

Устойчивость сжатых стержней. Решение проблемы и рекомендации для практических расчётов

11, ноябрь 2014

Горбатовский А. А.

УДК: 531(539.3)

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

alagory@yandex.ru

Под устойчивостью понимается способность механической системы сохранять своё положение при внешних воздействиях, или как говорят «возмущениях». Для изучения основных понятий, используемых при расчётах на устойчивость, рассмотрим простой пример [1]. Шарнирно опёртый стержень удерживается в вертикальном положении пружиной жёсткостью k и нагружен силой, которая сохраняет своё направление при отклонении стержня.

Для изучения устойчивости стержня, отклоняем его из исходного положения равновесия (сообщаем «возмущение») и составляем уравнение равновесия в отклонённом положении (рис. 1).

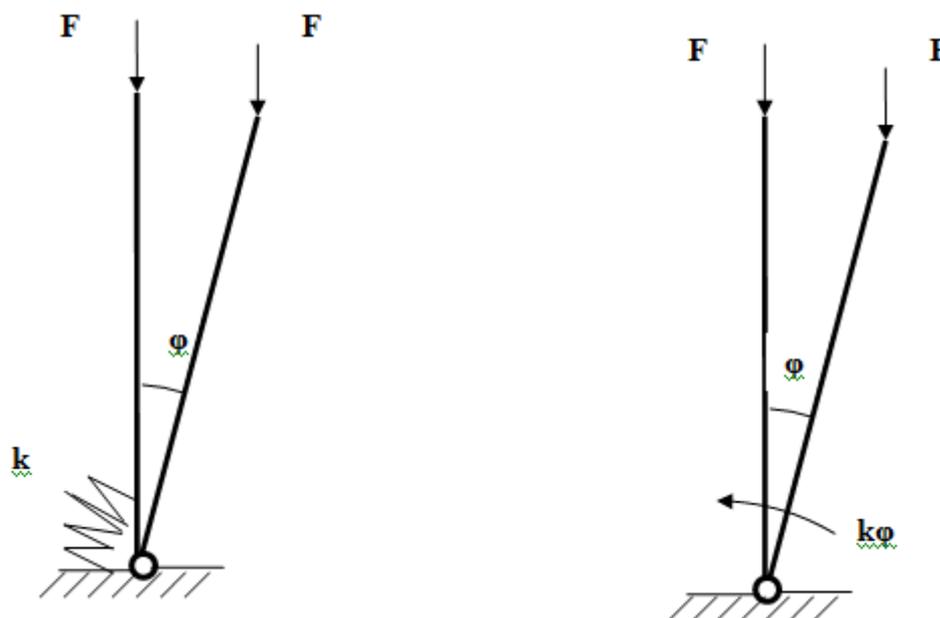


Рис. 1

Сумма моментов внешних сил относительно шарнира должна быть равна нулю, составив уравнение, получим:

$$Fl \cdot \sin \varphi - k\varphi = 0 \quad (1)$$

где: $k\varphi$ – момент, создаваемый упругой пружиной.

Из уравнения (1) находим:

$$\frac{Fl}{k} = \frac{\varphi}{\sin \varphi}$$

График этой зависимости имеет вид (при $|\varphi| \leq \pi$)

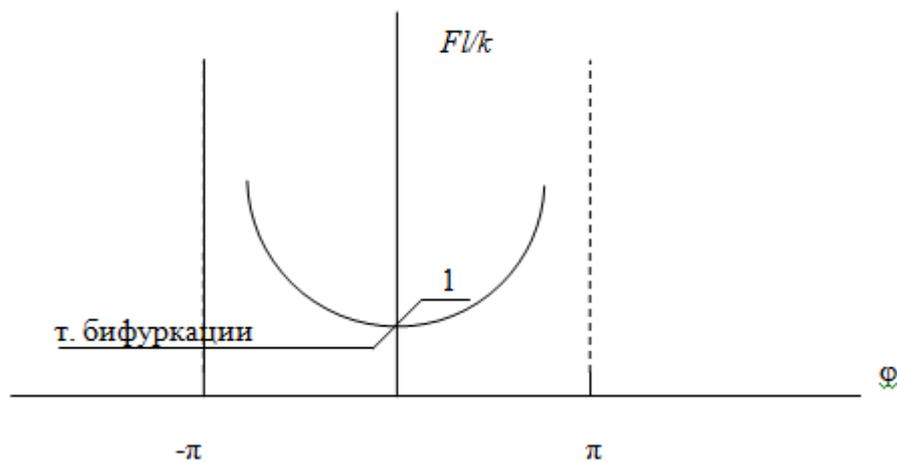


Рис. 2

Из графика видно, что при $\frac{Fl}{k} < 1$, т. е. при $F < k/l$ существует одна форма равновесия – вертикальное положение стержня. При $F = k/l$ ($Fl/k = 1$) появляется кривая, которая говорит о появлении двух (вправо и влево) новых форм равновесия стержня. Таким образом, при $F = k/l$ происходит разветвление форм равновесия и при нагрузках $F > k/l$ существует сразу три формы равновесия: две новых (отклонённых) и старая (вертикальная). Эта точка на графике называется точкой бифуркации, а само разветвление называется бифуркацией форм равновесия.

Нагрузку F , до которой устойчива начальная форма равновесия будем называть критической.

Для данного стержня, $F_{кр} = \frac{k}{l}$ хотя, строго говоря, мы не исследовали устойчивость ни начальной, ни новых форм равновесия. Этот вопрос в рамках того метода, который мы использовали для решения задачи (его называют статическим) решается интуитивно. Действительно, при малых значениях сил ($F < k/l$) отклонённая стойка под действием сил упругости пружины вернётся в исходное положение, а при больших силах ($F > k/l$) не вернётся. Поэтому начальная форма равновесия устойчива при $F < k/l$ и не устойчива при $F > k/l$. Следовательно, $F = k/l$ это критическая нагрузка.

Для строгого исследования устойчивости форм равновесия следует изучить характер движения стержня после отклонения его из начального положения, или исследовать потенциальную энергию стержня, которая в положении устойчивого равновесия минимальна.

Следует отметить особенности поведения стержня в рассмотренном примере.

- Первое – это нелинейная зависимость угла наклона стержня φ от нагрузки F . Это свойство характерно для задач устойчивости и следует из отказа от принципа начальных размеров. Поэтому говорят, что задачи устойчивости в принципе нелинейны.

- Второе – поведение стержня зависит от характера нагрузки. В нашем примере нагрузка сохраняет своё направление при отклонении стержня, такую нагрузку называют «мёртвой». Пример такой нагрузки – сила тяжести. Если же нагрузка будет вести себя по-другому при отклонении стержня, например, будет «следить» за поворотом стержня, (рис.3), то решение задачи будет совершенно другим.

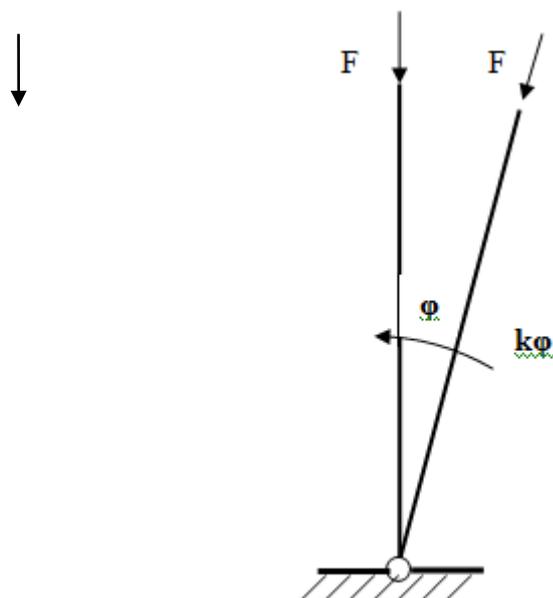


Рис. 3

Для реальных механических систем построение кривых «нагрузка-отклонение» вызывает серьезные трудности. В то же время критическая нагрузка может быть найдена значительно проще. Если ограничиться малыми отклонениями стержня от начального положения, то в этом случае $\sin\varphi \approx \varphi$ и уравнение равновесия (1) примет вид:

$$(Fl - k)\varphi = 0 \quad (2)$$

откуда следуют два решения: $\varphi = 0$, то есть начальная форма равновесия при любой нагрузке и $Fl - k = 0$, откуда: $F = k/l$ – нагрузка при которой $\varphi \neq 0$, т.е. возможно равновесие в отклонённом положении.

Как нам уже известно, $F = k/l$ – это критическая нагрузка, которую мы легко нашли.

Однако полученное решение содержит явные парадоксы.

Во первых, при $F_{кр} = k/l \varphi \neq 0$, однако найти угол отклонения φ невозможно.

Во вторых, при нагрузке $F > k/l$ ($Fl - k \neq 0$) и для выполнения условия равновесия (2) должно выполняться условие $\varphi = 0$. То есть стержень, который мог быть отклонён при нагрузке $F_{кр} = k/l$, при большей нагрузке ($F > k/l$) должен вернуться в исходное положение, т.к. при $F > k/l$ существует только одна форма равновесия $\varphi = 0$.

Эти противоречия здравому смыслу объясняются «линеаризацией» исходного уравнения (1), а именно, заменой $\sin\varphi \approx \varphi$. Тогда, из всего графика, изображённого на рисунке 1. мы видим лишь узкую полоску, соответствующую малым φ , в пределах которой φ неопределённо, а новые формы равновесия при $F > k/l$ и вовсе отсутствуют (Рис. 4).

Тем не менее, этот упрощённый подход к решению задачи устойчивости играет на практике большую роль. Действительно, для инженера важно найти критическую нагрузку, а поведение стержня при нагрузках, превышающих критическую, не имеет практического интереса, т.к. отклонения стержня от исходного положения при $F > k/l$ нарастают катастрофически с ростом нагрузки, что обуславливает невозможность использования стержня при нагрузках, превышающих критическую. Это подтверждается многочисленными катастрофами стержневых конструкций, прежде всего мостов, которые произошли в конце XIX и начале XX века.

