

Структурный анализ волновой зубчатой передачи

12, декабрь 2014

Тимофеев Г. А., Мартынова А. В.

УДК: 621.833.7

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

Alexandrai@mail.ru

Введение

Волновые зубчатые передачи (ВЗП) за последние 50 лет получили очень широкое распространение в авиационной и космической приводной технике, в электромеханических приводах промышленных роботов и различных станков. Это объясняется высокими качественными показателями ВЗП: малой кинематической погрешностью, высокой крутильной жесткостью и КПД, малыми габаритами и массой. При неграмотном проектировании ВЗП, как и других зубчатых передач, могут возникнуть избыточные связи, наличие которых уменьшает КПД, увеличивает статические моменты трогания и кинематическую погрешность передач. Для получения наилучших показателей ВЗП нужно определить в конструкции наличие избыточных связей и устранить их, то есть синтезировать самоустанавливающийся механизм. Для этого в работе используется один из современных методов структурного анализа – метод графов. Этот метод позволяет найти контуры с избыточными связями и целенаправленно устранить их. В самоустанавливающихся механизмах с ВЗП КПД и долговечность значительно выше, чем в ВЗП с избыточными связями, а кинематическая погрешность и статический момент трогания ниже.

1. Постановка задачи

При проектировании механизмов машин необходимо исследовать имеющуюся структурную схему на самоустанавливаемость (наличие избыточных связей) [1].

Применение механизмов не имеющих избыточных связей (самоустанавлиющихся механизмов), позволяет получить ряд существенных преимуществ [1]:

- расширяются допуски на изготовление звеньев механизмов, уменьшаются зазоры в кинематических парах (КП) и зацеплениях, чему способствует самоустановка звеньев;
- уменьшается чувствительность к изменению размеров, что очень важно для механизмов, работающих в широком температурном диапазоне;

- уменьшается трение и увеличивается КПД из-за существенного уменьшения натягов в кинематических парах независимых контуров.

Исследованию структуры механизмов посвящено множество работ [1-18], среди которых много научных работ основоположника теории проектирования самоустанавливающихся механизмов профессора МГТУ им. Н.Э. Баумана Решетова Л.Н. [1, 2 и др.] и его учеников [15].

Так, в справочнике Л.Н. Решетова "Самоустанавливающиеся механизмы" исследуются на наличие избыточных связей несколько схем волновых зубчатых механизмов с дисковым генератором волн. Более современным и строгим в использовании является метод, разработанный Л.А. Павловой на базе общей теории графов [3], который основан на анализе независимых контуров механизма и их взаимодействия. Для исследуемого механизма составляется его математическая модель – граф. В графе механизма n звеньев образуют множество вершин, а p кинематических пар (КП) – множество ребер. Класс и вид КП характеризуется матрицей, состоящей из трех элементов (f'' , f' , f'''), где f'' – угловые, f' – линейные, f''' – винтовые подвижности. Число ребер между вершинами кратно числу пар, которыми связаны рассматриваемые звенья.

В гибких звеньях одна часть звена имеет подвижность относительно другой части. На графе механизма это отражается наличием петли, соединяющей вершину саму с собой. Петля – условная кинематическая пара, характеризующая подвижность гибкого звена. Граф, допускающий наличие петель и кратных ребер, называется псевдографом.

2. Этапы структурного анализа в методе графов

Рассмотрим этапы структурного анализа в методе графов на примере волнового редуктора с дисковым генератором волн и неподвижным жестким колесом (рис.1). Стойка – неподвижное звено – состоит из жесткого колеса 5 и корпуса 5'. При структурном анализе будем обозначать неподвижное звено цифрой 5.

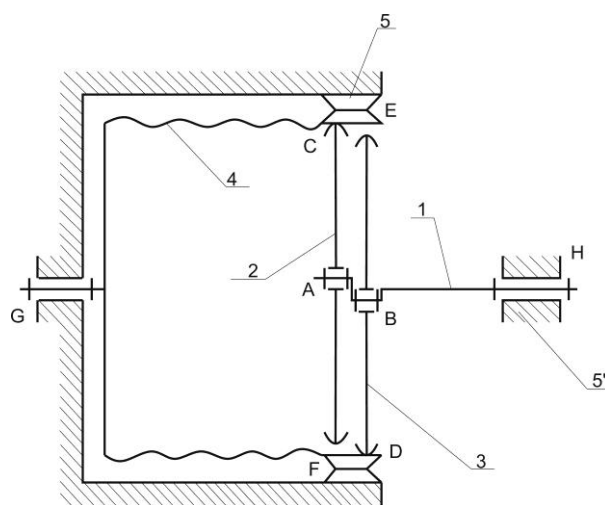


Рис.1 - Структурная схема волнового редуктора. На схеме: 1 - ведущий вал генератора волн, 2,3 – деформирующие диски, 4 – гибкое колесо с жестким дном, 5 – неподвижное жесткое колесо, 5' – корпус.

