электронный научно-технический журнал
ИНЖЕНЕРНЫЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51036. ISSN 2307-0595

Новые подходы к преподаванию начертательной геометрии в условиях использования информационных образовательных технологий

12, декабрь 2014

Серегин В. И., Иванов Г. С., Суркова Н. Г., Боровиков И. Ф.

УДК: 515.001:512.075

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
bif1986@mail.ru

На современном этапе развития общества появилась необходимость использовать в учебном процессе информационные технологии, которые оказывают существенное влияние на качество подготовки выпускников вузов [1]. Без компьютерных технологий современный мир уже немыслим, а, следовательно, немыслимо и современное образование. Использование таких технологий повышает у студентов интерес к получению знаний, мотивацию обучения, способствует формированию необходимых профессиональных компетенций. При этом облегчается труд преподавателя, сокращается время для проведения контрольных тестов, улучшаются условия для индивидуальной работы со студентами. Кроме того внедрение в образовательный процесс компьютерных технологий является одной из главных идей реформирования высшего образования. Пренебречь использованием информационных технологий – это верный путь сделать выпускника института невостребованным на рынке труда.

Приведение структуры и содержания курса начертательной геометрии требованиям времени следует реализовать, по нашему мнению, руководствуясь необходимостью установления предметно-специализированных компетенций [2]. Это возможно при соблюдении двух условий:

-совместное (параллельное) рассмотрение синтетических и аналитических алгоритмов решения геометрических задач;

-расширение предмета начертательной геометрии фигурами (формами) многомерного пространства как теоретической базы геометрического моделирования объектов, технологических процессов, экономических зависимостей и т.д.

Постановку во главу угла этих двух основных принципиальных положений при разработке концепции современного учебника начертательной геометрии, а точнее и правильнее – **инженерной геометрии** [3], можно обосновать следующим образом. Синтетический (графический, конструктивный) и аналитический методы доказательств теоретических положений, решения геометрических задач, являясь, с одной стороны, противоположными, с другой стороны, дополняют друг друга. Человек как трехмерное существо интуитивно и органично «видит» пространство. Поэтому он без особых проблем намечает план решения той или иной задачи и реализует его в аналитических выкладках. Напротив, при решении задач в многомерном пространстве интуиция бессильна при составлении плана их решения. Поэтому здесь аналитическому решению предшествует разработка плана (алгоритма) ее решения, который невозможен без знания многомерной геометрии. Следует отметить, что начертательная геометрия n-мерных форм однозначно стыкуется с предметом линейной алгебры. При использовании информационных технологий появляется возможность обеспечить взаимосвязь синтетических методов решения геометрических задач с аналитическими и, как следствие, к появлению интегрированного курса геометрической алгебры линейных форм.

Таким образом, целью данной публикации является подтверждение этого тезиса обсуждением алгоритмов решения позиционных задач с участием линейных форм. Изложение начнем с вопросов построения многомерного пространства, задания (изображения) линейных форм (точки, прямой, $2-, 3-, \ldots (n-1)-$ плоскостей и их обозначений.

Построение многомерного пространства конструктивно и логично выполнить по индукции, начиная с одномерного пространства – числовой оси Ox (рис.1). От числовой оси Ox добавлением новой оси $Oy \perp Ox$ переходим к плоскости $\alpha^2(Oxy)$ - двумерному пространству. Далее, вводя новую ось $Oz \perp \alpha^2(Oxy)$, получаем трехмерное пространство $\alpha^3(Oxyz)$. Сказанное достаточно просто, привычно и наглядно.