В рамках рассмотренного, статического метода решения задачи устойчивости остался открытым вопрос об устойчивости форм равновесия стержня. Решив задачу и определив нагрузку, при которой появляются новые формы равновесия, вопрос об устойчивости новых и прежней формы равновесия может быть решён с позиций энергии.

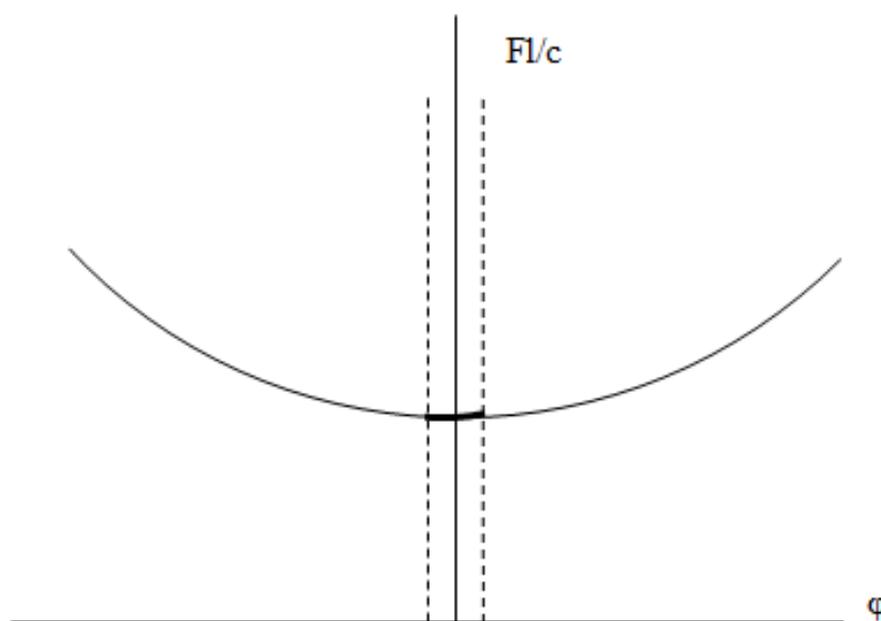


Рис. 4

Используем статический метод определения критических нагрузок, основанный на «линеаризации» уравнений для гибких стержней. Рассмотрим стержень, нагруженный «мёртвой» нагрузкой (Рис. 5).

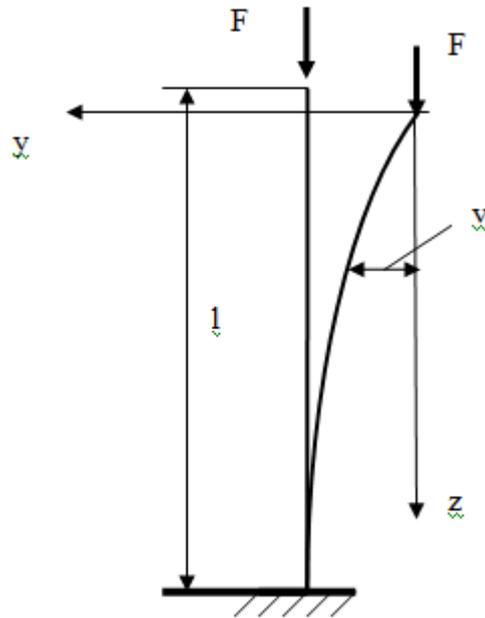


Рис. 5.

Совместив начало координат с верхним концом стержня, запишем дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня в отклонённом положении.

$$EI_{min}v'' = -Fv \quad (3)$$

или:

$$v'' + \alpha^2 = 0, \text{ где } \alpha^2 = F/EI_{min}$$

Решение уравнения имеет вид: $v = C_1 \sin(\alpha z) + C_2 \cos(\alpha z)$.

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находим из граничных условий:

при $z = 0$ $v = 0$, откуда находим $C_2 = 0$,

при $z = l$ $v' = 0$, откуда $C_1 \alpha \cos(\alpha l) = 0$.

Для выполнения этого условия должно быть или $C_1 = 0$, (тривиальное решение), что соответствует вертикальному положению стержня, или $\cos(\alpha z) = 0$.

Последнее равенство возможно при $\alpha l = \pi/2 + \pi n$, где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Минимальное значение параметра нагрузки αl , при котором возможно равновесие стержня в отклонённом состоянии соответствует $n = 0$. Отсюда находим критическую нагрузку:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(2l)^2} \quad (4)$$

Так же как и в первом примере с жёстким стержнем, мы нашли нагрузку, при которой возможно равновесие стержня в отклонённом состоянии, однако прогибы стержня

при этой силе остаются неопределёнными. Кроме того, если внешняя нагрузка превышает критическую, то $al > \pi/2$ и второе граничное условие может быть выполнено только в случае $C_1 = 0$, что соответствует вертикальному положению стержня. То есть стержень, который может отклониться от вертикального положения при $F = F_{кр}$, при большей нагрузке должен вернуться в вертикальное положение. Всё это объясняется, как и в первом примере, использованием «линеаризованного» уравнения изгиба стержня. В самом деле, точное уравнение изгиба стержня имеет вид:

$$EI_{min}/\rho = M$$

Кривизна стержня связана с прогибами формулой: $\frac{1}{\rho} = \frac{v''}{(1+v'^2)^{\frac{3}{2}}}$. При малых углах

наклона стержня $v'^2 \ll 1$ и мы принимаем $1/\rho \approx v''$, в результате чего получаем «линеаризованное» уравнение, с помощью которого можно легко найти критическую нагрузку, однако результаты решения справедливы лишь для очень малых прогибов, в результате чего эти прогибы остаются неопределёнными и получаются отмеченные парадоксальные результаты.

Результат, полученный для консольно закреплённого стержня (4) можно обобщить и для других случаев закрепления стержня. Действительно, если рассмотреть форму потери устойчивости для стержня, шарнирно закреплённого по концам, то можно заметить, что кривая изгиба консольного стержня укладывается на половине длины шарнирно закреплённого стержня (Рис.6). Поэтому, если в формуле для критической нагрузки консольного стержня (4) заменить длину l на $l/2$, то мы получим величину критической нагрузки для шарнирно закреплённого стержня.

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l^2} .$$

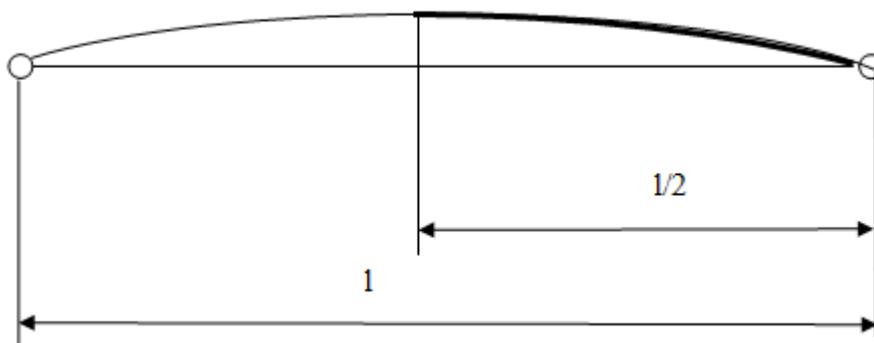


Рис. 6.

Если записать формулу для критической нагрузки в виде:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2} \quad (5),$$

то с учётом рассмотренного примера, коэффициент μ представляет собой величину, обратную количеству полуволн, которые образуются при потере устойчивости стержня.

$$\mu = l/n$$

где: n – количество полуволн.

Коэффициент μ называется коэффициентом приведения длины.

С помощью его легко найти критическую нагрузку для других случаев закрепления стержня, рис. 7.

Однако следует отметить, что с помощью коэффициента приведения длины можно найти критическую нагрузку только для самых простых случаев нагружения и закрепления стержня.

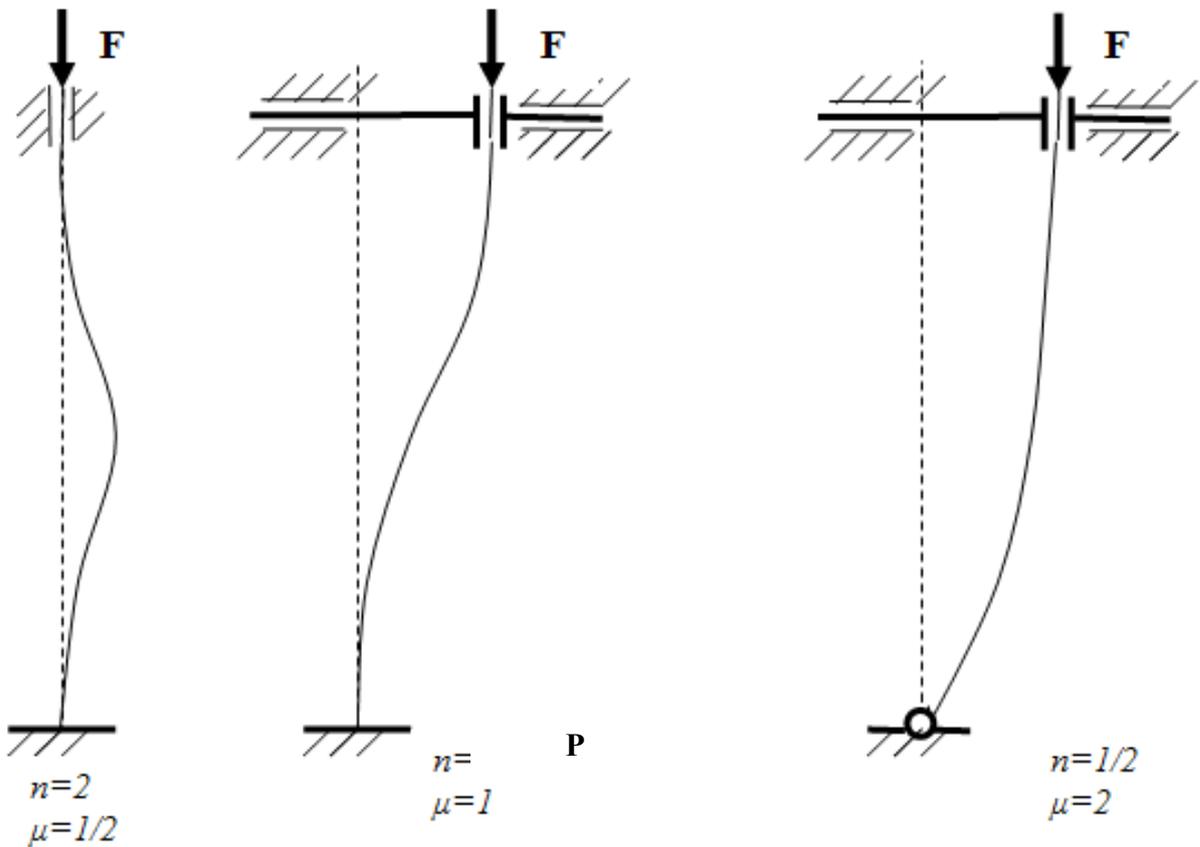


Рис. 7

В более сложных случаях, необходимо решать задачу, составляя дифференциальное уравнение изгиба стержня. Рассмотрим пример, рис. 8.

