы сферического треугольника.

Теорема 9. В сферическом треугольнике медианы пересекаются в одной точке.

Доказательство. Рассмотрим медиану m сферического треугольника, проведенную через вершину A (рис. 12), которая пересекает прямую c в точке M .

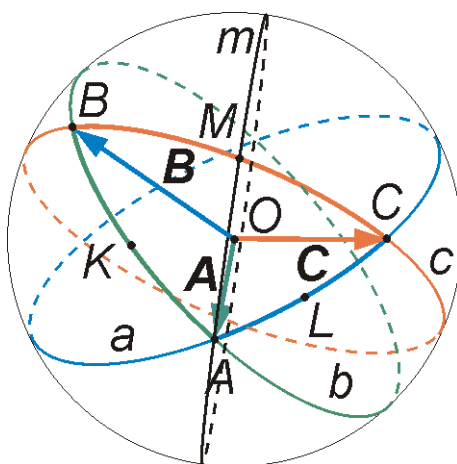


Рис. 12. Медиана треугольника, проведенная из вершины A .

Вектор $\mathbf{M}$, соответствующий точке M , лежащий на сфере единичного радиуса, задается соотношением

$$\mathbf{M} = (\mathbf{B} + \mathbf{C}) / |\mathbf{B} + \mathbf{C}|.$$

Точки A и M не совпадают, поскольку векторы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ некомпланарны. Тогда согласно следствию 1 из теоремы 4, вектор $\mathbf{m} = [\mathbf{A}, \mathbf{M}]$ соответствует сферической прямой m – медиане треугольника.

Пусть точки L и K – середины сторон сферического треугольника ABC , а сферические прямые l и k — проходящие через эти точки медианы. Этим сферическим прямым соответствуют векторы $\mathbf{l} = [\mathbf{B}, \mathbf{L}]$ и $\mathbf{k} = [\mathbf{C}, \mathbf{K}]$, где $\mathbf{L} = (\mathbf{A} + \mathbf{C}) / |\mathbf{A} + \mathbf{C}|$, $\mathbf{K} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) / |\mathbf{A} + \mathbf{B}|$.

Покажем, что найдется такой набор коэффициентов p_1 , p_2 и p_3 , что

$$p_1 \mathbf{m} + p_2 \mathbf{l} + p_3 \mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

С учетом выражений, определяющих векторы $\mathbf{M}$, $\mathbf{L}$ и $\mathbf{K}$, получим

$$p_1[\mathbf{A}, \mathbf{M}] + p_2[\mathbf{B}, \mathbf{L}] + p_3[\mathbf{C}, \mathbf{K}] = q_1[\mathbf{A}, \mathbf{B} + \mathbf{C}] + q_2[\mathbf{B}, \mathbf{A} + \mathbf{C}] + q_3[\mathbf{C}, \mathbf{A} + \mathbf{B}],$$

где $q_1 = \frac{p_1}{|\mathbf{B} + \mathbf{C}|}$, $q_2 = \frac{p_2}{|\mathbf{A} + \mathbf{C}|}$, $q_3 = \frac{p_3}{|\mathbf{A} + \mathbf{B}|}$.

Воспользовавшись свойствами дистрибутивности и антикоммутативности векторного произведения (Приложение 1) и собрав подобные члены, получим

$$\begin{aligned} q_1[\mathbf{A}, \mathbf{B}] + q_2[\mathbf{A}, \mathbf{C}] + q_2[\mathbf{B}, \mathbf{A}] + q_2[\mathbf{B}, \mathbf{C}] + q_3[\mathbf{C}, \mathbf{A}] + q_3[\mathbf{C}, \mathbf{B}] = \\ = (q_1 - q_2)[\mathbf{A}, \mathbf{B}] + (q_1 - q_3)[\mathbf{A}, \mathbf{C}] + (q_2 - q_3)[\mathbf{B}, \mathbf{C}]. \end{aligned}$$

Положим $q_1 = q_2 = q_3 = 1$. Тогда полученная сумма будет равна $\mathbf{0}$. Последнее означает, что при выборе коэффициентов

$$p_1 = |\mathbf{B} + \mathbf{C}|, \quad p_2 = |\mathbf{A} + \mathbf{C}|, \quad p_3 = |\mathbf{A} + \mathbf{B}|,$$

которые не равны нулю, $p_1\mathbf{m} + p_2\mathbf{l} + p_3\mathbf{k} = \mathbf{0}$.