Выделим кинематические пары механизма (таблица 1).

Таблица 1 – Кинематические пары волнового редуктора

№	Звенья, входящие в КП	Обозначение КП	Подвижность КП
1	1-2	$A_{1вр} (V_2)$	100
2	1-3	$B_{1вр} (V_2)$	100
3	2-4	$C_{5точ} (I_2)$	320
4	3-4	$D_{5точ} (I_2)$	320
5	4-5	$E_{4лин} (II_2)$	220
6	4-5	$F_{4лин} (II_2)$	220
7	4-5	$G_{1вр} (V_2)$	100
8	1-5	$H_{1вр} (V_2)$	100

Гибкое колесо 4 деформируется двухдисковым генератором волн. На каждый прогиб приходится по две линейные подвижности. Эти подвижности одной части гибкого колеса относительно другой на графе отразятся четырьмя петлями.

Структурный анализ состоит из девяти этапов.

- 1) По структурной схеме составляется (n,p) - граф механизма (рис.2).

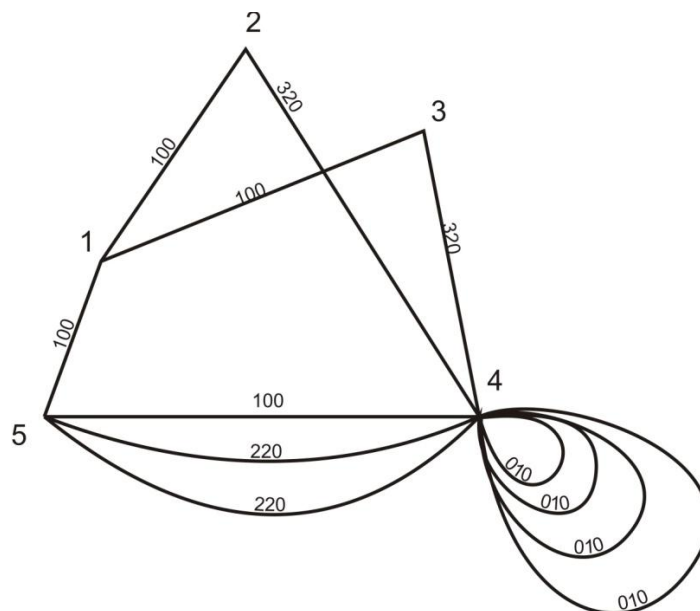


Рис.2 - (n,p) - граф механизма

- 2) Число независимых контуров подсчитывается по формуле

$$k = p - n + 1, \quad (1)$$

где p – число кинематических пар, n – число звеньев механизма. Тогда, подставив необходимые значения, получаем:

$$k = 8 - 5 + 1 = 4.$$

- 3) Удаляется k ребер так, чтобы не осталось ни одного замкнутого контура. Оставшаяся часть графа – дерево (рис.3). Убираем пары $A_{1вр}$, $B_{1вр}$, $E_{4лин}$, $F_{4лин}$, (ребра 1-2, 1-3, 4-5 – пара с матрицей подвижностей (220), 4-5 – пара с матрицей подвижностей (220)).

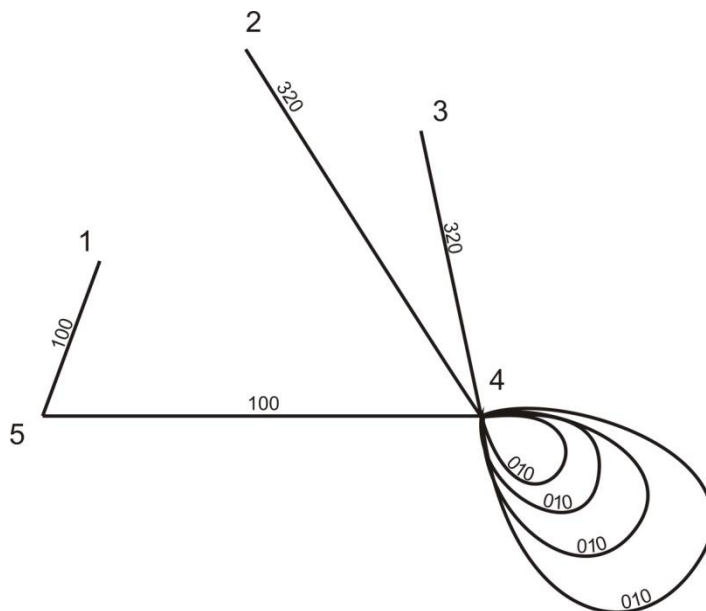


Рис.3 - Дерево (n,p) – графа механизма

- 4) К дереву добавляется одно ребро и, таким образом, создаётся первый независимый контур. Ребро выбирается так, чтобы в первый контур входило ведущее звено и стойка.