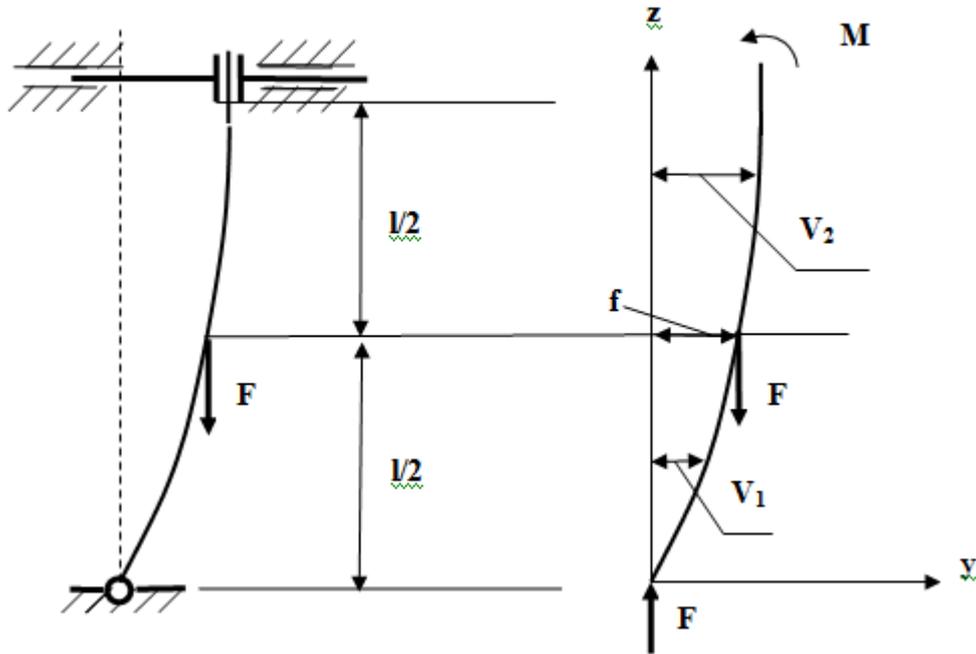


Рис. 8

Отклонив стержень от исходного положения равновесия, составим дифференциальные уравнения изгиба стержня для каждого из участков:

$$EI_{\min} v_1'' = -F v_1 \quad z \leq l/2$$

$$EI_{\min} v_2'' = -Ff z \quad z \geq l/2$$

Полученные дифференциальные уравнения запишем в виде:

$$v_1'' + \alpha^2 v_1 = 0 \quad z \leq l/2$$

$$v_2'' = -\alpha^2 f z \quad z \geq l/2$$

где: $\alpha^2 = F/EI_{\min}$

Решения этих уравнений имеют вид:

$$v_1 = C_1 \sin(\alpha z) + C_2 \cos(\alpha z) \quad z \leq l/2$$

$$v_2 = -\alpha^2 f z^2 / 2 + C_3 z + C_4 \quad z \geq l/2$$

Граничные условия запишем в соответствии с условиями закреплением стержня:

$$z = 0 \quad v_1 = 0$$

$$z = l/2 \quad v_1 = v_2 = f, \quad v_1' = v_2'$$

$$z = l \quad v_2' = 0$$

Используя граничные условия, получим систему однородных линейных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 и неизвестной величины f :

$$C_2 = 0,$$

$$C_1 \sin(al/2) + C_2 \cos(al/2) = f,$$

$$-\frac{\alpha^2 fl^2}{8} + \frac{C_3 l}{2} + C_4 = f,$$

$$C_1 \alpha \cos\left(\frac{\alpha l}{2}\right) - C_2 \alpha \sin\left(\frac{\alpha l}{2}\right) = -\frac{\alpha^2 fl}{2} + C_3,$$

$$-\alpha^2 fl + C_3 = 0$$

Полученная система уравнений имеет ненулевые решения при равенстве нулю определителя, составленного из коэффициентов при неизвестных:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ C_1 \sin(al/2) & C_2 \cos(al/2) & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & l/2 & 1 & -(1 + \alpha^2 l^2/8) \\ \alpha \cos(al/2) & -\alpha \sin(al/2) & -1 & 0 & \alpha^2 l/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\alpha^2 l \end{vmatrix} = 0$$

Приравнивая определитель нулю, получим трансцендентное уравнение:

$$\operatorname{ctg}(al/2) = al/2$$

Это уравнение можно решить графически с любой степенью точности. Наименьший корень этого уравнения равен: $al/2 \approx 0,86$, откуда находим критическую нагрузку:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(1,826l)^2} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2},$$

где: $\mu \approx 1,826$.

С точки зрения механики мы нашли нагрузку, при которой возможно равновесие стержня в отклонённом положении.

Рассмотренный метод решения задачи требует составления и решения дифференциальных уравнений, и хотя эта задача может быть решена с помощью современных вычислительных машин и прикладных программ (например, Mathcad), существует и другой эффективный способ решения задачи устойчивости, использующий энергетические теоремы.

Энергетический метод

Энергетический метод основывается на теореме Л.Дерихле, которая утверждает что, полная энергия консервативной механической системы в положении устойчивого равно-

веса минимальна [2]. Нагрузка, приложенная к стержню, предполагается «мёртвой», то есть сохраняет свою величину и направление и поэтому считается консервативной. Рассмотрим стержень нагруженный «мёртвой» нагрузкой. Ось стержня считается идеально прямой, а материал – линейно упругим. Для исследования устойчивости стержня, выведем его из положения равновесия и подсчитаем, насколько изменилась его полная энергия, рис. 9.

Изменение полной энергии складывается из увеличения потенциальной энергии изгиба стержня и уменьшения потенциальной энергии нагрузки F :

$$\Delta\Pi = U_{изг} - F\delta$$

Потенциальная энергия изгиба стержня подсчитывается по формуле:

$$U_{изг} = \int_l EI(v'')^2 dz$$

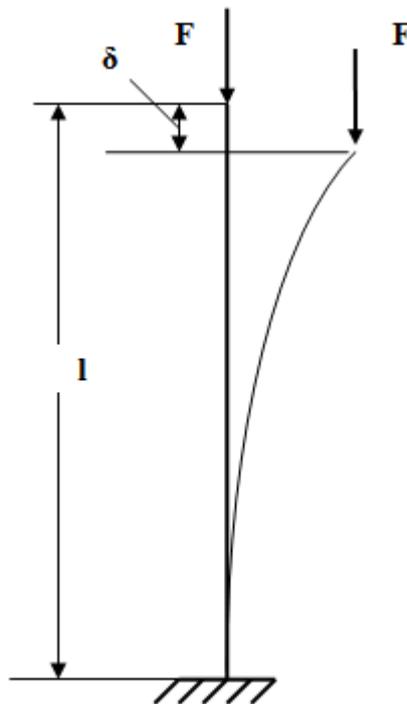


Рис. 9

Величину δ – перемещение точки приложения нагрузки можно найти из условия нерастяжимости стержня, то есть, считая, что это перемещение происходит только за счёт изгиба. Рассмотрим бесконечно малый элемент балки в начальном и деформированном положении, рис.10:

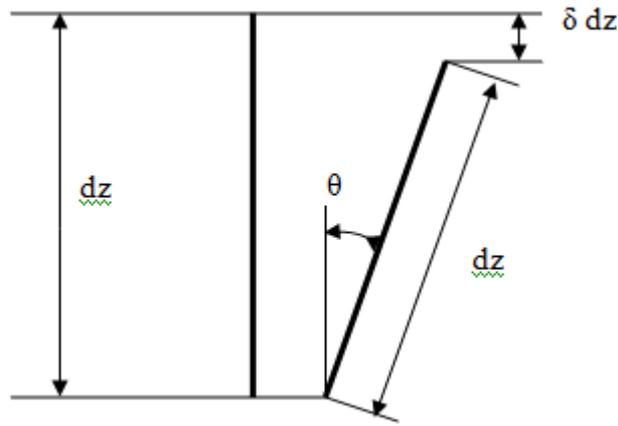


Рис.10

Изменение высоты выделенного элемента δdz можно найти как разность между длиной элемента dz и его проекцией на вертикаль:

$$\delta dz = dz - dz \cos(\theta)$$

Считая угол наклона стержня θ малым, разложим $\cos(\theta)$ в ряд, ограничиваясь двумя членами этого ряда:

$$\cos(\theta) \approx 1 - \theta^2/2.$$

Тогда получим:

$$\delta dz = \theta^2 dz/2$$

Учитывая, что при малых углах $\theta \approx v'$, перемещение верхнего конца стержня имеет вид:

$$\delta = \int (v')^2 dz/2.$$

Окончательно, для критической силы получим формулу:

$$F_{кр} = \frac{EI \int_0^l (v'')^2 dz}{\int_0^l (v')^2 dz} \quad (6)$$

Для вычисления критической силы в полученную формулу следует подставить функцию $v(z)$, которая описывает форму потери устойчивости стержня. Поскольку она неизвестна, то для решения задачи её можно задать приближённо и получить приближённое значение критической нагрузки.