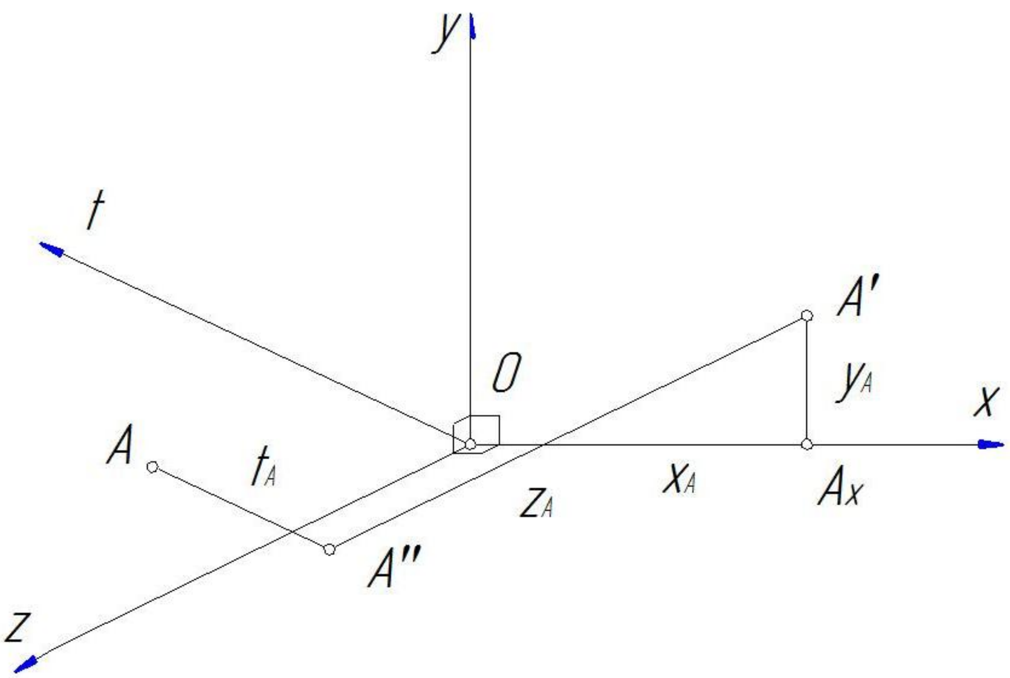


Рис.1

Следующий этап введения оси $Ot \perp \alpha^3(Oxyz)$ требует абстрагирования. Так как в трехмерном пространстве невозможно построить прямую Ot, перпендикулярную имеющимся трем взаимно перпендикулярным прямым Ox, Oy, Oz, то допускаем существование четырехмерного пространства $\alpha^4(Oxyzt)$, где эти четыре оси будут взаимно перпендикулярными. На рис. 1 показана схема построения $4D-$чертежа точки A.

Справедливость такого допущения логична. Действительно, «расширяя» одномерную прямую Ox в двумерную плоскость α^2, пришлось новую ось $Oy \perp Ox$ взять вне прямой Ox. Аналогично, расширяя двумерную плоскость $\alpha^2(Oxy)$ до трехмерного пространства $\alpha^3(Oxyz)$, новую ось Oz нельзя взять в плоскости Oxy, ибо она в $\alpha^2(Oxy)$ не может быть одновременно перпендикулярной осям Ox и Oy. Следовательно, каждая новая ось, вводимая для повышения размерности пространства, не может «находиться внутри» исходного пространства (не может принадлежать исходному пространству).

Этот процесс повышения размерности пространства добавлением новой оси, перпендикулярной всем ранее введенным осям, безграничен. В итоге получаем расширенное $n-$мерное евклидово пространство, в котором произвольная точка A определяется заданием n координат. Поэтому говорят, что в $n-$мерном пространстве точка имеет n степеней свободы или точек в $n-$мерном пространстве существует ∞^n. На рис. 1 координаты точки A равны длинам сторон координатной ломаной $OA_x A'A'' : x_A = OA_x,\ y_A = A_x A',\ z_A = A'A'',\ t_A = A''A.$

В многомерном пространстве число геометрических фигур различных размерностей безгранично. Поэтому все линейные формы называют плоскостями с указанием их размерности: прямая – это 1-плоскость α^1, обычная плоскость – (2-плоскость) α^2, трехмерное пространство – (3-плоскость) α^3…и **гиперплоскость - $(n-1)-$плоскость α^{n-1}.** Обобщая задание прямой двумя точками обычной плоскости - 3 точками, не лежащими на одной прямой, утверждаем, что **$i-$плоскость задается $i+1$ независимыми точками, когда никакие j $(j<i)$ точек не принадлежат одной $(j-2)-$плоскости.**

Аналитически в трехмерном пространстве $(n=3)$ одно линейное уравнение

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \tag{1}$$

как это общеизвестно, определяет плоскость α^2, система двух уравнений

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 - \end{aligned} \tag{2}$$

прямую $l(\alpha^1)$ - линию пересечения данных плоскостей α^2 и β^2. Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$
\begin{aligned}
&a_1x + b_1y + c_1z = d_1,\\
&a_2x + b_2y + c_2z = d_2,\\
&a_3x + b_3y + c_3z = d_3
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