Прибавив ребро 1-2, получаем контур 1-2-4-5 с кинематическими парами А, С, G, Н.

- 5) Подсчитываются контурные подвижности (f_k) и связи (q_k). Расчёт подвижностей проводится по приведенным ниже правилам.

- а) Для замыкания контура без натяга требуется шесть подвижностей (330).
- б) Угловые (f'') и винтовые (f''') подвижности КП могут заменять отсутствующие линейные подвижности (f') в контуре, обратная замена не возможна.
- в) Угловые подвижности одного звена могут заменить не более двух линейных подвижностей. Подвижности контура определяются по формуле:

$$W_k = \sum_{i=1} (f)_i + (-1)(330) + (-1)(W_0), \quad (2)$$

где W_k – матрица подвижностей анализируемого контура, $\sum_{i=1} (f)_i$ – сумма матриц подвижностей КП, являющихся характеристиками данного контура, (330) – необходимые подвижности для замыкания контура без натяга, (W_0) – матрица подвижностей механизма. Знак «–» в матрице W_k означает наличие избыточных связей, а знак «+» – избыточной подвижности.

6) Все сказанное в п.5 повторяется для следующего ребра. В расчет данного контура входят только вновь добавленные ребра.

7) Аналогично добавляем последующие ребра и анализируем полученные контуры.

Порядок добавления ребер указан в таблице 2.

Таблица 2 – порядок добавления ребер к дереву графа механизма

№	1.	2.	3.	4.
Ребро	1-2	1-3	5-4	5-4

Если в графе имеется петля, ее подвижности относятся только к тому контуру, который содержит звено с петлей и звено, вызывающее деформацию.

8) Для контуров, имеющих избыточные подвижности, определяются звенья и группы звеньев, подвижность которых рассчитывается по формуле:

$$f_r = \sum_{i=1}^{r+1} (f)_i + (-1)(330) + (-1) \sum_{j=1}^{r-1} (f)_{j \in r}, \quad (3)$$

где f_r – подвижность упорядоченной г-выборки звеньев (одного звена или группы звеньев

в том порядке, в котором они идут по цепи контура), $\sum_{i=1}^{r+1} (f)_i$ – сумма подвижностей всех

КП данной г-выборки, включая крайние КП, $\sum_{j=1}^{r-1} (f)_{j \in r}$ – сумма подвижностей всех выбо-

рок звеньев порядков от 1 до (г-1) принадлежащих г.

Результат анализируется с учетом правил по п.5 б, в.

9) Для механизмов, в независимых контурах которых имеются избыточные подвижности, строится контурная сеть, где каждый контур изображается в виде прямоугольника, в котором проставляются его номер и номера звеньев, входящих в данный контур, число и вид избыточных связей, имеющиеся подвижности и их характер. Прямоугольники соединяются между собой линиями, отражающими взаимосвязь независимых контуров. Подвижности КП дерева могут быть использованы в любых независимых контурах, в которые они входят. Поэтому лишние подвижности одно-

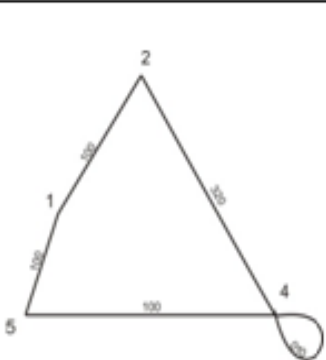
го контура могут быть использованы в последующих контурах при определенных условиях. Линии в контурной цепи обозначают, как контуры присоединяются друг к другу. На линиях ставятся номера вершин, к которым контур присоединяется ребрами, участвующими в расчёте данного контура.

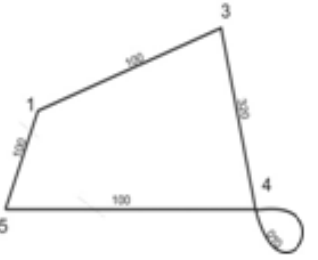
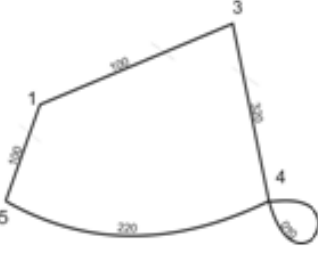
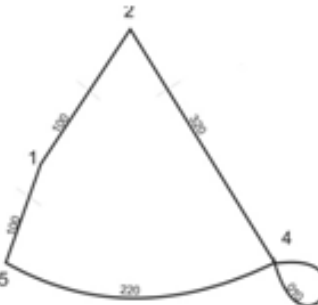
Контурная сеть анализируется следующим образом:

- Если в контуре имеется подвижность у звена (группы звеньев), соединяющего данный контур с последующим контуром, то эта лишняя подвижность может быть реализована по правилам п.5, б, в, если в последующем контуре имеется соответствующая избыточная связь.
- Если подвижность имеется у другого звена, то она не может быть реализована.
- Подвижность может быть реализована через «нулевой» контур (не имеющий избыточных связей) при последовательном соединении.