Найдём критическую нагрузку для балки, изображённой на рисунке 9. Для вычисления критической нагрузки зададим форму потери устойчивости в виде: $v = Cz^2$.

При этом, очевидно, что данная функция удовлетворяет условиям закрепления у нижнего конца ($v = 0, v' = 0$), и в то же время противоречит граничному условию на верхнем конце. Действительно, на верхнем конце стержня изгибающий момент равен нулю, следовательно, $M_u = EI v'' = 0$, то есть $v'' = 0$, что противоречит принятой форме потери устойчивости ($v'' = 2Cz$). Однако результат решения получается, близок к точному:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} l\right)^2}$$

$$\mu = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \approx 1.82,$$

точное значение $\mu = 2$.

Отличие от точного значения критической нагрузки составляет 21,6%. Полученный результат можно улучшить, если учесть граничное условие на верхнем конце, задав форму потери устойчивости в виде:

$$v = c_1 z^2 + c_2 z^3$$

Постоянную c_2 найдём из условия: $v'' = 0$ при $z = l$.

В результате получим: $c_1 = -3c_2 l$, тогда форма потери устойчивости примет вид:

$$v = c_2 (-3lz^2 + z^3).$$

Очевидно, что выбранная форма потери устойчивости удовлетворяет всем условиям, как силовым, так и геометрическим.

Вычисление критической нагрузки с использованием этой формулы приводит к результату:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(1,9869l)^2}$$

$\mu \approx 1.9869$, (точное значение $\mu = 2$)

Расхождение с точным значением $F_{кр}$ составляет 1,3%, что значительно превышает нужды практики. Таким образом, для получения хорошего результата при решении задачи энергетическим методом следует удовлетворять всем граничным условиям, не только геометрическим (что обязательно), но и силовым.

Рассмотрим решение энергетическим методом ещё одной задачи, ранее решённой с помощью дифференциального уравнения изогнутой оси балки, рис. 11.

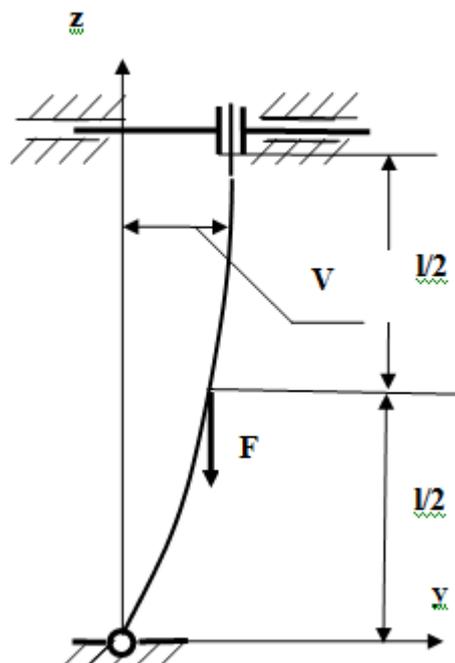


Рис.11

Вначале запишем граничные условия, которым должна удовлетворять функция $v=v(z)$ (одна для двух участков), которая описывает форму потери устойчивости:

при $z = 0$ $v = 0$;

$z = 0$ $v'' = 0$ ($M = 0$);

$z = l$ $v' = 0$

$z = l$ $v''' = 0$ ($EIv''' = Q = 0$).

Записанным граничным условиям могут удовлетворять разные функции, например полином 4-ой степени:

$$v = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4$$

Степень полинома должна соответствовать числу граничных условий, тогда все коэффициенты полинома можно выразить через какой-либо один. В данном примере, используя граничные условия, получим:

$$a_3 = -4la_4, \quad a_1 = 8l^3a_4;$$

и полином приобретает вид:

$$v = (8l^3z - 4lz^3 + z^4).$$

Критическая нагрузка, вычисленная по формуле (6) равна $F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(1.816l)^2}$.

Коэффициент приведения длины $\mu = 1.8166$.

Если принять форму потери устойчивости в виде: $v = A \sin\left(\frac{\pi z}{2l}\right)$, то получим критическую нагрузку равную $F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(1.8092l)^2}$, ($\mu=1,8092$).

Из этих примеров видно, что результаты решения практически совпадают и очень близки к точному значению, полученному с помощью дифференциального уравнения изогнутой оси балки. При этом важно отметить, что критическая нагрузка, вычисленная энергетическим методом всегда выше нагрузки полученной с помощью дифференциального уравнения. Это объясняется тем, что при изгибе полная энергия балки минимальна, а при решении задачи мы задаём форму изгиба, отличающуюся от действительной. Таким образом, мы как бы накладываем дополнительные связи на балку, которые заставляют её изгибаться неестественным образом. Введение же дополнительных связей приводит к увеличению критической нагрузки.

Пределы применимости формулы Эйлера.

Все полученные результаты получены в предположении того, что материал балок упругий и подчиняется закону Гука. Однако закон Гука справедлив, если критические напряжения в балке не превышают предела пропорциональности $\sigma_{пц}$.

Напомним, что формула Эйлера для критической нагрузки имеет вид:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}$$

Разделив обе части формулы на площадь поперечного сечения балки A , получим:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (7)$$

где: $\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$ безразмерная величина, называемая **гибкостью** стержня,

$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$ - минимальный **радиус инерции** поперечного сечения.

Приравняв критические напряжения пределу пропорциональности, получим значение гибкости λ_k , до которого справедлива формула Эйлера:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \sigma_{пц}, \text{ откуда } \lambda_k = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}} \quad (8)$$

Далее, построим график зависимости критических напряжений от гибкости стержня (7), рис. 12.

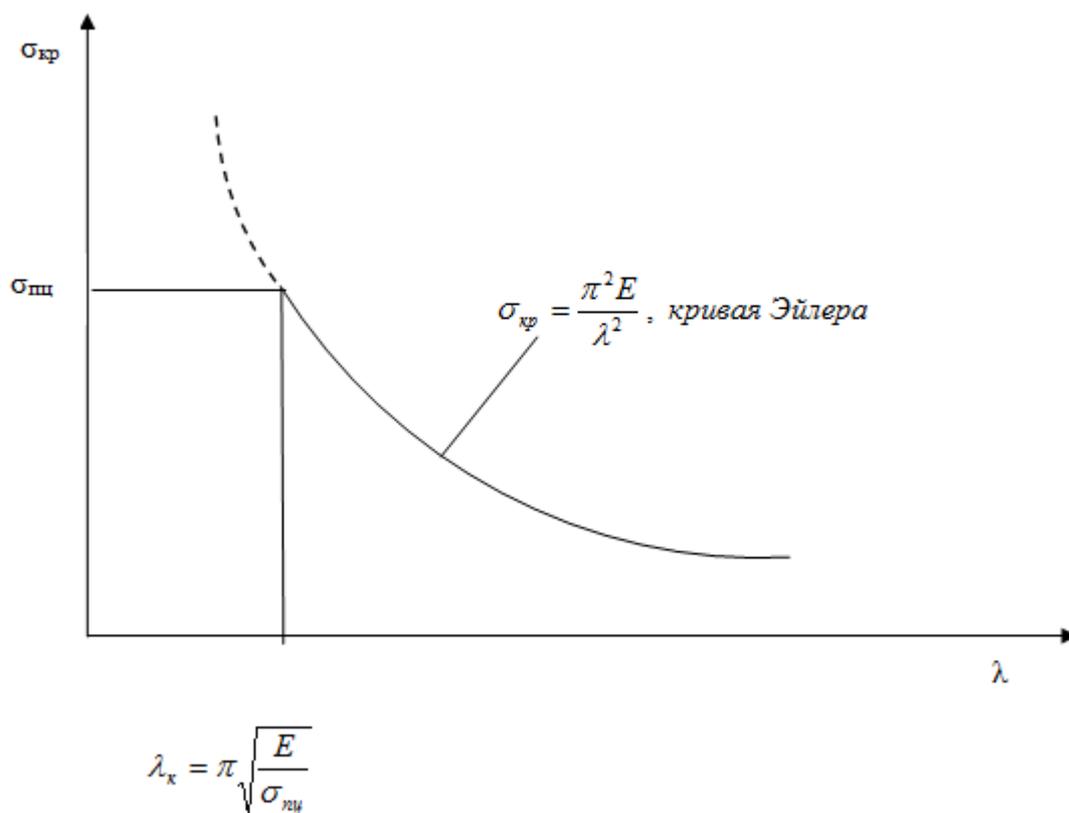


Рис. 12

Из графика видно, если гибкость стержня менее λ_k , то формула Эйлера даёт неверный результат. При малых значениях гибкости λ , критические нагрузки, рассчитанные по формуле Эйлера, многократно превосходят экспериментальные данные. Известны случаи разрушения крупных конструкций из-за потери устойчивости сжатых стоек, критическая нагрузка для которых вычислялась по формуле Эйлера, хотя гибкость их была меньше граничного значения λ_k . Большинство стоек, используемых в строительстве и машиностроении сравнительно короткие и поэтому их гибкость невелика. В связи с этим возникает задача вычисления критических нагрузок для коротких стоек. При этом напряжения в стойке превышают предел пропорциональности и возникают пластические деформации.

Определение критической нагрузки при наличии пластических деформаций

Первое решение задачи определения критической нагрузки с учётом пластических деформаций принадлежит немецкому исследователю Энгессеру [3], который предположил, что за пределами упругости напряжения в стойке при потере устойчивости растут пропорционально не модулю упругости, а касательному модулю E' (Рис. 13). В связи с этим, для вычисления критических нагрузок следует в формуле Эйлера, заменить модуль упругости E на касательный модуль E' , формула (8).