Следовательно, векторы $\mathbf{m}$, $\mathbf{l}$ и $\mathbf{k}$ линейно зависимы и в следовательно компланарны. Последнее означает, что медианы пересекаются в одной точке.

6. Теорема о биссектрисах сферического треугольника

Биссектрисой сферического треугольника называют сферическую прямую, проходящую через вершину треугольника и делящую угол при этой вершине пополам. Исследуем свойства биссектрис.

Заметим, что вектор, соответствующий биссектрисе, можно получить, опираясь на векторы, соответствующие сферическим прямым, образующим стороны треугольника. При этом следует обратить внимание на проблему, указанную при вычислении углов треугольника с использованием векторного исчисления – угол между векторами, соответствующими прямым, может быть равен углу при вершине, а может быть равен дополнительному углу. Однако эту проблему можно решить за счет аккуратного выбора направлений этих векторов, как это было сделано в разделе 4.

Рассмотрим угол при вершине A сферического треугольника, приведенного на рис. 7 и воспользуемся построениями, приведенными на рис. 8. Напомним, что здесь $\mathbf{a} = [\mathbf{A}, \mathbf{C}]$, $\mathbf{b} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]$. Биссектрисе угла A (см. рис. 13) соответствует вектор

$$\mathbf{s} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}| + \mathbf{b}/|\mathbf{b}|.$$

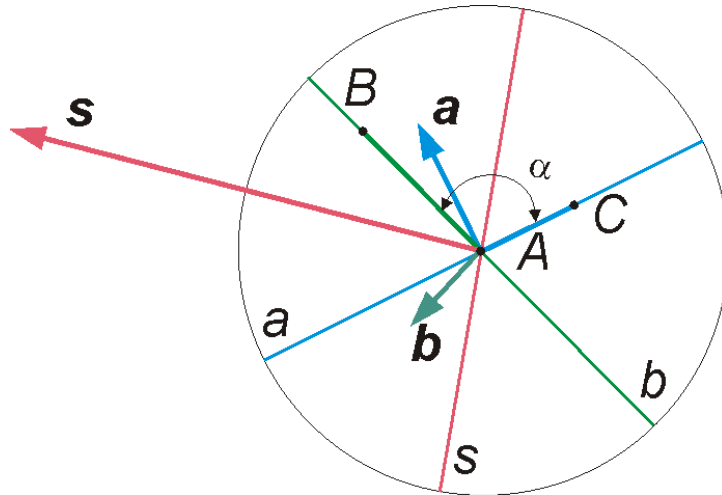


Рис. 13. Биссектриса угла при вершине A треугольника

Воспользовавшись построениями, приведенными на рис. 9 и 10, с учетом того, что $\mathbf{c} = [\mathbf{B}, \mathbf{C}]$, получим для биссектрисы $\mathbf{t}$ угла B (см. рис. 14)