Подвижность рассматриваемого механизма состоит из основной подвижности с матрицей подвижностей (100) и проскальзывания двух деформирующих дисков с матрицей подвижностей (020). Тогда подвижность рассматриваемого механизма $W=(120)$. Расчет подвижностей механизма приведен в таблице 3.

Таблица 3 – расчет подвижностей волнового редуктора

Контур	КП	Расчет подвижностей		
		Подвижности пар	Подвижности контура	Подвижности г-выборки
	A,C,G, H	(100)	$W_1 = [630] + (-1)[330] +$	$f_1 = [(100) + (100)] + (-1)[330] = [-1 - 30]$
		(100)	$+ (-1)[110] = [2 - 10]$	$f_{1,2} = [(100) + (100) + (320)] + (-1)[330] +$
		(100)		$+ (-1)[-1 - 30] = (320)$
		(010)	$f'' \rightarrow f', W = [100]$	$\left. \begin{matrix} W = [100] \\ f_{1,2} = 220 \end{matrix} \right\}$
		(320)		$f_{1,2,4} = [(100) + (100) + (320) + (010) +$
		суммарно: (630) $+ W = [110]$	$f'' = 1, q = 0$	$+ (100)] + (-1)[330] + (-1)[-1 - 30] +$ $+ (320)] = (110)$ $\left. \begin{matrix} W = [010] \\ f_{1,2,4} = (100) \end{matrix} \right\}$
				$f''_4 = 1$

	H, B, D, G	(100) (320) (010) суммарно: (430) $+W=(010)$	$W_k=(430)+(-1)(330)+$ $+(-1)(010)=(1-10)$ $f'=f', W_k=(000)$ $f=0, q=0$	
	H, B, D, E	(220) (010) суммарно: (230)	$W_k=(230)+(-1)(330)=$ $=(-100)$ $f=0, q'=1$	
	H, B, D, E	(220) (010) суммарно: (230)	$W_k=(230)+(-1)(330)=$ $=(-100)$ $f=0, q'=1$	

3. Анализ подвижностей в контурах и контурной сети

Проведем анализ подвижностей первого контура. Рассмотрим подвижности всех КП, входящих в контур и две подвижности механизма (110). Согласно формуле (2) получаем матрицу подвижностей контура (2–10). Это означает, что контур имеет две угловые подвижности и одну линейную избыточную связь. Согласно п.5, б одна угловая подвижность может заменить недостающую линейную. Тогда получаем итоговую матрицу подвижностей контура (100). Из рассмотренной матрицы видно, что в контуре имеется одна угловая избыточная подвижность. Определим, к какому звену она относится. По формуле (3) рассчитываем подвижности г-выборки звеньев. Из расчета определяем, что первое звено имеет матрицу подвижностей (–1–30), т.е. содержит 4 избыточные связи.

Выборка второго порядка (состоящая из звеньев 1 и 2) имеет матрицу (320), т.е. содержит 5 подвижностей. Одну из подвижностей (100) отнесем к рассматриваемым под-

вижностям $W=1$ механизма. Оставшиеся 4 подвижности компенсируют избыточные связи первого звена.

Выборка третьего порядка (звенья 1,2,4) имеет две подвижности (110). Одну подвижность (010) отнесём к рассматриваемым подвижностям механизма $W=1$. Оставшаяся подвижность (100) относится к вновь добавляемому звену в данной выборке, т.е. звену 4.

Второй контур при подсчете по формуле (2) имеет матрицу подвижностей (1-10), т.е. имеет одну угловую подвижность и одну линейную избыточную связь. Угловая подвижность компенсирует недостающую линейную. Получаем матрицу подвижностей (000). Таким образом, второй контур не имеет ни избыточных связей, ни избыточных подвижностей.

При дальнейшем анализе получаем, что третий и четвертый контуры имеют одинаковые матрицы (-100). Так как они не имеют избыточных подвижностей, исследование g -выборок звеньев не требуется. Составляем контурную сеть (рис. 4).