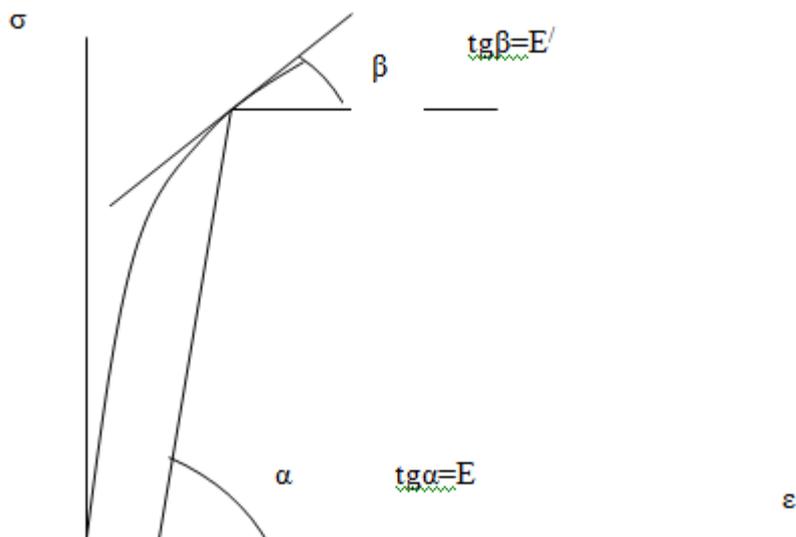


Рис.13

Первое решение Энгессера (1889г.)

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E' I_{\min}}{(\mu l)^2} \quad (9)$$

Однако сразу же было замечено, что при потере устойчивости во внутренних слоях стержня происходит догрузка), напряжения растут), а во внешних слоях происходит разгрузка), напряжения падают), рис.14. В соответствии с диаграммой сжатия материала, в зоне догрузки напряжения растут пропорционально касательному модулю упругости, а в зоне разгрузки напряжения падают пропорционально модулю упругости в соответствии с законом разгрузки, что не учитывалось в первом решении Энгессера.

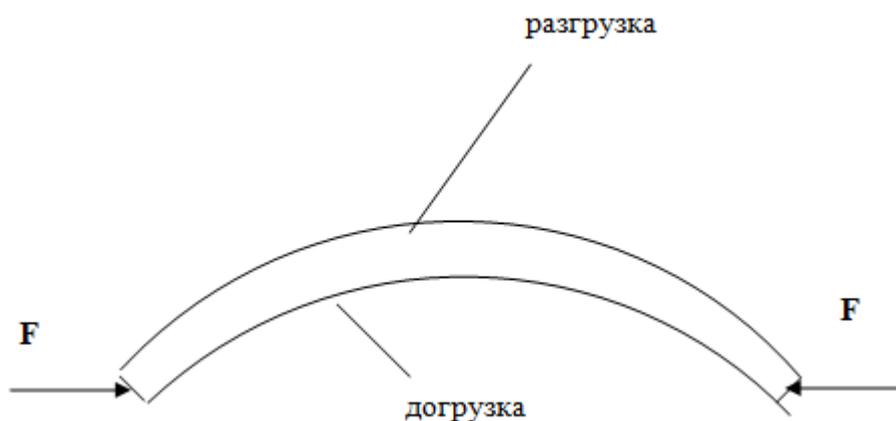


Рис. 14.

Впоследствии первое решение было исправлено.

Рассмотрим решение задачу об устойчивости короткого стержня, с учётом пластических деформаций на примере предельно упрощённой модели стержня (Рис.15), для того, чтобы избежать громоздких преобразований.

В данной модели деформируются стержни длиной l_0 , а стойка длиной l считается абсолютно жёсткой. Таким образом, вся податливость данной модели стержня сосредоточена в стержнях 1 и 2 длиной l_0 .

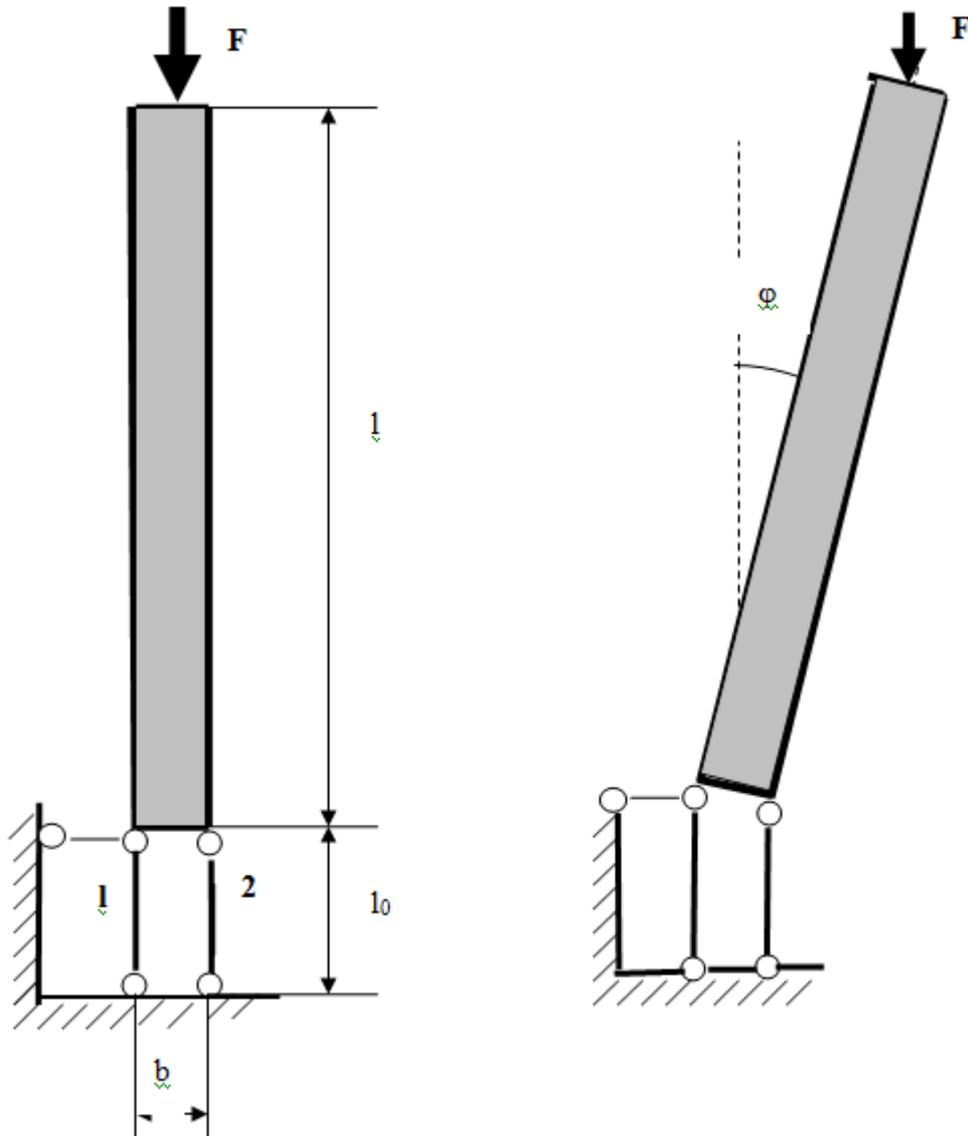


Рисунок 15.

Вначале найдём критическую нагрузку, считая стержни 1 и 2 упругими и подчиняющимися закону Гука. Воспользуемся статическим критерием, то есть отклоним стержень из исходного положения и составим уравнение равновесия в отклонённом положении, рисунок 16.

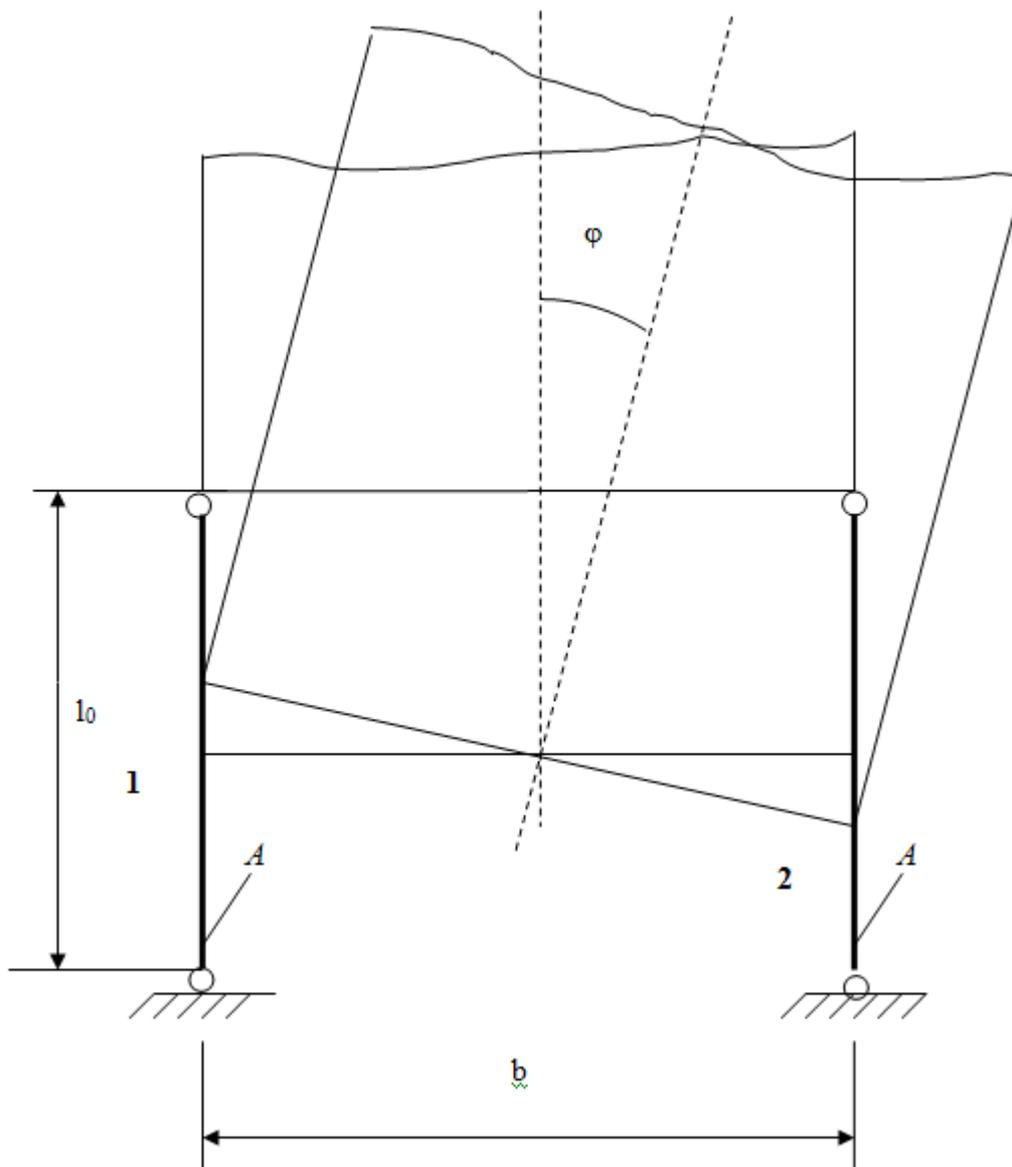


Рис. 16.

