

Обобщенная синусоида – основа профилирования рабочих поверхностей деталей машин

11, ноябрь 2014

Федоренко В. И.

УДК: 62-23 : 512.7

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
jurmit@list.ru

Введение

В современном машиностроении используется большое количество машин, рабочие поверхности которых спрофилированы по различным плоским или пространственным кривым. Применение криволинейных поверхностей в качестве профилей рабочих органов обеспечивает уменьшение габаритов при сохранении производительности, мощности и других показателей машин. Поэтому, например, в роторно-поршневых объёмных машинах в качестве направляющих профиля применяют плоские трохоиды [2], а в роторно-волновых пространственные эпициклоиды (рис.1,2) [7].



Рис. 1. Макет роторно-волнового компрессора (показан этап всасывания)

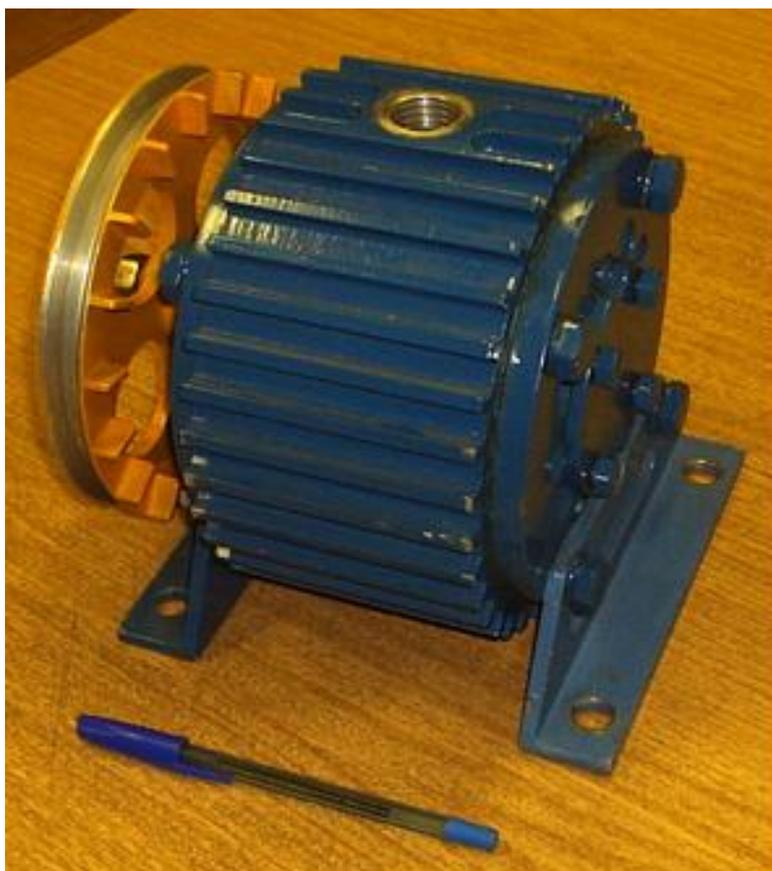


Рис. 2. Экспериментальный роторно-волновой компрессор

Поэтому поиск новых кривых для профилирования деталей механизмов и определения аналитического определения их формы всегда являлся и является сейчас актуальной задачей.

В механизмах различных машин находят применение детали, цилиндрические поверхности которых имеют некруглую направляющую в виде непрерывной замкнутой кривой, изменяющейся по закону синусоиды. Такие поверхности называются синусоидальными цилиндрическими поверхностями (СПЦ). Примером использования СПЦ являются моментопередающие соединения, которые имеют ряд эксплуатационных и технологических преимуществ по сравнению с шлицевыми и шпоночными. Однако в научной литературе не показана связь между различными видами синусоидальных кривых и принцип их образования.

Целью данной работы является вывод формулы обобщенной синусоидальной кривой и при изменении её параметров - математическое подтверждение её преобразования в другие, уже известные синусоидальные кривые.