$$\mathbf{t} = \mathbf{b} / |\mathbf{b}| - \mathbf{c} / |\mathbf{c}|,$$

а для биссектрисы $\mathbf{u}$ угла C

$$\mathbf{u} = \mathbf{a} / |\mathbf{a}| + \mathbf{c} / |\mathbf{c}|.$$

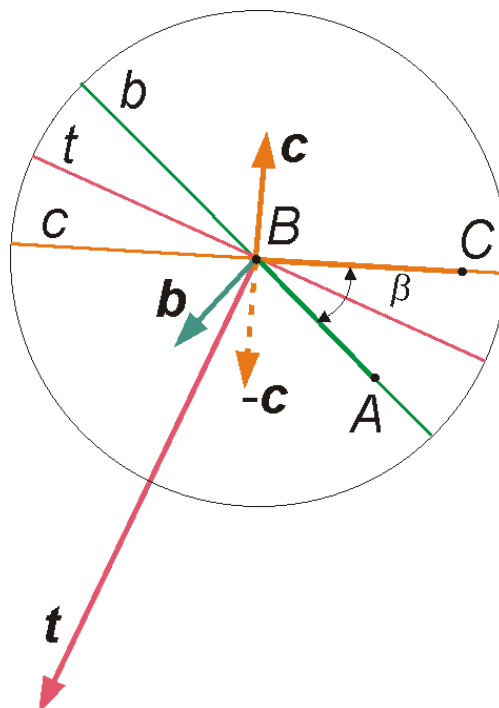


Рис. 14. Биссектриса угла при вершине B треугольника

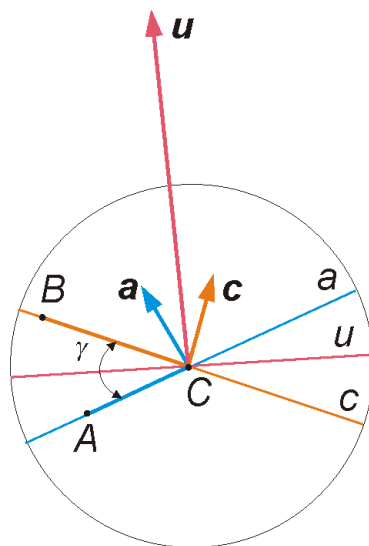


Рис. 15. Биссектриса угла при вершине C треугольника

Покажем, что найдется такой набор коэффициентов p_1 , p_2 и p_3 , что

$$p_1 \mathbf{s} + p_2 \mathbf{t} + p_3 \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Воспользовавшись выражениями для $\mathbf{s}$, $\mathbf{t}$ и $\mathbf{u}$, получим

$$\begin{aligned} p_1 \mathbf{s} + p_2 \mathbf{t} + p_3 \mathbf{u} &= \\ &= p_1(\mathbf{a}/|\mathbf{a}| + \mathbf{b}/|\mathbf{b}|) + p_2(\mathbf{b}/|\mathbf{b}| - \mathbf{c}/|\mathbf{c}|) + p_3(\mathbf{a}/|\mathbf{a}| + \mathbf{c}/|\mathbf{c}|) = \\ &= (p_1/|\mathbf{a}| + p_3/|\mathbf{a}|)\mathbf{a} + (p_1/|\mathbf{b}| + p_2/|\mathbf{b}|)\mathbf{b} + (p_3/|\mathbf{c}| - p_2/|\mathbf{c}|)\mathbf{c}. \end{aligned}$$

Примем $p_1 = -1$, $p_2 = p_3 = 1$. При таком выборе коэффициентов имеем

$$-\mathbf{s} + \mathbf{t} + \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Следовательно, векторы $\mathbf{s}$, $\mathbf{t}$ и $\mathbf{u}$ линейно зависимы и следовательно компланарны. Последнее означает, что биссектрисы сферического треугольника пересекаются в одной точке.

7. Теоремы косинусов и синусов

Теперь, пусть AB , AC и BC – стороны сферического треугольника ABC (рис. 7). Главными греческими буквами обозначим центральные углы $\mathcal{A} = \angle BOC$, $\mathcal{B} = \angle AOC$ и $\mathcal{T} = \angle AOB$ опирающиеся на дуги BC , AC и AB соответственно. Доказательство теоремы косинусов сторон схоже с выводом, предложенным в [2].

Теорема 10. Теорема косинусов состоит из двух частей:

- 1) теорема косинусов сторон $\cos \mathcal{A} = \cos \mathcal{B} \cos \mathcal{T} + \sin \mathcal{B} \sin \mathcal{T} \cos \alpha$;
- 2) теорема косинусов углов $\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \mathcal{A}$.

Доказательство.

1. Запишем скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ [3,4]

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha.$$

Так как $\mathbf{a} = [\mathbf{A}, \mathbf{C}]$, $\mathbf{b} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]$, следовательно $|\mathbf{a}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{C}| \sin \mathcal{B} = \sin \mathcal{B}$ и $|\mathbf{b}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \mathcal{T} = \sin \mathcal{T}$.