определяет общую точку $L(\alpha^0)$ трех плоскостей α^2, β^2 и γ^2, если определитель

$$
\begin{vmatrix}
a_1 & b_1 & c_1\\
a_2 & b_2 & c_2\\
a_3 & b_3 & c_3
\end{vmatrix} \neq 0 .
$$

Обобщая систему (3) на $n-$мерное пространство, получаем n линейных уравнений с n неизвестными

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2,\\
&.......................................\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n.
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

Из линейной алгебры известно, что система (4) имеет единственное решение, если ее определитель

$$
\Delta = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n}\\
\multicolumn{4}{c}{.............................}\\
a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}
\end{vmatrix},
$$

составленный из коэффициентов при неизвестных, не равен нулю. Другими словами, n гиперплоскостей α^{n-1} $n-$мерного пространства пересекаются в единственной точке.

Размерность r пересечения $p-$плоскости α^p и $q-$плоскости β^q вычисляется по известной формуле [3]:

$$r = p + q - n.$$

Из этой формулы следует, что две гиперплоскости α^{n-1}, β^{n-1} пересекаются по $(n-2)-$плоскости γ^{n-2}:

$$n - 2 = n + 1 + n + 1 - n,$$

три гиперплоскости – по $(n-3)-$плоскости,

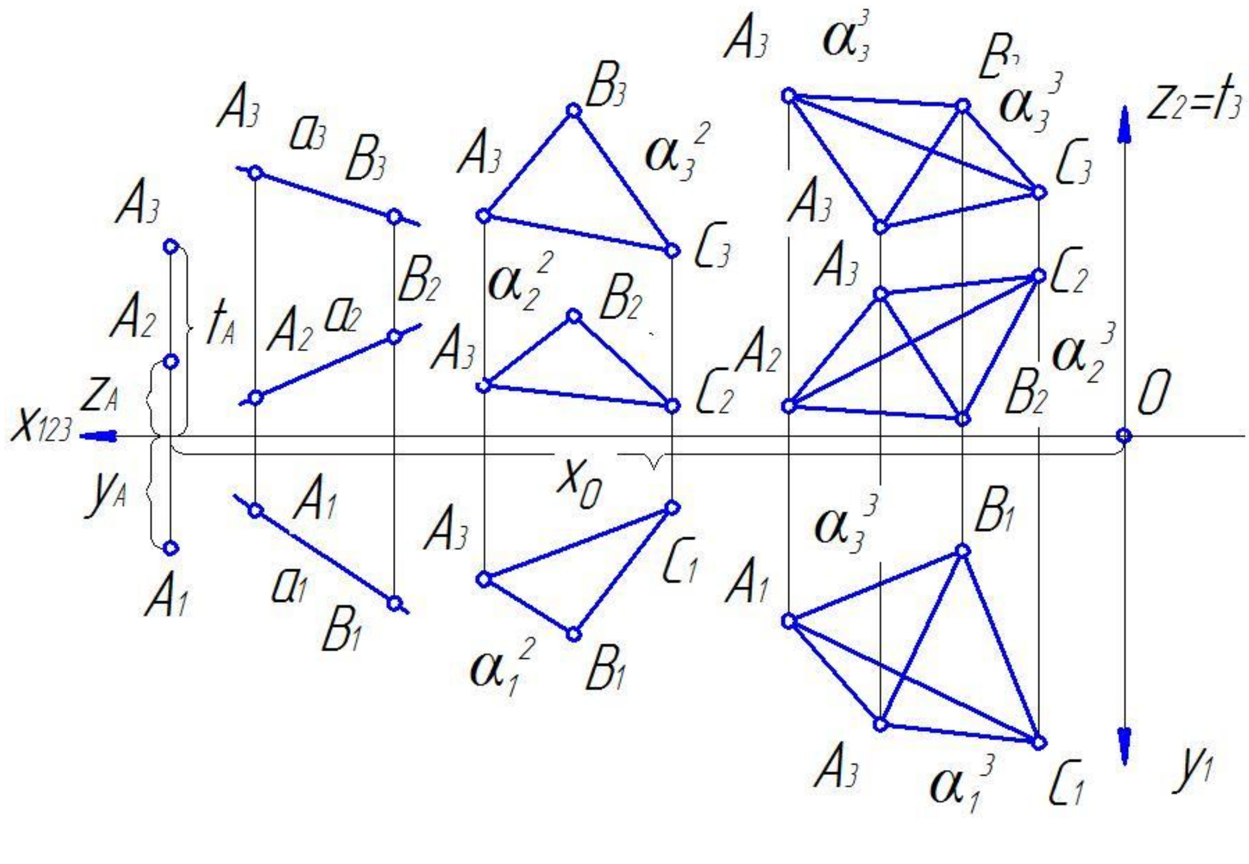
……………………………………………………

i гиперплоскостей – по $(n-i)-$плоскости.

Другими словами, система двух уравнений с n неизвестными задает $(n-2)-$плоскость, система 3-х уравнений с n неизвестными задает $(n-3)-$плоскость, а система из i