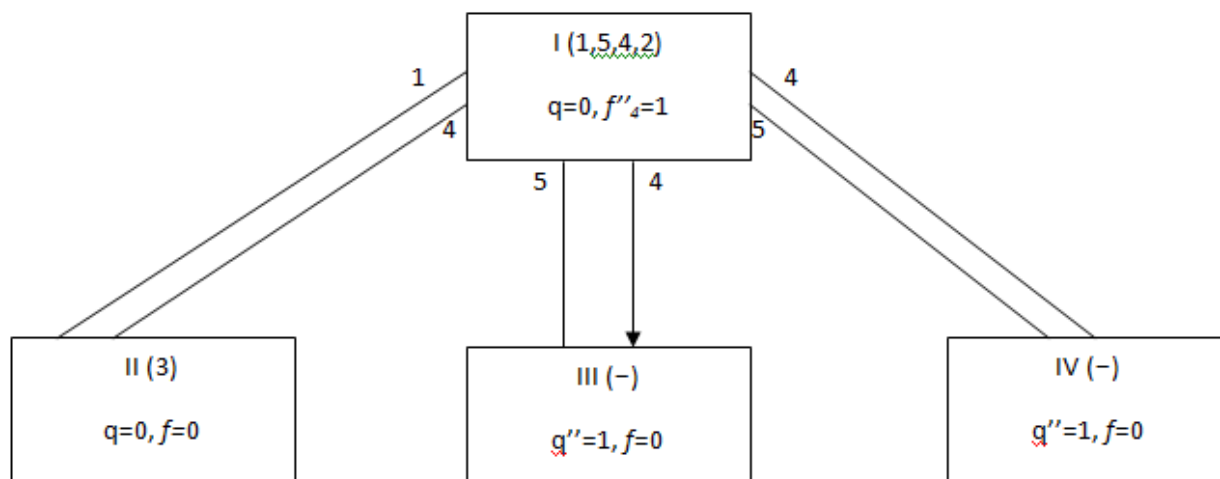


Рис. 4 - Контурная сеть

Угловая подвижность четвертого звена из первого контура передается в третий контур. В схеме механизма остается одна избыточная связь в четвертом контуре. Данный механизм не является самоустанавливающимся.

4. Структурный анализ ВЗП с муфтой на входе

Рассмотрим другую схему волнового редуктора, в которой добавлена одноподвижная вращательная пара I, роль которой выполняет сильфонная муфта (рис.5).

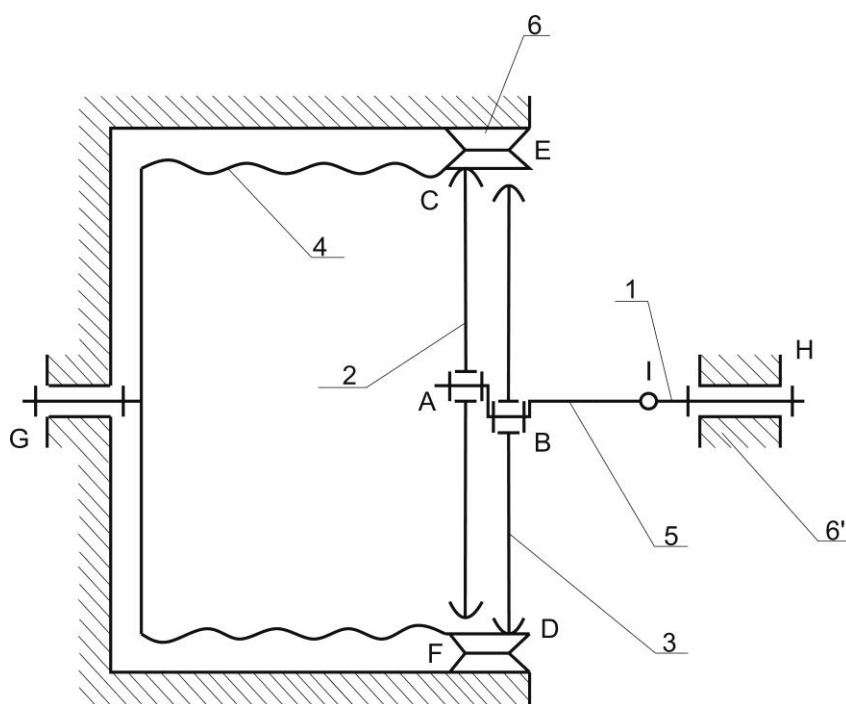


Рис. 5 - Схема волнового редуктора с добавленной одноподвижной вращательной парой

Определим кинематические пары данного редуктора (таблица 4).

Таблица 4 – Кинематические пары волнового редуктора с добавленной одноподвижной вращательной парой

№	Звенья, входящие в КП	Обозначение КП	Подвижность КП
1	5-2	$A_{1вр} (V_2)$	100
2	5-3	$B_{1вр} (V_2)$	100
3	2-4	$C_{5точ} (I_2)$	320
4	3-4	$D_{5точ} (I_2)$	320
5	4-6	$E_{4лин} (II_2)$	220
6	4-6	$F_{4лин} (II_2)$	220
7	4-6	$G_{1вр} (V_2)$	100
8	1-6	$H_{1вр} (V_2)$	100
9	5-1	$I_{1вр} (V_2)$	100

Гибкое колесо 4 деформируется двухдисковым генератором волн. На каждый прогиб приходится по две линейные подвижности. Эти подвижности одной части гибкого колеса относительно другой на графе отразятся четырьмя петлями.