Для вычисления скалярного произведения $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ воспользуемся свойствами смешанного произведения [3,4]

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]) = ([\mathbf{a}, \mathbf{A}], \mathbf{B}).$$

Применяя формулу двойного векторного произведения [3] для вычисления

$$[\mathbf{a}, \mathbf{A}] = [[\mathbf{A}, \mathbf{C}], \mathbf{A}] = \mathbf{C}(\mathbf{A}, \mathbf{A}) - \mathbf{A}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \mathbf{C} - \mathbf{A} \cos \mathcal{B},$$

вычислим $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{B}, \mathbf{C}) - (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \cos \mathcal{B} = \cos \mathcal{A} - \cos \mathcal{T} \cos \mathcal{B}$. Подставляя полученные выражения для скалярного произведения $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и длин векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в формулу для $\cos \alpha$, получим

$$\sin \mathcal{B} \sin \mathcal{T} \cos \alpha = \cos \mathcal{A} - \cos \mathcal{T} \cos \mathcal{B},$$

откуда и следует $\cos \mathcal{A} = \cos \mathcal{B} \cos \mathcal{T} + \sin \mathcal{B} \sin \mathcal{T} \cos \alpha$.

2. Рассмотрим векторы $\mathbf{x} = [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ (рис. 9) и $\mathbf{y} = [\mathbf{c}, \mathbf{b}]$ (рис. 10), коллинеарные векторам $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$. Рассмотрим скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \cos \mathcal{A} = |[\mathbf{c}, \mathbf{a}]| |[\mathbf{c}, \mathbf{b}]| \cos \mathcal{A} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| |\mathbf{c}|^2 \sin \beta \sin \gamma \cos \mathcal{A}.$$

Но это же скалярное произведение можно представить в виде

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ([\mathbf{c}, \mathbf{a}], \mathbf{y}) = (\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{y}]).$$

Вычислим $[\mathbf{a}, \mathbf{y}]$ при помощи формулы двойного векторного произведения

$$[\mathbf{a}, \mathbf{y}] = [\mathbf{a}, [\mathbf{c}, \mathbf{b}]] = \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}),$$

следовательно

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{c}, \mathbf{c})(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - (\mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| |\mathbf{c}|^2 (\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma).$$

Приравнявая выражения для скалярного произведения $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, получим

$$|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| |\mathbf{c}|^2 \sin \beta \sin \gamma \cos \mathcal{A} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| |\mathbf{c}|^2 (\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma),$$

или $\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \mathcal{A}$.

Теорема 11. Теорема синусов

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \mathcal{A}} = \frac{\sin \beta}{\sin \mathcal{B}} = \frac{\sin \gamma}{\sin \mathcal{T}}.$$

Доказательство. Рассмотрим следующие векторные произведения

$$[\mathbf{a}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] = \mathbf{B}(\mathbf{a}, \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{a}, \mathbf{B}),$$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{a}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = \mathbf{A}(\mathbf{a}, \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\mathbf{a}, \mathbf{A}),$$

$$[\mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{b}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] = \mathbf{B}(\mathbf{b}, \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{b}, \mathbf{B}).$$

Поскольку $\mathbf{a} = [\mathbf{A}, \mathbf{C}]$, $\mathbf{b} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]$, $\mathbf{c} = [\mathbf{B}, \mathbf{C}]$, из определения векторного произведения следует

$$[\mathbf{a}, \mathbf{c}] = -\mathbf{C}(\mathbf{a}, \mathbf{B}) = -\mathbf{C}([\mathbf{A}, \mathbf{C}], \mathbf{B}),$$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{A}(\mathbf{a}, \mathbf{B}) = \mathbf{A}([\mathbf{A}, \mathbf{C}], \mathbf{B}),$$

$$[\mathbf{b}, \mathbf{c}] = \mathbf{B}(\mathbf{b}, \mathbf{C}) = \mathbf{B}([\mathbf{A}, \mathbf{B}], \mathbf{C}).$$