уравнений с n неизвестными - $(n-i)-$плоскость. Таким образом, прямоугольная матрица (таблица из $i \cdot n$ чисел, расположенных в i строчках и n столбцах) задает $(n-i)-$плоскость.

Далее кратко остановимся на задании (изображении) линейных форм на обобщенном чертеже Монжа. Сначала рассмотрим задание линейных форм общего положения. Для конкретности ограничимся формами четырехмерного пространства $\Pi^4 : \alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$. Традиционно точки α_i^0 будем обозначать прописными буквами латинского алфавита $A, B, C, \ldots$, а прямые α_j^1 - строчными буквами $a, b, c, \ldots$ На обобщенном чертеже Монжа некоторая точка A изображается тремя проекциями A_1, A_2, A_3 соответственно на плоскостях проекций $\Pi_1(Oxy), \Pi_2(Oxz)$ и $\Pi_3(Oxt)$ (рис. 2).



Точка A Прямая a 2-плоскость $\alpha^2(ABC)$ 3-плоскость $\alpha^3(ABCD)$

Рис. 2

Прямая a, 2-плоскость α^2 и 3-плоскость α^3задаются проекциями определяющих их независимых соответственно двух точек A, B, трех точек A, B, C и четырех точек A, B, C, D (рис. 2).

Теперь также кратко рассмотрим изображение на чертеже проецирующих фигур, акцентируя внимание на задании их проекций на плоскостях проекций Π_i. На рис. 3 дано изображение точки $A(x=3, y=2)$, отнесенной к системе координат Oxy. С позиций аналитической геометрии она получается как точка пересечения прямых $b(x=3)$ и $g(y=2)$. Если точку A отнести к системе координат $Oxyz$, то уравнения $x=3$ и $y=2$ определяют соответственно плоскости уровня $\beta^2 \subset b$ и $\gamma^2 \subset g$, а система этих уравнений – прямую $a=\beta \cap \gamma$, параллельную оси Oz (перпендикулярную координатной плоскости Oxy).

