электронный научно-технический журнал
ИНЖЕНЕРНЫЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51036. ISSN 2307-0595

Простейшая математическая модель пространственного стержня, выполненного из сплава с эффектом памяти формы

10, октябрь 2014

Ганыш С. М., Гаврюшин С. С.

УДК: 539.5

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
s.ganysh-rk5@yandex.ru

Введение

Сплавы с эффектом памяти формы широко применяются в различных областях науки и техники, таких как авиастроение, медицина, космическая отрасль и т.д. Широкое применение получили винтовые цилиндрические и пружины, стенты и медицинская проволока для коррекции зубов, соединительные муфты и другие конструкции. Не смотря на активное применение сплавов, расчеты конструкций с их применением производятся преимущественно эмпирическим путем [2]. Это связано со сложностью построения модели материала, а также внедрения построенной модели в классические соотношения строительной механики и сопротивления материалов. Расчеты большинства применяемых в современных конструкциях элементов из сплавов с эффектом памяти формы, так или иначе, могут быть сведены к расчету стержневых моделей [1-3]. Соответственно задача о математическом моделировании стержней из сплава с эффектом памяти формы является актуальной.

В рамках данной статьи изложена простейшая математическая модель стержней из сплава с эффектом памяти формы. Рассмотрена одна из существующих моделей материала: модель на основе диаграммы фазовых переходов. Модель адаптирована для стержневых конструкций, а также разработана методика учета эффекта памяти формы в системе дифференциальных уравнений, описывающих поведение упругой оси стержня.

На основе предложенной методики была составлена программа, позволяющая проводить расчеты пространственных стержней. Результаты расчетов для скрученных стержней, а также для стержней под совместным воздействием растягивающей нагрузки и изгибающего момента представлены в статье.

1. Математическая модель материала

Математическая модель сплава с эффектом памяти формы строится на основе уравнений, описывающих диаграмму фазового перехода, представленной на рисунке 1. Подробно уравнения рассматриваются в работах [1,4].

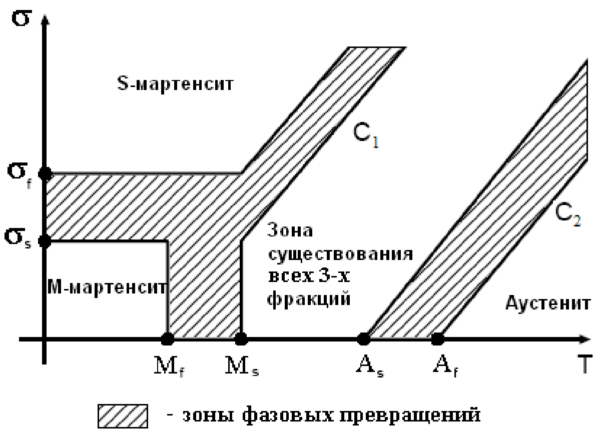

Рис. 1. Диаграмма фазовых переходов для сплава с эффектом памяти формы

Система уравнений в операторной форме имеет вид:

$$\left\{\dot{\xi}_S, \dot{\xi}_M\right\}^T = F\left(\xi_S, \xi_M, \sigma, \dot{\sigma}, \tau, \dot{\tau}, T, \dot{T}, H_i, D_{const}\right), \qquad (1)$$

где σ – касательные напряжения; τ – касательные напряжения; T – температура; ξ_S – объемная доля ориентированного мартенсита; ξ_M – объемная доля неориентированного мартенсита; H^i – функции-переключатели, отвечающие за активацию процессов фазовых переходов; D_{const} – постоянные параметры диаграммы фазовых переходов сплава с эффектом памяти формы.

С помощью соотношений (1) определяется величина объемной доли ориентированного мартенсита ξ_S. В предположении об аддитивном разложении деформации на упругую и не упругую, физические соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{полн} &= \varepsilon_{упр} + \varepsilon_L \cdot \xi_S \\ \gamma_{полн} &= \gamma_{упр} + \gamma_L \cdot \xi_S \end{aligned} \qquad (2)$$

Где ε_L, γ_L – соответственно максимальные линейная и угловая деформации, возникающие в результате ориентации мартенсита в соответствующем направлении.