Нагрузка F считается постоянной по величине и направлению, то есть «мёртвой» $F = \text{Const}$.

Приращение внутренних сил в стержнях 1 и 2 при отклонении стойки длиной l :

$$\Delta N_1 = \frac{\varphi b EA}{2l_0} \quad \Delta N_2 = \frac{\varphi b EA}{2l_0} \quad \Delta N_1 = \Delta N_2$$

Уравнение равновесия: $F l \varphi = \frac{2 \varphi b EA b}{2l_0 2}$

Откуда находим Эйлерову критическую силу:

$$F_{\text{Э}} = \frac{b^2 EA}{2l_0} \quad (10)$$

Если заменить в полученной формуле модуль упругости E на касательный модуль E' , то мы получим решение Энгессера, для данной упрощённой модели стержня:

$$F_{\kappa} = \frac{b^2 E' A}{2l_0} \quad (11)$$

Это решение соответствует теории, которая называется *теорией касательного модуля*. Позже будет ясно, почему мы рассматриваем теорию, которая вначале была признана ошибочной.

Теперь найдём критическую нагрузку для этой же упрощённой модели стержня с учётом пластических деформаций.

Считаем, что в стержнях 1 и 2 возникли пластические деформации под действием силы F . Диаграмму сжатия предполагаем, для простоты, линейно-упругой, рис.17 .

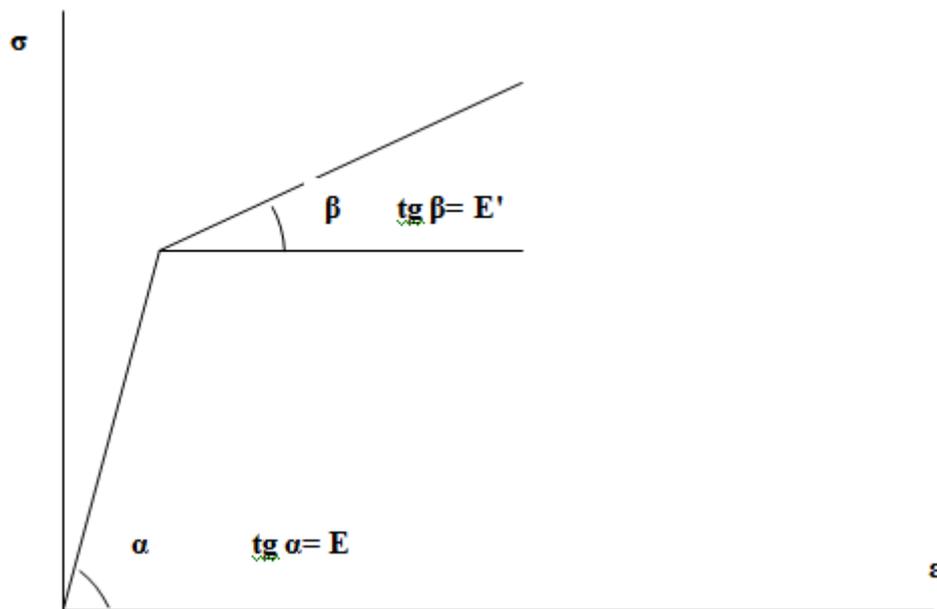


Рис. 17

Дополнительные силы, возникающие в стержнях 1 и 2 при отклонении стойки из исходного состояния, обозначим ΔN_1 и ΔN_2 . При этом, в первом стержне происходит разгрузка пропорционально модулю упругости E , а во втором стержне догрузка, пропорциональная касательному модулю E' , рис. 18.

$$\Delta N_1 = \frac{\varphi c E A}{l_0} \quad \Delta N_2 = \frac{\varphi (b - c) E' A}{l_0}$$

Поскольку $F = \text{Const}$, то $\Delta N_1 = \Delta N_2$

откуда находим: $c = \frac{E' b}{E + E'}$

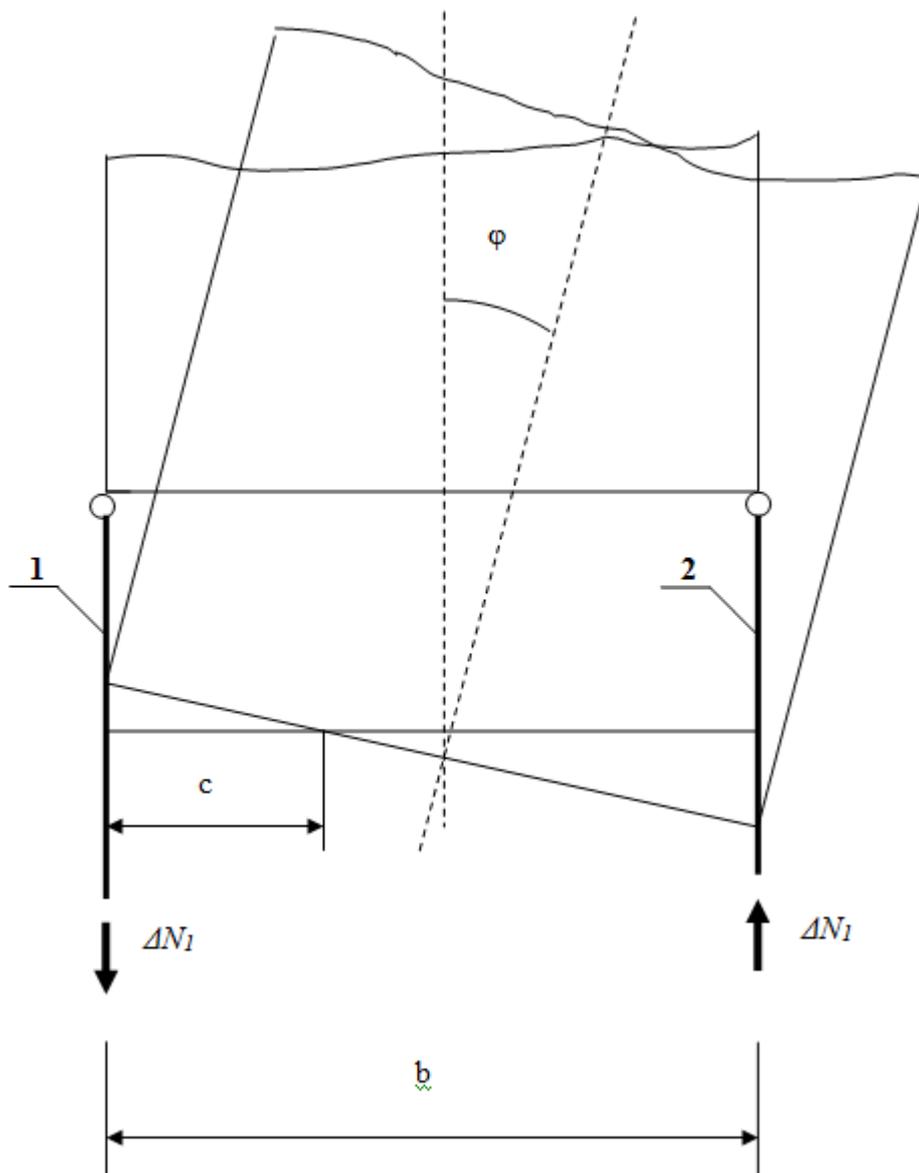


Рис.18

Из уравнения равновесия: $F l \varphi = \frac{\varphi c E A b}{2 l_0} + \frac{\varphi (b - c) E' A b}{2 l_0}$ находим критическую силу:

$$F_{np} = \frac{b^2 E_{np} A}{2 l l_0} \quad (12)$$

где: $F_{np} = \frac{2 E E'}{E + E'}$ приведённый модуль.

Формула (10) соответствует *теории приведённого модуля*. Следует отметить, что величина приведённого модуля зависит не только от материала, но и от формы поперечного сечения, хотя эта зависимость и очень слабая.

Отметим ещё раз, что рассмотренные решения получены в предположении того, что нагрузка F постоянна по величине и направлению. Теперь найдём критическую нагрузку, предполагая, что внешняя нагрузка F возрастает, начиная с некоторого значения F_0 .

Для решения задачи используем статический метод. Начиная с некоторой, пока неизвестной силы F_0 отклоняем стойку из положения равновесия. $F = F_0 + \Delta F$.

Приращения внутренних сил в стержнях 1 и 2 те же, что и в предыдущем случае:

$$\Delta N_1 = \frac{\varphi c EA}{l_0} \quad \Delta N_2 = \frac{\varphi (b - c) E' A}{l_0}$$

Поскольку внешняя сила возрастает, то $\Delta N_1 \neq \Delta N_2$.

$$\text{Приращение внешней силы: } \Delta F = \Delta N_1 - \Delta N_2 = \frac{\varphi A}{l_0} [(b - c) E' - c E]$$

Из уравнения равновесия (моментов): $F l \varphi = \Delta N_1 \frac{b}{2} + \Delta N_2 \frac{b}{2}$ находим нагрузку, при которой возможно равновесие в отклонённом положении:

$$F = \frac{b^2 E' A}{2 l l_0} \left[\frac{c (E - E')}{b E'} + 1 \right] = F_{\kappa} \left[\frac{c (E - E')}{b E'} + 1 \right],$$

где: $F_{\kappa} = \frac{b^2 E' A}{2 l l_0}$ критическая сила, соответствующая теории касательного модуля (формула 9).