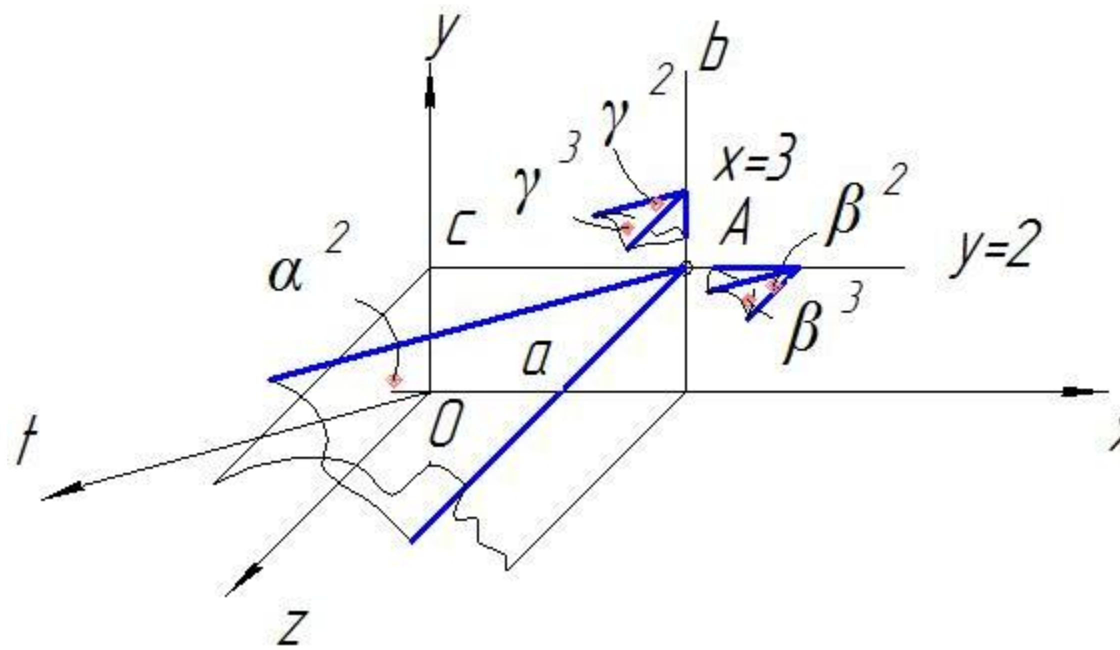
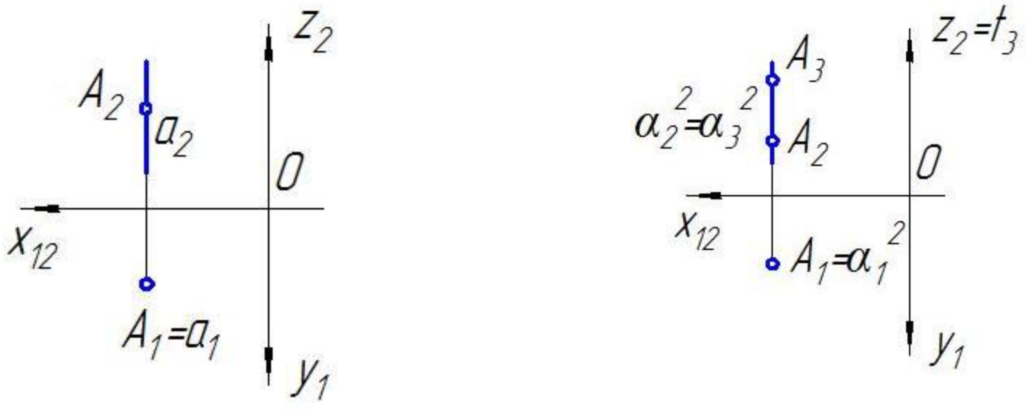


Рис.3

Обобщая, отнесем точку A к системе координат $Oxyzt$ (к четырехмерному пространству Π^4). Тогда уравнения $x=3, y=2$ определяют соответственно 3-плоскости $\beta^3 \perp Oy,\quad \gamma^3 \perp Ox$, пересекающиеся по 2-плоскости α^2 (3+3-4=2). Плоскость α^2 перпендикулярна координатной плоскости Oxy и пересекает ее в точке A (2+2-4=0).

Таким образом, с позиций начертательной геометрии прямая a и плоскость α^2 являются горизонтально проецирующими и однозначно определяются на чертеже своими вырожденными проекциями $a_1 = A_1$ (рис. 4а), $\alpha_1^2 = A_1$ (рис.4б). Их проекции $(a_2 \in A_2)$ (рис.4а) $\alpha_2^2 \in A_2$, $\alpha_3^2 \in A_3$, где $\alpha_2^2 = \alpha_3^2$ (рис.4б) показаны только ради единообразия изображения с фигурами общего положения.



а) б)

Рис.4

Пусть теперь в плоской системе координат Oxy дана прямая a (рис.5), определяемая уравнением