Вычислим модули приведенных векторных произведений, с учетом свойств смешанного произведения [3,4]

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{c}]| = |\mathbf{a}| |\mathbf{c}| \sin \gamma = \sin \mathcal{B} \sin \mathcal{A} \sin \gamma = |\mathbf{C}| |([\mathbf{A}, \mathbf{C}], \mathbf{B})| = |([\mathbf{A}, \mathbf{B}], \mathbf{C})|,$$

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \alpha = \sin \mathcal{B} \sin \mathcal{T} \sin \alpha = |\mathbf{A}| |([\mathbf{A}, \mathbf{C}], \mathbf{B})| = |([\mathbf{A}, \mathbf{B}], \mathbf{C})|,$$

$$|[\mathbf{b}, \mathbf{c}]| = |\mathbf{b}| |\mathbf{c}| \sin \beta = \sin \mathcal{T} \sin \mathcal{A} \sin \beta = |\mathbf{B}| |([\mathbf{A}, \mathbf{B}], \mathbf{C})| = |([\mathbf{A}, \mathbf{B}], \mathbf{C})|.$$

Приравнивая выражения для модуля смешанного произведения $|([\mathbf{A}, \mathbf{B}], \mathbf{C})|$, получим

$$\sin \mathcal{B} \sin \mathcal{A} \sin \gamma = \sin \mathcal{B} \sin \mathcal{T} \sin \alpha = \sin \mathcal{T} \sin \mathcal{A} \sin \beta, \text{ откуда следует } \frac{\sin \alpha}{\sin \mathcal{A}} = \frac{\sin \beta}{\sin \mathcal{B}} = \frac{\sin \gamma}{\sin \mathcal{T}}.$$

Заключение

Проведенные исследования показали, что благодаря применению аппарата векторного исчисления можно достаточно просто и наглядно доказывать различные утверждения сферической геометрии, касающиеся пересечения трех прямых в одной точке.

При этом использование линейной зависимости трех векторов в качестве критерия их компланарности оказалось очень удобным и позволило найти оригинальные доказательства свойств медиан и биссектрис сферического треугольника, а также провести доказательство свойств высот с более общих позиций. Формализм векторного, скалярного и смешанного произведений позволяет получить прозрачные доказательства сферических теорем синусов и косинусов. При этом все доказательства удалось построить на основе единого подхода, использующего векторную алгебру.

Также предложенная работа полезна для освоения приложений векторного исчисления к решению геометрических задач.

Список литературы

1. Арутюнян Г.В., Марчевская Е.В., Марчевский И.К. Элементарная геометрия. Методы решения задач: учеб. пособие. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 222 с.
2. Горбунов А.В. Российская научная школа-семинар «Академия юных»: методическое пособие по курсу «Алгебра, геометрия и теория чисел» мастер-класса «Прикладная математика и математическое моделирование». М.: РОО «НТА «АПФН», 2011. 28 с.
3. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Аналитическая геометрия: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. 388 с.
4. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Аналитическая геометрия: Конспект лекций для студентов 1-го курса всех специальностей, кроме ФН, ИБМ, ГУИМЦ, ИУ7, ИУ9, РК6, АКФ3. URL: <http://mathmod.bmstu.ru/Docs/Eduwork/ag/AGall.pdf> (дата обращения: 01.12.2014).

5. Панов В.Ф. Математика древняя и юная/ Под ред. В.С. Зарубина. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 656 с.
6. Розенфельд Б.А. Основные понятия сферической геометрии и тригонометрии // Энциклопедия элементарной математики. Книга четвёртая: геометрия / Под ред. П. С. Александрова, А.И. Маркушевича, А. Я. Хинчина (ред. книги В. Г. Болтянский, И. М. Яглом). М.: ГИФМЛ, 1956. С. 518-558.
7. Скопенков М.Б. Теорема о высотах треугольника и тождество Якоби // Математическое просвещение. 2007. Сер. 3, вып. 11. С. 79-89.