Откуда: $c = \frac{F - F_{\kappa}}{F_{\kappa}} b \frac{E'}{E - E'}$ т.к. $c \geq 0$, то данное уравнение удовлетворяется при,

$F \geq F_{\kappa}$ т.е. $F_0 = F_{\kappa}$. Таким образом, новые формы равновесия появляются при $F_{\kappa} = \frac{b^2 E' A}{2 l l_0}$

Угол поворота стойки найдём из условия того, что приращение внешней силы:

$$\Delta F = (F - F_{\kappa}) = \Delta N_1 - \Delta N_2 = \frac{\varphi A}{l_0} [(b - c) E' - c E]$$

Тогда угол поворота равен:

$$\varphi = \frac{(F - F_{\kappa}) b E - E'}{(F_{np} - F) 2 l E + E'}$$

Следовательно, новые формы равновесия появляются при нагрузке F_{κ} , соответствующей теории касательного модуля. На рис. 19 жирной линией показана зависимость угла поворота стержня от внешней нагрузки F . Если стержень удержать от поворота при силе F_{κ} , то далее поворот может произойти при любой силе, лежащей между F_{κ} и $F_{кр}$, то есть между силами, соответствующими теориям касательного и приведённого модулей. Прерывистой линией показан изгиб реальной стойки, имеющей начальную кривизну.

Суммируя все полученные результаты можно сказать, что для вычисления критической нагрузки с учётом пластических деформаций следует в формуле Эйлера заменить модуль упругости, на касательный или приведённый.

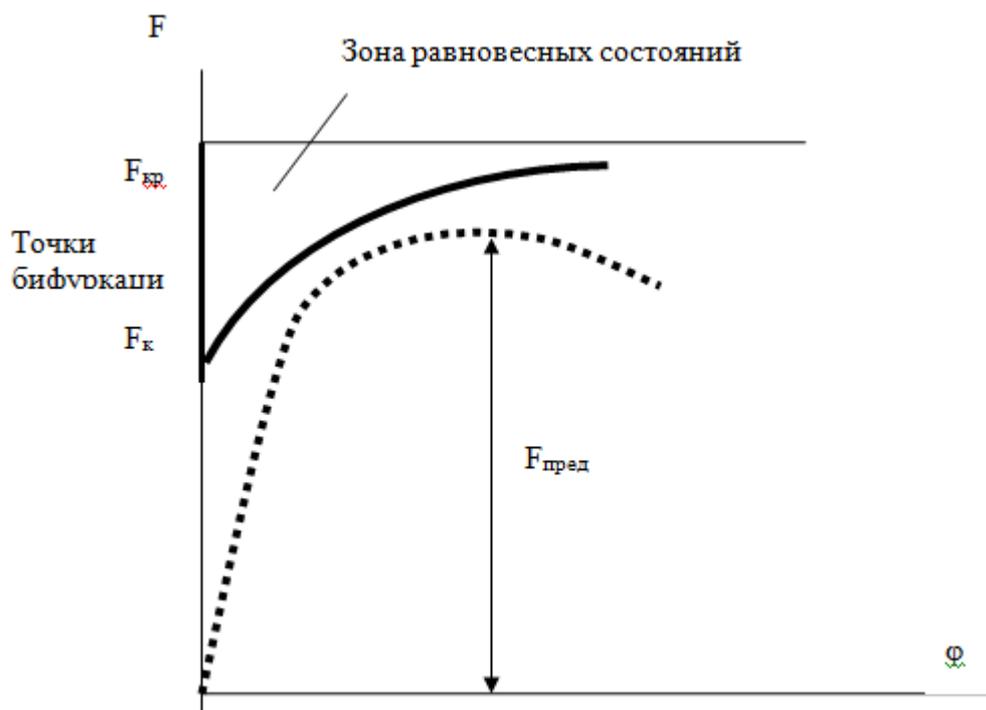


Рис.19.

Рекомендации для практических расчётов

После изучения всех подходов к решению задачи устойчивости коротких стоек (с малым значением гибкости), возникает вопрос: какой теорией, касательного или приведённого модуля следует пользоваться на практике и какую величину касательного модуля использовать в расчётах, поскольку она переменна (Рис.13).

Для сравнения результатов, нужно построить графики зависимости критических напряжений от гибкости при малых значениях гибкости стержня. Методика построения этих графиков такова:

1. Задаёмся величиной критического напряжения $\sigma_{кр}$.
2. Находим по диаграмме сжатия материала величину касательного модуля E' .
3. Вычисляем гибкость стержня по теории приведённого или касательного модуля:

$$\lambda = \pi \sqrt{\frac{E'}{\sigma_{кр}}} \quad \lambda = \pi \sqrt{\frac{E_{пр}}{\sigma_{кр}}}$$

4. Получаем точку на графике $\sigma_{кр} - \lambda$.

Результаты таких вычислений для малоуглеродистой стали, приведены на рис. 20. Как следует из рисунка, результаты вычислений критических напряжений по двум теориям дают очень близкие результаты, которые удовлетворительно согласуются с экспери-

ментальными данными. Поэтому для практических расчётов можно рекомендовать теорию касательного модуля, поскольку вычисление критических напряжений менее трудоёмко, а, кроме того, использование теории касательного модуля идёт в запас устойчивости, так как критическая нагрузка, рассчитанная по этой теории меньше.

Для вычисления критических напряжений при малых гибкостях ($\lambda \leq \lambda_k$) для малоуглеродистых сталей можно использовать эмпирическую зависимость:

$$\sigma_{кр} = \sigma_T - (\sigma_T - \sigma_{нц}) \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}. \quad (13)$$

Если же неизвестна величина $\sigma_{нц}$, то приближённо можно считать $\sigma_{кр} \approx \sigma_T$.

Отметим ещё раз, что при больших гибкостях ($\lambda > \lambda_k$), кривая $\sigma_{кр} - \lambda$ одинакова для всех сталей, поскольку для всех сталей модуль упругости примерно одинаков. В то же время кривая $\sigma_{кр} - \lambda$ при малых гибкостях ($\lambda \leq \lambda_k$) зависит от диаграммы сжатия, которая для всех материалов разная.

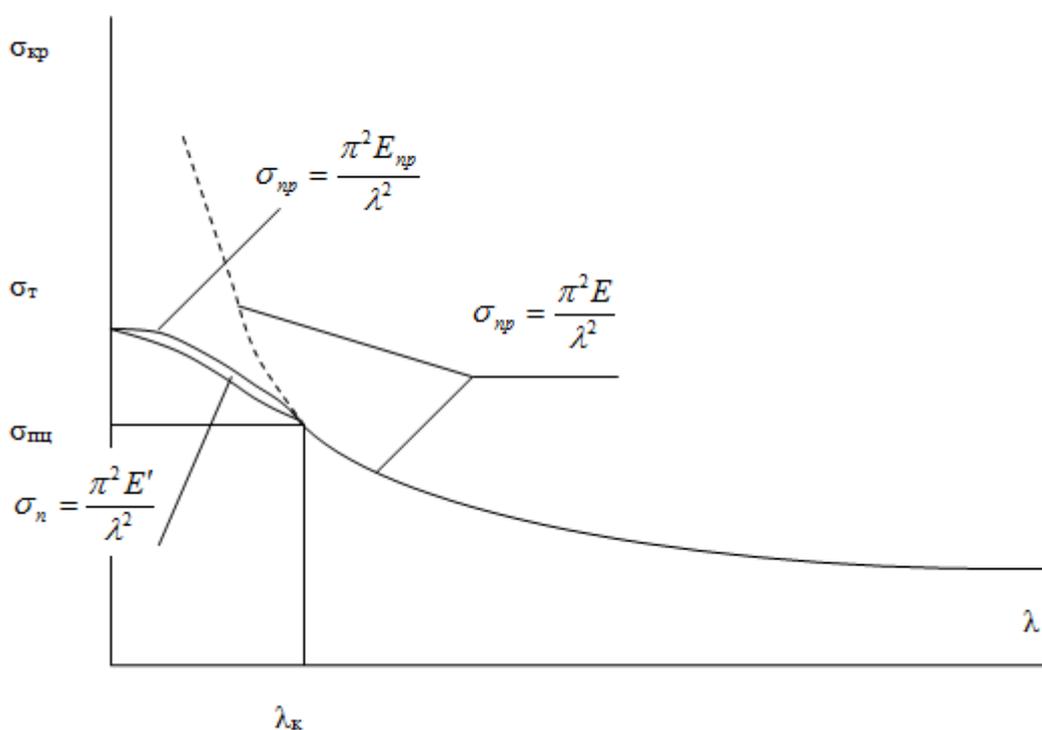


Рис.20.

Расчёт по коэффициенту понижения допускаемых напряжений

Расчёт стоек на устойчивость является ответственным этапом проектирования конструкции или строительного сооружения. Ошибки в проектировании, как свидетельствует история, связаны с катастрофами и человеческими жертвами. Поэтому метод расчёта на устойчивость в каждой стране мира стандартизируют, и строительные нормы предписывают использовать только ту методику расчёта, которая оправдала себя на практике. В

России допускаемую нагрузку на сжатую стойку в соответствии со СНиП (строительные нормы и правила) следует вычислять по следующей формуле:

$$F_{дон} = [\sigma] A \varphi \quad (14)$$

$F_{дон}$ – допускаемая нагрузка на стойку

$[\sigma]$ – допускаемое напряжение на сжатие,

A – площадь поперечного сечения стойки,

φ – коэффициент понижения допускаемых напряжений.

