электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51038.

УДК 514.18

Нелинейные инволюции как базовый способ геометрического моделирования сложных технических форм

***Пятанин П. С.**, студент*
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
факультет «Специальное машиностроение»

***Владимирова В. В.**, студентка*
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
факультет «Машиностроительные технологии».

Научный руководитель: Боровиков И.Ф., к.т.н., доцент
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана
bauman@bmstu.ru

При разработке систем автоматизированного конструирования сложных технических форм в основу геометрического моделирования можно положить бирациональные (кремоновы) преобразования [1, 2]. При таком подходе кривая или поверхность получается как изоморфный образ прямой или плоскости. Зная свойства преобразования и прообраз, можно уже на начальной стадии конструирования указать свойства получаемой формы. В работе [3] описаны нелинейные преобразования, которые в пучках прямых расслаиваются на параллельные переносы. В данном исследовании мы упростили аппарат нелинейных инволюций, взяв в качестве исходных преобразований центральные симметрии.

Зададим на плоскости пучок прямых с центром в начале координат и на каждой прямой – центр симметрии. Для задания центров симметрий можно взять прямую k, уравнение которой имеет вид:

$$Ax + By + 1 = 0\,.$$

Произвольной точке $A(x_A, y_A)$ в пучке (O) будет соответствовать единственная прямая s_i, которая пересекается с k в точке Q_i, являющейся для A центром симметрии. Координаты точки Q_i:

$$x_{Q_i} = -\frac{x_A}{Ax_A + By_A}, \quad y_{Q_i} = -\frac{y_A}{Ax_A + By_A}\quad .$$

Координаты точки A', симметричной точке A относительно центра Q_i, определяются выражениями:

$$x_A' = -\frac{Ax_A^2 + Bx_A y_A + 2x_A}{Ax_A + By_A}, \quad y_A' = -\frac{Ax_A y_A + By_A^2 + 2y_A}{Ax_A + By_A}.$$

Опуская индексы, получаем операторы преобразования:

$$x' = -\frac{Ax^2 + Bxy + 2x}{Ax + By}, \quad y' = -\frac{Axy + By^2 + 2y}{Ax + By}.$$

Из выражений для операторов преобразований следует, что на плоскости задано квадратичное преобразование, в котором образом любой прямой будет являться кривая второго порядка q. Можно показать, что q проходит через центр преобразования O. Причем точка O для кривой будет простой.

Если в качестве носителя центров симметрий задать окружность m с центром $S(x_S, y_S)$, проходящую через начало координат и описываемую уравнением:

$$x^2 - 2xx_S + y^2 - 2yy_S = 0,$$

то на плоскости индуцируется кубическое преобразование. Его операторы имеют вид:

$$x' = \frac{4x^2 x_S + 4xyy_S - x^3 - xy^2}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{4xyx_S + 4y^2 y_S - yx^2 - y^3}{x^2 + y^2}.$$

Анализ операторов преобразования показывает, что для того, чтобы конструируемая кривая не имела несобственных точек, необходимо, чтобы прообраз не проходил через начало координат.

Пусть носителем центров симметрий является парабола второго порядка, проходящая через начало координат и имеющая уравнение: $y = Ax^2 + Bx$. Операторы преобразования описываются выражениями:

$$x' = \frac{2(y - x) - Ax^2}{Ax}, \quad y' = \frac{2y(y - x) - Ax^3}{Ax^2}.$$

Таким образом, приходим к выводу, что для случая, когда бирациональное преобразование расслаивается в пучке прямых с собственным центром на центральные симметрии, порядок преобразования n с порядком k кривой, являющейся носителем центров симметрий, связаны соотношением $n = k + 1$.

Пусть носителями центров симметрий являются прямая и парабола, а центр пучка прямых удален в бесконечность (является несобственной точкой).

1. Носитель центров симметрий – прямая $Ax + By + 1 = 0$. Операторы преобразования имеют вид:

$$x' = x, \quad y' = -\frac{2Ax + By + 1}{B}.$$

2. Носитель центров симметрий – парабола $y = Ax^2 + Bx$. Операторы преобразования:

$$x' = x, \quad y' = 2Ax^2 + 2Bx - y.$$

Для случая пучка прямых с несобственным центром порядок нелинейной инволюции, расслаивающейся на центральные симметрии, $n = k$.