1) Составим (п,р)-граф механизма (рис.6).

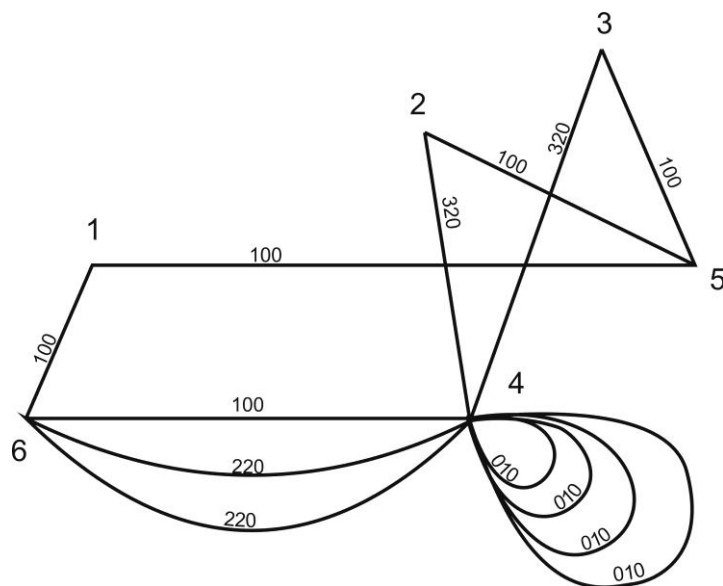


Рис.6. (п,р)-граф механизма

2) Число независимых контуров рассчитаем по формуле (1) :

$$k=9-6+1=4.$$

3) Удаляем четыре ребра: 2-4, 3-4 и два ребра 6-4 с подвижностями (220) (пары $C_{5\text{точ}}$, $D_{5\text{точ}}$, $E_{4\text{лин}}$, $F_{4\text{лин}}$). Получаем дерево графа (рис.7).

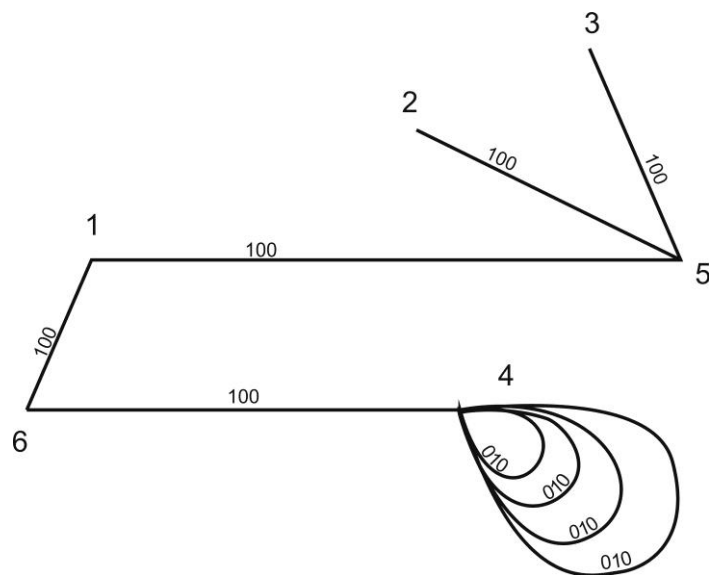


Рис.7. Дерево (п,р)-графа механизма

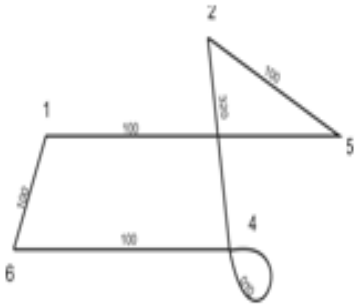
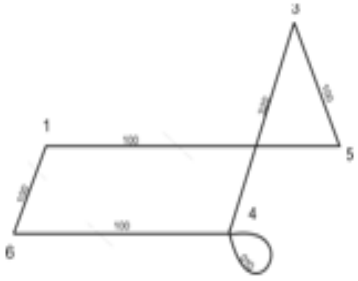
Согласно пунктам 4-9 добавляем ребра в порядке, указанном в таблице 5.

Таблица 5 – порядок добавления ребер к дереву графа механизма

№	1.	2.	3.	4.
Ребро	2-4	3-4	6-4	6-4

Рассчитываем подвижности контуров и г-выборок звеньев (таблица 6).