Допускаемая нагрузка – это отношение критической силы к коэффициенту запаса

по устойчивости:
$$F_{дон} = \frac{F_{кр}}{n_y}.$$

Тогда, коэффициент понижения допускаемых напряжений φ , равен:

$$\varphi = \frac{\sigma_{кр}}{n_y [\sigma]}.$$

Принимая величину коэффициента запаса по устойчивости n_y , различной для разных значений гибкости стержня можно вычислить коэффициент φ в зависимости от гибкости стержня λ для различных материалов.

Гибкость λ	Коэффициент φ				Гибкость λ	Коэффициент φ			
	Ст.2 Ст.3 Ст.4	Ст.5	Чугун	Дерево		Ст.2 Ст.3 Ст.4	Ст.5	Чугун	Дерево
0	1,00	1,00	1,00	1,00	110	0,52	0,43	-	0,25
10	0,99	0,98	0,97	0,99	120	0,45	0,36	-	0,22
20	0,96	0,95	0,91	0,97	130	0,40	0,33	-	0,18
30	0,94	0,92	0,81	0,93	140	0,36	0,29	-	0,16
40	0,92	0,89	0,69	0,87	150	0,32	0,26	-	0,14
50	0,89	0,86	0,57	0,80	160	0,29	0,24	-	0,12
60	0,86	0,82	0,44	0,71	170	0,26	0,21	-	0,11
70	0,81	0,76	0,34	0,60	180	0,23	0,19	-	0,10
80	0,75	0,70	0,26	0,48	190	0,21	0,17	-	0,09
90	0,69	0,62	0,20	0,38	200	0,19	0,16	-	0,08
100	0,60	0,51	0,16	0,31					

Рассмотрим примеры расчёта с помощью коэффициента понижения допускаемых напряжений.

Пример №1.

Найти допускаемую нагрузку и коэффициент запаса по устойчивости для стойки, рис.21:

Дано: материал стойки сталь 3, $\sigma_{тц} = 200$ МПа, $[\sigma] = 160$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

$l = 4$ м,

$d = 50$ мм,

$\delta = 2$ мм,

поперечное сечение: труба

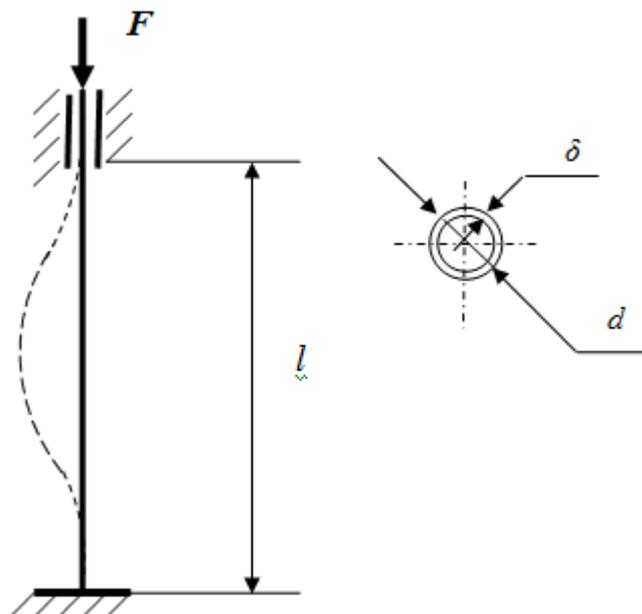


Рис. 21.

Решение:

Допускаемую нагрузку будем вычислять по формуле (14): $F_{\text{дон}} = [\sigma] A \varphi$.

Однако, для вычисления допускаемой нагрузки по формуле (14), следует вначале найти коэффициент понижения допускаемых напряжений φ , который, в свою очередь зависит от гибкости стойки λ . Поэтому, в первую очередь вычислим гибкость:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$$

Коэффициент приведения длины стойки находим по формуле: $\mu = 1/n$. Как следует из рисунка 7, $\mu = 1/2$.

$$\text{Минимальный радиус инерции равен: } i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{\pi d^3 \delta}{8 \pi d}} = \frac{d}{2\sqrt{2}},$$

$$\text{Гибкость: } \lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{\mu l 2\sqrt{2}}{d} = \frac{(1/2) * 4000 * 2 * \sqrt{2}}{50} \approx 113.$$

По таблице находим: $\varphi \approx 0,5$.

Далее вычисляем допускаемую нагрузку: $F_{\text{дон}} = [\sigma] A \varphi = F_{\text{дон}} = [\sigma] \pi d \delta \varphi$

$$F_{\text{дон}} = 160 * \pi * 50 * 2 * 0,5 \approx 25133 \text{ Н} \approx 25,1 \text{ кН}.$$

Для определения коэффициента запаса по устойчивости необходимо найти критическую нагрузку. Вычислив по формуле (8) граничное значение гибкости:

$$\lambda_{\text{к}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{нц}}}} = \pi \sqrt{\frac{2 * 10^5}{200}} = 99,3.$$

Находим, что гибкость нашей стойки выше граничного значения $\lambda \geq \lambda_{\kappa}$. Поэтому критическую нагрузку можно найти по формуле Эйлера:

$$F_{кр} = \sigma_{кр} A = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} A = \frac{\pi^2 2 \cdot 10^5}{(113)^2} * \pi * 50 * 2 = 4.86 * 10^4 \text{ Н} = 48.6 \text{ кН}$$

Коэффициент запаса по устойчивости: $n_y = \frac{F_{кр}}{F_{дон}} = \frac{48.6}{25.1} \approx 1.9$

Пример №2.

Найти размер поперечного сечения стойки, изображённой на рисунке 22, нагруженной силой $F = 250 \text{ кН}$. Материал стойки – сталь. Форма поперечного сечения – двутавр. Характеристики материала:

$$\sigma_T = 220 \text{ МПа}$$

$$\sigma_{нц} = 200 \text{ МПа}$$

$$[\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

$$l = 500 \text{ мм}$$

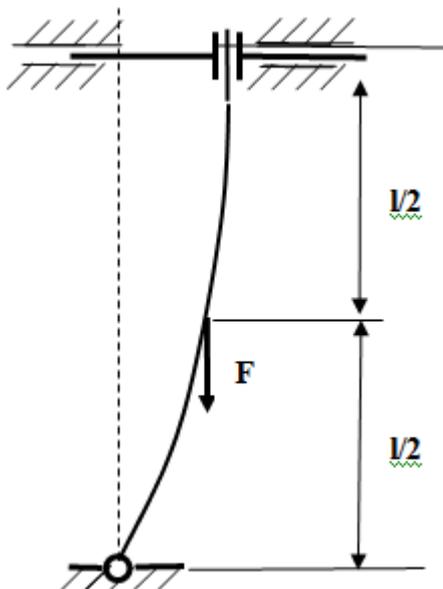


Рис. 22.

Решение.

Найти площадь поперечного сечения непосредственно из формулы (14) невозможно, так как кроме площади поперечного сечения A , неизвестна также величина коэффициента φ , зависящего от размера поперечного сечения. В таком случае задача решается методом последовательных приближений.

Если рассчитывать стойку на сжатие без учёта устойчивости, то $F_{дон} = [\sigma]A$, откуда найдём размер поперечного сечения стойки: $A \geq \frac{F}{[\sigma]} = \frac{2.5 \cdot 10^5}{1.6 \cdot 10^2} = 1.56 \cdot 10^3 \text{ мм}^2$.

или: $A \geq 15,6 \text{ см}^2$.

По сортаменту прокатной стали (ГОСТ 8239-89) находим, что указанному условию удовлетворяет двутавр № 16 с характеристиками: $A = 20,2 \text{ см}^2$, $i_{\min} = 1,7 \text{ см}$.

Вычисляем гибкость для стойки с данным профилем:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1.826 * 50}{1.7} = 53.7$$

По таблице находим коэффициент $\varphi = 0,88$.

Далее по формуле (14) вычисляем допускаемую нагрузку, соответствующую двутавру № 16:

$$F_{\text{дон}} = [\sigma] A \varphi = 160 * 20,2 * 10^2 * 0,88 = 2,84 * 10^5 \text{ Н} = 284 \text{ кН}.$$

Поскольку найденная допускаемая нагрузка значительно превышает заданную (250 кН), то в качестве второго приближения выбираем двутавр №14 с характеристиками:

$A = 17,4 \text{ см}^2$, $i_{\min} = 1,55 \text{ см}$, после чего повторяем расчёт:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1.826 * 50}{1.55} = 57, \text{ коэффициент } \varphi = 0,87$$

Допускаемая нагрузка: $F_{\text{дон}} = [\sigma] A \varphi = 160 * 17,4 * 10^2 * 0,87 = 2,42 * 10^5 \text{ Н} = 242 \text{ кН}$.

Поскольку найденная нагрузка отличается от заданной всего на 3,2%, полученный размер можно считать окончательным.

Таким образом, заданной стойке с нагрузкой 250 кН соответствует двутавр № 14.

Вычислим дополнительно коэффициент запаса по устойчивости n_y .

Граничное значение гибкости для данной стойки:

$$\lambda_{\kappa} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{нц}}}} = \pi \sqrt{\frac{2 * 10^5}{200}} \approx 99.$$

Так как гибкость нашей стойки составляет 57, то критические напряжения вычисляем по формуле (13):

$$\sigma_{\text{кр}} = \sigma_T - (\sigma_T - \sigma_{\text{нц}}) \frac{\lambda^2}{\lambda_{\kappa}^2} = 220 - (220 - 200) \frac{57^2}{99^2} = 213 \text{ МПа}$$

Критическая сила: $F_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} A = 213 * 17,4 * 10^2 = 370620 \text{ Н} \approx 370,6 \text{ кН}$.

Коэффициент запаса: $n_y = \frac{F_{\text{кр}}}{F} = \frac{370,6}{250} \approx 1,5$

Список литературы

1. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. Учебник для вузов. – 10-е изд. перераб. и доп. – М.: Изд – во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000. – 292с.
2. Алфутов Н.А., Колесников К.С. Устойчивость движения и равновесия: Учеб. для вузов/ Под ред. К.С.Колесникова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2003. – 256 с.: ил. – (Сер. Механика в техническом университете; т.3).

3. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем: -- 3-е изд. перераб. – М.: Наука, 1979, 384с.