В 17 веке французский математик Жюль Роберваль при исследовании циклоиды получил некую кривую, названную им “спутницей циклоиды” (рис.3) [1].

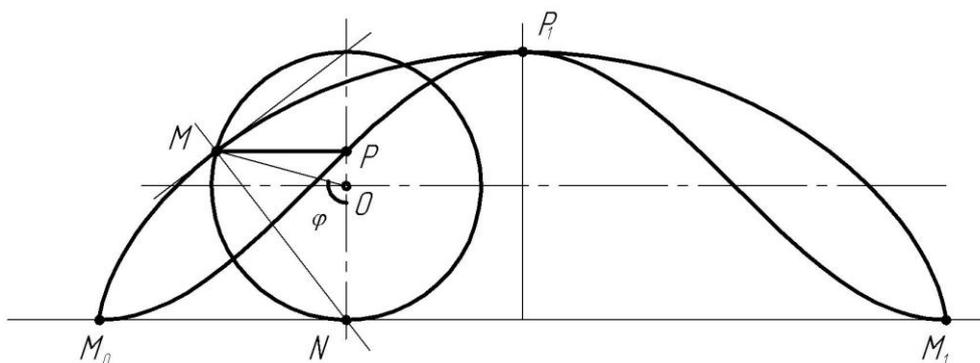


Рис.3. Геометрическая взаимосвязь циклоиды и синусоиды

Сущность действий в построении кривой заключалась в том, что из точки M , принадлежащей циклоиде, опустили перпендикуляр на вертикальный диаметр производящего круга. В результате построений получилась точка P . При повторении таких построений для всех точек циклоиды, была построена некая кривая. За время, когда точка M опишет полную арку циклоиды, точка P опишет некоторую кривую, которая была названа “спутницей циклоиды”.

Поскольку при построении от точки M_0 по горизонтали откладываются отрезки, равные по длине дуги MN окружности производящего круга, а по вертикали линии синусов, соответствующие этим дугам, то результатом построения является известная по учебникам геометрии синусоида [3].

Повторим те же действия при построении обобщенной циклоиды, используя метод производящего круга.

Циклоида это плоская кривая, описываемая точкой окружности, катящейся без скольжения по прямой линии, обобщенная циклоида – это пространственная кривая, которая при изменении параметров преобразуется в другие типы циклоидальных кривых [5, 6].

Обобщенная циклоида показана на рисунке 4 – это кривая F , которую описывает точка M , лежащая внутри производящего (подвижного) круга A в результате качения круга A без скольжения по границе направляющего (неподвижного) круга B . Оси кругов A и B пересекаются под постоянным углом γ .

Кривая F будет циклически замкнута, если отношение радиуса обкатываемой окружности R направляющего круга B к радиусу образующей окружности r производящего круга A будет целым числом n (n - число ветвей направляющей кривой).

Амплитуда кривой F определится как $H = 2 \cdot E$, где E - расстояние от точки O , центра производящего круга A , до точки M . При этом, если $E < r$, то образуются укороченные циклоидальные кривые, если $E > r$, то удлиненные циклоидальные кривые [5, 6].

Кривая L является “спутницей обобщенной циклоиды” или сопутствующей обобщенной циклоиде, поскольку образована множеством точек N , полученных проецирова-

нием точек M кривой F (обобщенной циклоиды) на вертикальный диаметр подвижного (производящего) круга A .