Таблица 6 – расчет подвижностей волнового редуктора с добавленной одноподвижной вращательной парой

Контур	КП	Расчет подвижностей		
		Подвижности пар	Подвижности контура	Подвижности г-выборки
	<u>A, C, G,</u> <u>H, I</u>	(100)	$W_x = (730) + (-1)(330) +$	$f_1 = ((100) + (100)) + (-1)(330) = (-1-30)$
		(100)	$+ (-1)(110) = (3-10)$	$f_{1,2} = ((100) + (100) + (100)) + (-1)(330) +$
		(100)		$+ (-1)(-1-30) = (100)$
		(100)	$f'' \rightarrow f', W = (200)$	$f_{1,2,3} = ((100) + (100) + (100) + (320)) +$
		(010)		$+ (-1)(330) + (-1)((-1-30) + (100)) = (320)$
		(320)	$f'' = 2, q = 0$	$\left\{ W = (100) \right\}$
		суммарно:		$f_{1,2,3,4} = ((100) + (100) + (100) + (320) + (010)) +$
		(730)		$+ (100) + (-1)(330) + (-1)((-1-30) + (100) +$
		$+ W = (110)$		$+ (320)) = (110)$
				$\left\{ W = (010) \right\}$
	<u>H, I, B, D,</u> <u>G</u>	(100)	$W_x = (430) + (-1)(330) +$	
		(320)	$+ (-1)(010) = (1-10)$	
		(010)		
		суммарно:	$f'' \rightarrow f', W_x = (000)$	
		(430)		
		$+ W = (010)$	$f = 0, q = 0$	

	Н, I, B, D, E	(220) (010) суммарно: (230)	$W_k = [230] + [-1][330] =$ $= [-100]$ $f=0, q''=1$	—
	Н, I, B, D, E	(220) (010) суммарно: (230)	$W_k = [230] + [-1][330] =$ $= [-100]$ $f=0, q''=1$	—

Проанализируем первый контур. Рассмотрим подвижности всех КП, входящих в контур и две подвижности механизма (110). Согласно формуле (2) получаем матрицу подвижностей контура (3–10). Это означает, что контур имеет три угловые подвижности и одну линейную избыточную связь. Согласно п.5, б одна угловая подвижность может заменить недостающую линейную. Тогда получаем итоговую матрицу подвижностей контура (200). Из такой матрицы видно, что в контуре имеется две угловые избыточные подвижности. Определим, к каким звеньям они относятся.

По формуле (3) рассчитываем подвижности г-выборки звеньев. Из расчета определяем, что первое звено имеет матрицу подвижностей (–1–30), т.е. содержит 4 избыточные связи.

Выборка второго порядка (состоящая из звеньев 1 и 5) имеет матрицу (100), т.е. содержит 1 подвижность. Эта подвижность относится к вновь добавляемому звену, т.е. звену 5.

Выборка третьего порядка (звенья 1,5,2) имеет 5 подвижностей (320). Одну из подвижностей (100) отнесём к рассматриваемым подвижностям $W=1$ механизма. Оставшиеся 4 подвижности компенсируют избыточные связи первого звена.

Выборка четвертого порядка (звенья 1,5,2,4) имеет две подвижности (110). Одну подвижность (010) отнесём к рассматриваемым подвижностям механизма $W=1$. Оставшаяся подвижность (100) относится к вновь добавляемому звену в данной выборке, т.е. звену 4.

Второй контур при подсчете по формуле (2) имеет матрицу подвижностей (1–10). Угловая подвижность компенсирует недостающую линейную. Получаем матрицу подвижностей (000). Таким образом, второй контур не имеет ни избыточных связей, ни избыточных подвижностей.

При дальнейшем анализе получаем, что третий и четвертый контуры имеют одинаковые матрицы (-100) . Так как они не имеют избыточных подвижностей, исследование г-выборок звеньев не требуется. Составляем контурную сеть (рис.8).