$$Kx + My + N = 0.$$

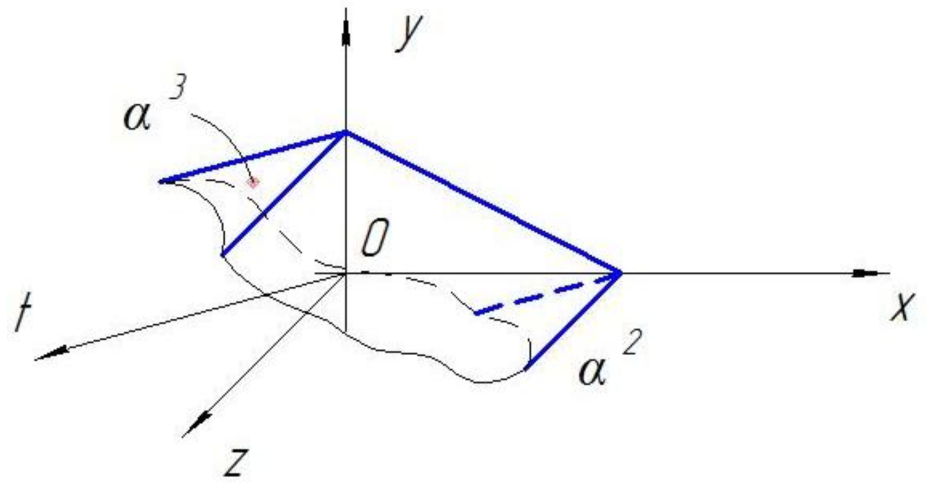


Рис.5

Если это уравнение отнести к пространственной системе координат $Oxyz$, то оно определяет плоскость $\alpha^2 // Oz \left(\alpha^2 \perp Oxy\right)$. Это же уравнение, отнесенное к системе координат $Oxyzt$ определяет 3-плоскость $\alpha^3 // Ozt \left(\alpha^3 \perp Oxy\right)$, которая, как и 2-плоскость α^2, пересекается с координатной плоскостью Oxy по прямой a. Таким образом, горизонтально проецирующая 2-плоскость α^2 и 3-плоскость α^3 однозначно определяются прямой a.

Переходя теперь к заданию прямой a на чертеже Монжа и ограничившись трехмерным пространством, имеем:

- горизонтальная проекция a_1 прямой a, отнесенная к системе координат Oxy, задается уравнением

$$Kx + My + N = 0, \qquad (5)$$

а фронтальная проекция a_2 прямой a, отнесенная к системе координат Oxz, задается уравнением

$$Fx + Hy + G = 0; \qquad (6)$$

- уравнение (5) в трехмерном пространстве определяет горизонтально проецирующую плоскость $\alpha^2 \subset a_1$, которая на чертеже однозначно задается своей вырожденной проекцией $\alpha_1^1 = a_1$;

Аналогично уравнение (6) определяет фронтально проецирующую плоскость $\beta^2 \subset a_2$, которая на чертеже однозначно задается своей вырожденной проекцией $\beta_2^2 = a_2$.

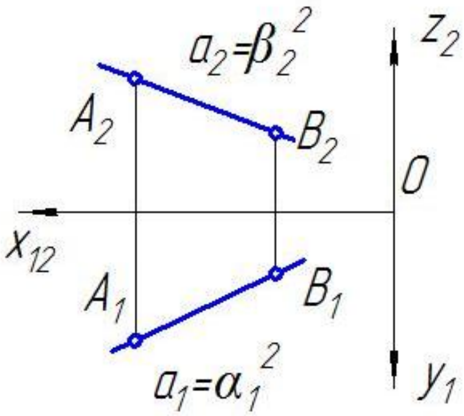


Рис.6

Таким образом, прямая a на чертеже (рис. 6)

- графически задается двумя проекциями a_1, a_2, определяемыми соответственно проекциями A_1, B_1 и A_2, B_2 двух ее независимых точек A и B;

- аналитически ее проекции a_1, a_2 являются вырожденными проекциями соответственно горизонтально проецирующей $\alpha_1^2 = a_1$ (5) и фронтально проецирующей $\beta_2^2 = a_2$ (6) плоскостей.

Очевидно, что графическое задание точки A на чертеже двумя ее проекциями A_1, A_2 эквивалентно ее аналитическому определению, когда ее координаты истолковываются как уравнения трех плоскостей уровня:

- профильной плоскости уровня $\alpha_{12}^2 (x = x_A)$,

- фронтальной плоскости уровня $\beta^2(y = y_A)$,

- горизонтальной плоскости уровня $\gamma^2(z = z_A)$,

где $A_1 = \alpha_{12}^2 \cap \beta_1^2, \quad A_2 = \alpha_{12}^2 \cap \gamma_2^2$.

И, наконец, дадим аналитическое толкование алгоритмов графического решения позиционных задач с участием линейных форм трехмерного пространства.