При задании бирациональных преобразований плоскость можно расслоить окружностями пучка. В работе [4] рассматривается случай, когда расслоение осуществляется окружностями эллиптического пучка, который задается двумя действительными базисными точками $F_1(0, a)$, $F_2(0, -a)$ (рис. 1). При этом произвольная точка $A(x_A, y_A)$ из пучка выделяла единственную окружность q. За образ точки A принималась диаметрально противоположная точка $A'(x'_A, y'_A)$. На плоскости O, таким образом, задавалась квадратичная инволюция с пучком слабоинвариантных окружностей. Операторы прямого преобразования имеют вид:

$$x' = \frac{y^2 - a^2}{x}, \quad y' = -y.$$

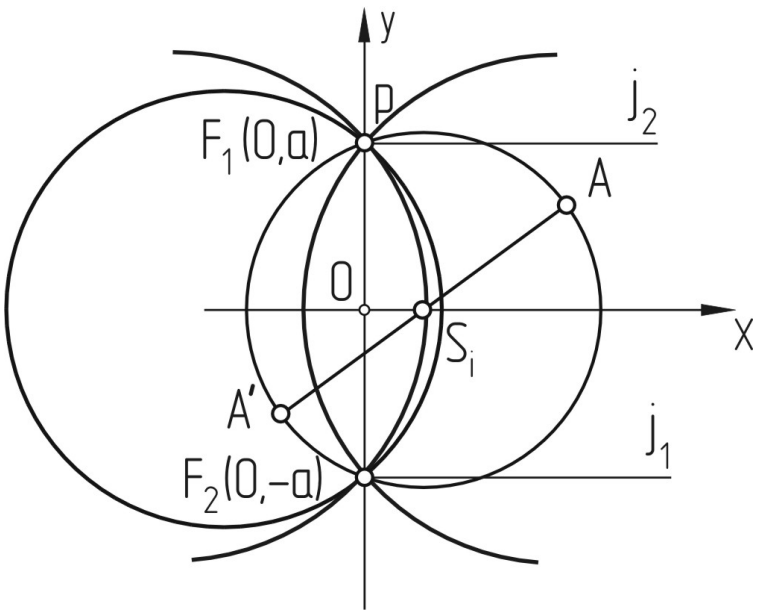

Рис. 1. Задание инволюции с помощью эллиптического пучка окружностей

В данной работе рассмотрены случаи расслоения окружностями параболического и гиперболического пучков. В случае параболического пучка окружностей (все окружности пучка касаются друг друга в действительной точке), операторы преобразования имеют вид:

$$x' = \frac{y^2}{x}, \quad y' = -y.$$

Если точка касания находится в начале координат O, то образы любых прямых в преобразовании (гомолоиды) будут касаться в точке O оси Oy, обе принципиальные прямые совпадают с осью Ox.

Гиперболический пучок окружностей задавался нулевой окружностью $N(m, 0)$ и радикальной осью Oy. Такой пучок имеет две мнимые базисные точки $U(0, mi), \quad V(0, -mi)$. Операторы преобразования для рассматриваемого случая выглядят следующим образом:

$$x' = \frac{y^2 + m^2}{x},$$
$$y' = -y.$$

В обоих случаях на плоскости задавались квадратичные преобразования. В процессе исследований был сделан вывод о целесообразности выбора в качестве кривых-прообразов окружностей. Проходя через циклические точки плоскости, окружности в качестве образов в рассматриваемых преобразованиях имеют рациональные циркулярные кривые. Так, например, образ окружности с уравнением $(x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 = R^2$ будет рациональная циркулярная кривая четвертого порядка:

$$y^4 + y^2x^2 - 2x_0xy^2 + 2y_0yx^2 + 2m^2y^2 + \left(y_0^2 - R^2 + x_0^2\right)x^2 + 2m^2x_0x - m^4 = 0.$$

На рис.2 приведены примеры технических кривых, которые получаются при использовании этого метода.