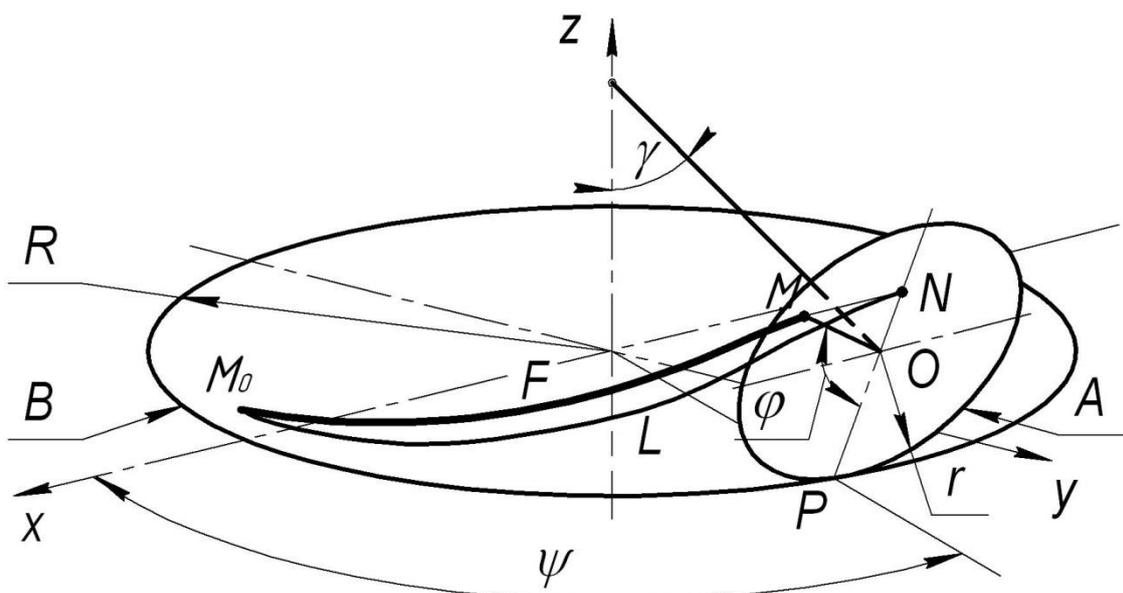


Рис.4. Геометрическое построение обобщенной циклоиды и обобщенной синусоиды

Из рисунка 4 видно, что пространственная линия L определяется следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} X = R \cdot \cos \frac{\varphi}{n} + r \cdot \cos \frac{\varphi}{n} \cdot \cos \gamma - E \cdot \cos \frac{\varphi}{n} \cdot \cos \varphi \cdot \cos \gamma, \\ Y = R \cdot \sin \frac{\varphi}{n} + r \cdot \sin \frac{\varphi}{n} \cdot \cos \gamma - E \cdot \cos \varphi \cdot \sin \frac{\varphi}{n} \cdot \cos \gamma, \\ Z = r \cdot \sin \gamma - E \cdot \cos \varphi \cdot \sin \gamma, \end{cases} \quad (1)$$

где φ - центральный угол качения подвижного круга A , заключенный между радиусом, проходящим через точку касания кругов A и B , и радиусом, проходящим через образующую точку M .

Особенностью пространственной линии L является то, что она будет лежать на поверхности конуса с углом при вершине равным $180^\circ - 2 \cdot \gamma$.

Частные случаи пространственной линии L .

1. Если $\gamma=90^\circ$, то система уравнений, определяющая линию, сопутствующую торцевой циклоиде, будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} X = R \cdot \cos \frac{\varphi}{n} \\ Y = R \cdot \sin \frac{\varphi}{n} \\ Z = r - E \cdot \cos \varphi \end{cases} \quad (2)$$

Анализ формулы (2) показывает, что линия L , сопутствующая торцевой циклоиде, принадлежит цилиндру с радиусом R .

Предельный случай при $\gamma=90^\circ$

При бесконечном радиусе R направляющей окружности круга B пространственная линия L , сопутствующая торцевой циклоиде, обращается в общую синусоиду [3], поскольку цилиндрическая поверхность преобразуется в плоскость:

$$Z = r - E \cdot \cos \varphi,$$

или

$$Z = r - E \cdot \sin(90 - \varphi),$$

или

$$Z = r + E \cdot \sin(\varphi - 90), \quad (3)$$

где r определяет начальную точку общей синусоиды, E является её амплитудой, а 90° - "начальной фазой" [3].