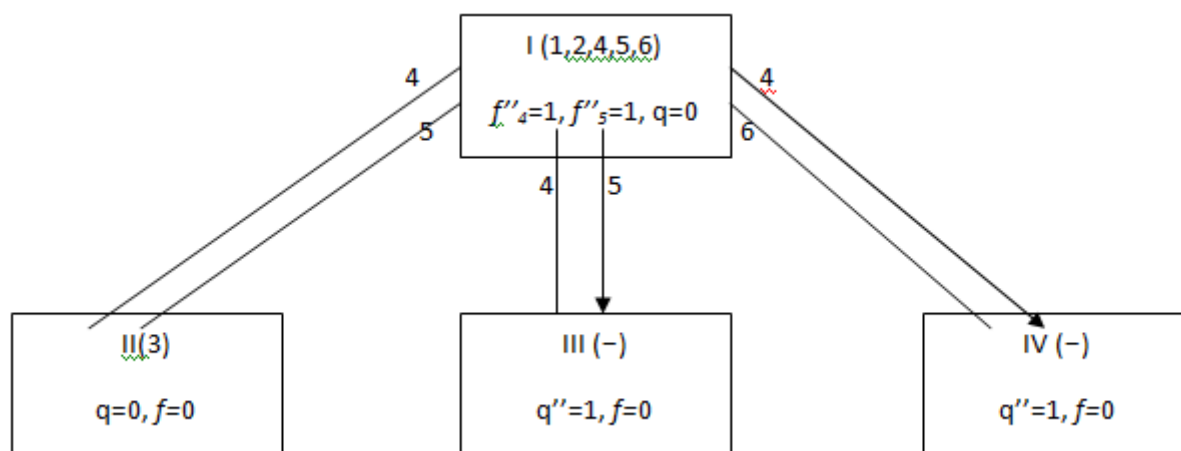


Рис. 8 – Контурная сеть

Подвижности первого контура передаются в третий и четвертый, компенсируя избыточные связи. Таким образом, избыточные связи механизма равны нулю $q=0$. Данная структурная схема является схемой рационального механизма.

Заключение

Проведенный структурный анализ исследуемых конструкций ВЗП методом графов позволил установить количество и местонахождение избыточных связей и показал возможность их устранения.

Список литературы

1. Решетов Л.Н. Самоустанавливающиеся механизмы: Справочник. – М.: Машиностроение, 1991. – 288с.
2. Решетов Л.Н. Конструирование рациональных механизмов. – М.: Машиностроение, 1972. – 256с.
3. Павлова Л.А. Метод графов в структурном исследовании пространственных механизмов: Дисс. ... канд.техн.наук (01.02.02) – М.: МВТУ, 1976. – 187с.
4. Пожбелко В.И. Конструирование самоустанавливающихся рычажных и планетарных механизмов по уравнениям и таблицам безыбыточных структур //Известия высших учебных заведений. Машиностроение. №4. 2011. С. 17-28.
5. Киреев С.О., Ковалев В.Н. Матричный метод оптимизации основной структурной схемы механизма //Теория механизмов и машин. 2004.Том 2, №4.С.18-23.

6. Черемнов А.В., Ан И-Кан, Ивкина О.П. Раскрытие статической неопределимости пространственной передачи с промежуточными телами качения //Известия высших учебных заведений. Физика. 2012. Том 55, № 5-2. С.288-293.
7. Пожбелко В.И. Метод системного структурного анализа подвижности плоских и пространственных механизмов в определенном пространстве их движений //Теория механизмов и машин. 2014. Том 12, №23. С.70-80.
8. Макиенко А.В., Дворников Л.Т. Проблема избыточных связей в планетарных механизмах. – Пенза: Издательский Дом «Академия Естествознания». Статья в журнале: Международный журнал экспериментального образования. 2010. №8. С.153.
9. Пивоваров А.О. Разработка анализа устранения избыточных связей в планетарных передачах гусеничных тракторов//Современные проблемы науки и образования. 2013. №6.С.137.
10. Пивоваров А.О. Разработка конструкции планетарной передачи без избыточных связей//Фундаментальные исследования. 2013. №6-3. С.556-560.
11. Махринская К.О., Гудимова Л.Н. К вопросу о создании механизмов без избыточных связей//Успехи современного естествознания. 2014. №8. С.148-149.
12. Блинов Д.С. Разработка научно-методических основ расчета и проектирования планетарных роликовых механизмов, имеющих многочисленные избыточные связи. Дис. ... д-ра техн. наук. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 373с.
13. Егоров О.Д. Структурный анализ механизмов мехатронных устройств//Вестник МГТУ «СТАНКИН». 2012. №2. С.16-19.
14. Ершов Ю.В., Киреев С.О., Ковалев В.Н. Структурный синтез и анализ планетарной передачи К-Н-V с промежуточными телами качения//Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: технические науки. 2008. №6. С. 38-40.
15. Ермак В.Н. Новый метод выявления и устранения избыточных связей в многоконтурных механизмах//Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2012. №1. С.18-23.
16. Schmidt Linda C., Shetty Harshawardhan, Chase Scott C. A graph grammar approach for structure synthesis of mechanisms// Journal of Mechanical Design, vol. 122. 200. P. 371–376.
17. Хростицкий А.А., Евграфов А.Н., Терешин В.А. Особенности задачи исследования геометрии механизма с избыточными связями//Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2011. № 135. С.122-126.
18. Горобцов А.С., Козлов М.В., Солоденков С.В. Анализ динамических систем с избыточными связями различной степени статической неопределимости//Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2009. №3. С.133-141.