1. Задачи на принадлежность. Построение недостающей проекции, например, A_2 точки

A прямой a по заданной ее горизонтальной проекции $A_1(y = y_A)$ сводится:

- к подстановке в уравнение (5) значения y_A и вычислению ее абсциссы x_A;

- подстановке найденного значения x_A в уравнение (6) и вычислению z_A.

Таким образом, решение задачи свелось к решению одной системы из трех линейных уравнений (5), (6) и $y = y_A$ с тремя неизвестными.

Аналогично, построение, например, фронтальной проекции A_2 точки A, принадлежащей плоскости α^2 (1), по ее заданной проекции $A_1(x = x_A,\, y = y_A)$, также сводится к решению **одной** системы.

Построение недостающей проекции, например, a_2 прямой a, плоскости α^2, сводится уже к решению **двух** систем из трех уравнений с тремя неизвестными. Прямая a определяется двумя своими независимыми точками A и B. Поэтому построение ее недостающей проекции a_2 требует построения фронтальных проекций A_2, B_2 этих точек, то есть решения двух систем уравнений.

2. Задачи на пересечение. Построение точки K пересечения прямой a с плоскостью α^2 сводится к совместному решению уравнения (1) плоскости α^2 и системы уравнений (5), (6), задающих прямую a. То есть координаты точки K определяются решением одной системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

Линия пересечения l **двух** плоскостей α^2, β^2 графически строится с помощью двух посредников, обычно двух плоскостей уровня $\gamma^2, \bar{\gamma}^2$, ибо прямая l определяется однозначно двумя независимыми точками. Аналитически это сводится к решению двух систем линейных уравнений с тремя неизвестными: уравнений данных плоскостей и посредников.

Таким образом, в трехмерном пространстве любая позиционная задача с линейными формами сводится к решению одной или двух систем линейных уравнений с тремя неизвестными. **Одна** система решается, если решением задачи является **точка**, **две** системы – если решением является **прямая**, определяемая **двумя** точками.

Обобщая этот результат на $n-$мерное пространство, утверждаем, что **любая позиционная задача сводится к решению $i+1$ систем n линейных уравнений с n неизвестными, где i -размерность искомой i -плоскости α^i .**

Отсюда следует **вывод**: следуя принципу обучения от простого к сложному, методически правильно последовательно излагать алгоритмы построения точки, прямой, …, i -плоскости. Вот почему в учебнике [5] задача построения точки пересечения прямой с плоскостью называется **первой основной позиционной задачей.** В учебнике [6] из-за одностороннего взгляда его авторов на начертательную геометрию как сугубо графическую дисциплину в изложении учебного материала нарушен отмеченный выше принцип: алгоритмы построения линий пересечения плоскостей и поверхностей предшествуют описанию алгоритмов решения более простой задачи на определение точки (ек) пересечения линии с плоскостью (поверхностью). Это нарушение становится ярко выраженным при совместном рассмотрении синтетических (графических) и аналитических способов решения многомерных геометрических задач.

Список литературы

1. Гузненков В.Н. Информационные технологии в графических дисциплинах технического университета // Геометрия и графика. 2013.Том 1. Вып. 3-4. С. 26 – 28.
2. Москаленко В.О., Иванов Г.С., Муравьев К.А. Как обеспечить общегеометрическую подготовку студентов технических университетов // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э.Баумана. Электрон. журн. 2012. №8. Режим доступа: http://technomag.edu.ru/doc/445140.html (дата обращения 08.08.2012).
3. Серегин В.И., Иванов Г.С. Инженерная геометрия – теоретическая база построения геометрических моделей // Тенденции формирования науки нового времени: сб. статей научно-практической конференции. Уфа, 2014. С.339-346.
4. Иванов Г.С. Теоретические основы начертательной геометрии. М.: Машиностроение, 1998. 158 с.
5. Четверухин Н.Ф., Левицкий В.С., Прянишникова З.И., Тевлин А.М., Федотов Г.И. Курс начертательной геометрии / под ред. Н.Ф.Четверухина. М.: ГИТТЛ, 1956. 435 с.
6. Гордон В.О., Семенцов-Огиевский М.А. Курс начертательной геометрии. М.: Физматгиз, 1960. 404 с.