2. Если $\gamma=0^\circ$, то зависимости, определяющие сопутствующую кривую к плоской эпициклоиде, будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} X = R \cdot \cos \frac{\varphi}{n} + r \cdot \cos \frac{\varphi}{n} - E \cdot \cos \frac{\varphi}{n} \cdot \cos \varphi \\ Y = R \cdot \sin \frac{\varphi}{n} + r \cdot \sin \frac{\varphi}{n} - E \cdot \cos \varphi \cdot \sin \frac{\varphi}{n} \end{cases} \quad (4)$$

В цилиндрических координатах система уравнений (4) будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \rho = R + r - E \cdot \cos \varphi \\ \psi = \frac{\varphi}{n} \end{cases} \quad (5)$$

На рисунке 5 показана кривая, сопутствующая эпициклоиде.

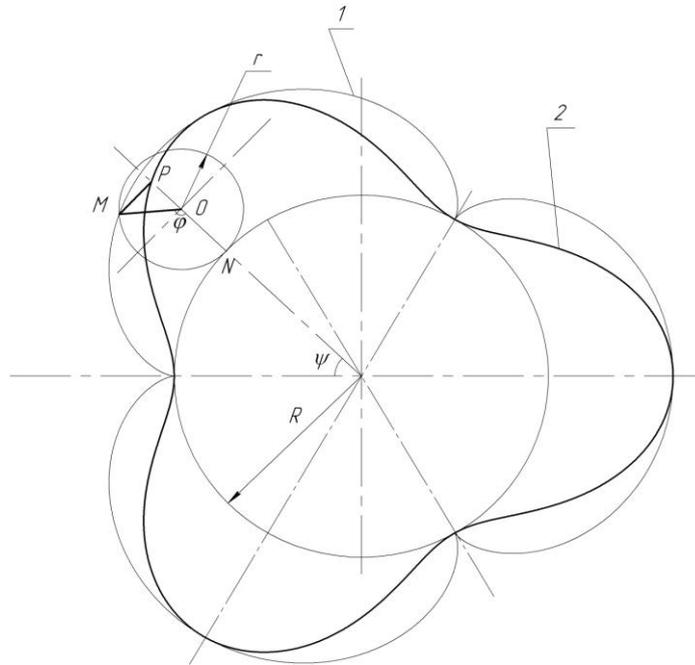


Рис.5. Построение линии, сопутствующей эпициклоиде

1. Эпициклоида 2. Синусоидальная кривая (сопутствующая)

Предельный случай при $\gamma = 0^\circ$

Если радиус R направляющей окружности круга B считать бесконечным, то направляющая окружность преобразуется в прямую линию. Учитывая, что при этом $\cos \frac{\varphi}{n} = \cos \frac{\varphi \cdot r}{R} \rightarrow 1$, $\sin \frac{\varphi}{n} = \sin \frac{\varphi \cdot r}{R} \rightarrow 0$, то линия, сопутствующая эпициклоиде, обращается в общую синусоиду (формула (4) преобразуется в формулу (3).

3. Если $\gamma=180^\circ$, то зависимости, определяющие сопутствующую к плоской гипоциклоиде, будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} X = R \cdot \cos \frac{\varphi}{n} - r \cdot \cos \frac{\varphi}{n} + E \cdot \cos \frac{\varphi}{n} \cdot \cos \varphi \\ Y = R \cdot \sin \frac{\varphi}{n} - r \cdot \sin \frac{\varphi}{n} + E \cdot \cos \varphi \cdot \sin \frac{\varphi}{n} \end{cases} \quad (6)$$

Предельный случай при $\gamma=180^\circ$.

При бесконечном радиусе R направляющей окружности круга B линия, сопутствующая гипоциклоиде также преобразуется в общую синусоиду, с той разницей, что перед значением r в формуле появляется знак «минус».

Заключение

Необходимо отметить, что формулы (3), (4), (5) были известны и раньше [3, 4], но связь между ними не прослеживалась. Также в литературе отсутствует вывод указанных уравнений. Например, в работе Синкевича В.Д. [4], синусоидальная кривая, описанная уравнением (5), выведена как параметрическое уравнение контура, полученное при рассмотрении кинематической схемы станка для образования синусоидального профиля при безударной механической обработке.