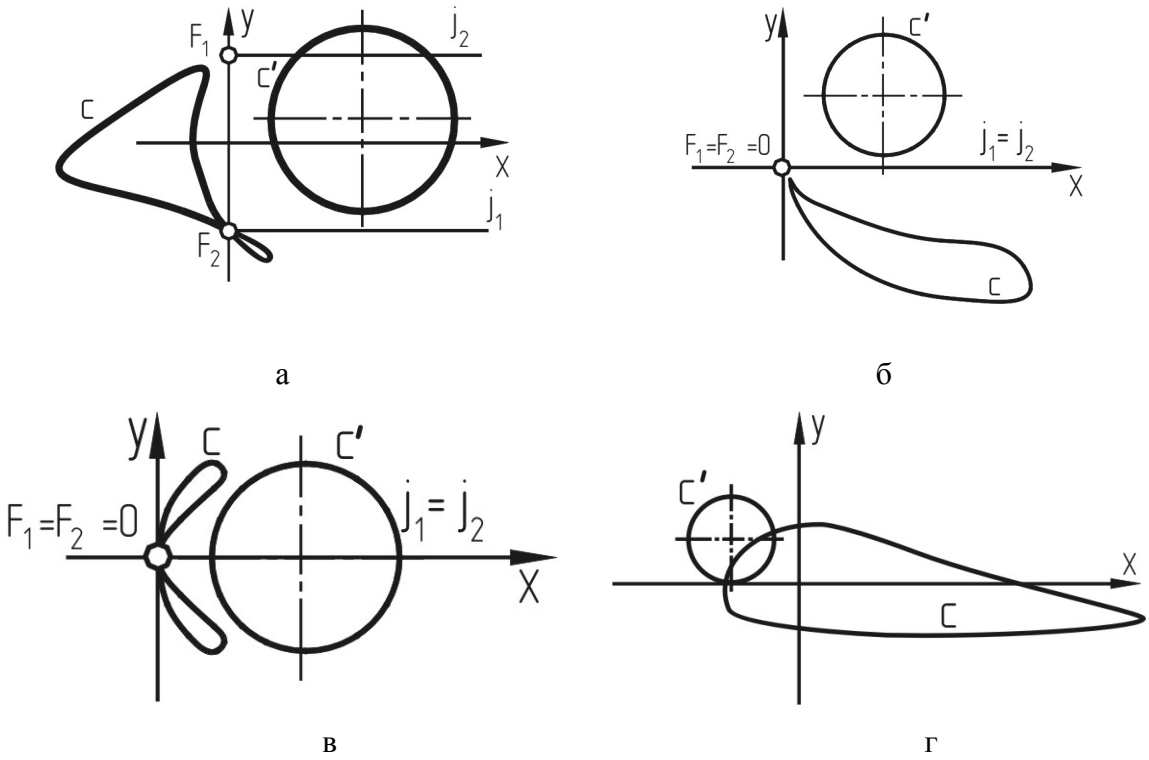

Рис. 2. Примеры кривых, получаемых в преобразованиях

Предлагаемый способ позволяет конструировать кривые в широком диапазоне изменения форм и параметров, в том числе рациональные циркулярные кривые как образы, изоморфные окружностям, которые наиболее полно отвечают требованиям аэро-гидродинамики. Использование компьютерной техники значительно упростит применение предлагаемого метода при конструировании сложных технических форм.

Список литературы

1. Иванов Г.С. Начертательная геометрия. М.: ФГБОУ ВПО МГУЛ, 2012. 340 с.
2. Иванов Г.С. Конструирование технических поверхностей (математическое моделирование на основе нелинейных преобразований). М.: Машиностроение, 1987. 192 с.
3. Ощепков С.С., Головин В.В. Нелинейные инволюции плоскости как базовый метод формообразования изделий машиностроительного производства // XV Международная научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Современные техника и технологии»: материалы. Томск: издательство Томского политехнического университета. В 3 Т. Т. 1. 2009. С. 325-326.
4. Игнатьев В.П. Нецентральные нелинейные преобразования плоскости, индуцируемые пучками окружностей, и их использование в получении технических кривых // IV

Международная научно-практическая конференция «Наука и технология: шаг в будущее»: материалы. Прага: Publishing House «Education and Science». 2013. С. 23-24.