В машиностроении поверхности, построенные по синусоидальным кривым, могут применяться достаточно широко. Это и бесшпоночное соединение деталей, и синусошариковый редуктор, и синусоидальное зубчатое зацепление и многое другое.

Как результат применения выведенных выше формул на рисунке 6 показана разработанная автором форма синусоидального зубчатого зацепления для шестеренчатого насоса.

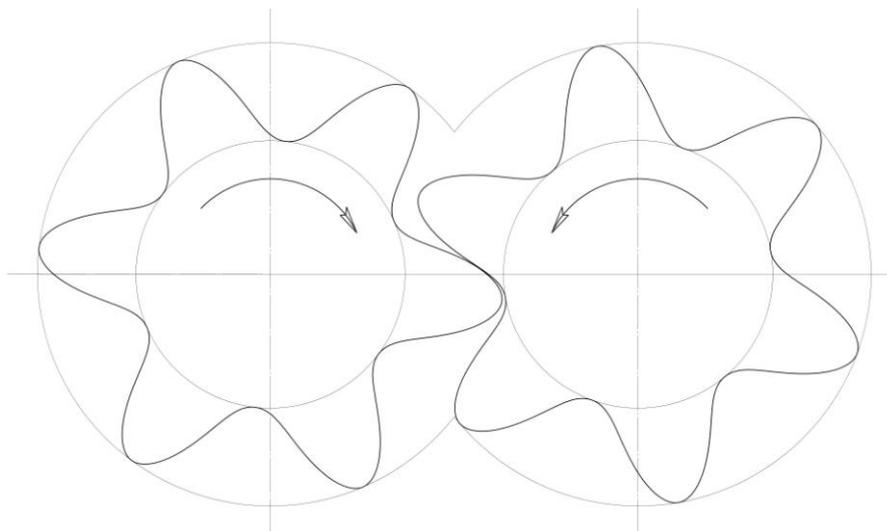


Рис. 6 Схема шестеренчатого насоса с синусоидальным зацеплением

Кроме вышеуказанных вариантов применения, разработана конструкция роторно-поршневого двигателя внутреннего сгорания, где рабочие поверхности статора и ротора выполнены в виде синусоидальных кривых [8].

Выводы

1. Можно утверждать, что кривая L, определяемая системой уравнений (1), является обобщенной синусоидальной кривой, изменяя параметры которой можно получить любую известную синусоидальную кривую, полученную методом производящего круга.
2. Уравнение обобщенной синусоидальной кривой позволяет разрабатывать коническое зубчатое зацепление, а также пространственные кулачковые механизмы с синусоидальной направляющей.
3. Результаты работы позволяют создавать малогабаритные объёмные машины (роторно-волновые).
4. Система уравнений (1) позволяет контролировать отклонение действительных размеров детали с синусоидальным профилем от их теоретических значений.

Список литературы

1. Берман Г.Н. Циклоиды. М.: Наука, 1980. 112 с.
2. Бирюков Б.Н. Роторно-поршневые гидравлические машины. М.: Машиностроение, 1972. 156 с.
3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: ОГИЗ, 1948. 556 с.
4. Синкевич В.Д. Принцип образования точением синусоидальных профилей для бесшпоночных соединений и их геометрия // Технология судостроения. 1974. №7. С.48-53.
5. Федоренко В.И. Теоретические предпосылки проектирования оборудования для изготовления деталей сложного профиля // М.: ЦРДЗ, 1992. С.53-58.
6. Федоренко И.Н., Федоренко В.И. Обобщенная циклоида как база формообразования сложной поверхности // Автомобильная промышленность. 1999. №8. С.33-36.
7. Федоренко В.И., Федоренко И.Н. Компрессоры и насосы на основе объёмных роторно-волновых машин // Автомобильная промышленность. 2005. №3. С.18-21.
8. Sarah Warren, Daniel C.H. Yang Design of rotary engines from the apex seal profile // Mechanism and Machine Theory. V. 64, June 2013. p 200-209.