Важно отметить, что из двух физических соотношений в выражении (2), на конкретном этапе нагружения реализуется лишь одно соотношение. При этом добавляется условие переориентации мартенсита, которое определяет, какое из физических соотношений справедливо. Условие переориентации имеет вид:

$$\begin{cases} \text{если } \sigma_{\max} > k_r \cdot \sqrt{3} \cdot \tau_{\max} \text{ соотношения меняются на } \begin{cases} \gamma_{полн} = \gamma_{упр} \\ \varepsilon_{полн} = \varepsilon_{упр} + \varepsilon_L \cdot \xi_S \end{cases} \\ \text{если } \sqrt{3} \cdot \tau_{\max} > k_r \cdot \sigma_{\max} \text{ соотношения меняются на } \begin{cases} \gamma_{полн} = \gamma_{упр} + \gamma_L \cdot \xi_S \\ \varepsilon_{полн} = \varepsilon_{упр} \end{cases} \end{cases} \qquad (3)$$

Коэффициент k_r – показывает, на сколько напряжения по одному направлению должны превысить напряжения по другому направлению, чтобы началась переориентация ориентированного мартенсита.

2. Математическая модель пространственного стержня

Математическая модель стержня представляет собой систему дифференциальных соотношений, описывающих нелинейную деформацию гибкого растяжимого пространственного стержня [5]. Геометрические соотношения имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{ds^0} = (1+\varepsilon)\cdot\cos(\upsilon_2)\cdot\cos(\upsilon_3) \\ \dfrac{dx_2}{ds^0} = (1+\varepsilon)\cdot\sin(\upsilon_3) \\ \dfrac{dx_3}{ds^0} = -(1+\varepsilon)\cdot\sin(\upsilon_2)\cdot\cos(\upsilon_3) \\ \dfrac{d\upsilon_1}{ds^0} = (1+\varepsilon)\cdot(\kappa_1 - \cos(\upsilon_1)\cdot tg(\upsilon_3)\cdot\kappa_2 + \sin(\upsilon_1)\cdot tg(\upsilon_3)\cdot\kappa_3) \\ \dfrac{d\upsilon_2}{ds^0} = (1+\varepsilon)\cdot(\dfrac{\cos(\upsilon_1)}{\cos(\upsilon_3)}\cdot\kappa_2 - \dfrac{\sin(\upsilon_1)}{\cos(\upsilon_3)}\cdot\kappa_3) \\ \dfrac{d\upsilon_3}{ds^0} = (1+\varepsilon)\cdot(\sin(\upsilon_1)\cdot\kappa_2 + \cos(\upsilon_1)\cdot\kappa_3) \end{cases}, \qquad (4)$$

где x_1, x_2, x_3 – глобальные координаты центра тяжести сечения; $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3$ – углы поворота, связывающие между собой локальную и глобальную системы координат стержня; ε – деформация оси стержня; $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ – кривизны стержня.

Геометрические соотношения дополняются уравнениями равновесия, записанными в глобальной системе координат. Соотношения имеют вид:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dQ_1}{ds^0} = -(1+\varepsilon)\cdot q_1 \\
\dfrac{dQ_2}{ds^0} = -(1+\varepsilon)\cdot q_2 \\
\dfrac{dQ_3}{ds^0} = -(1+\varepsilon)\cdot q_3 \\
\dfrac{dM_1}{ds^0} = -(1+\varepsilon)\cdot(l_{21}\cdot Q_3 - l_{31}\cdot Q_2 + m_1) \\
\dfrac{dM_2}{ds^0} = -(1+\varepsilon)\cdot(l_{31}\cdot Q_1 - l_{11}\cdot Q_3 + m_2) \\
\dfrac{dM_3}{ds^0} = -(1+\varepsilon)\cdot(l_{11}\cdot Q_2 - l_{21}\cdot Q_1 + m_3)
\end{cases}, \qquad (5)
$$

где M_1, M_2, M_3 – моменты, записанные в глобальной системе координат; Q_1, Q_2, Q_3 – усилия, записанные в глобальной системе координат; $q_1, q_2, q_3, m_1, m_2, m_3$ – распределенные силы и моменты, действующие на стержень.

Коэффициенты l_{ij} - компоненты матрицы $[L]$ - матрицы, связывающей между собой глобальную и локальную системы координат пространственного стержня. Матрица $[L]$ имеет вид:

$$
[L] = \begin{bmatrix} C_2\cdot C_3 & C_1 C_2 S_3 + S_1 S_2 & S_1 C_2 S_3 - C_1 S_2 \\ -S_3 & C_1 C_3 & S_1 C_3 \\ S_2 C_3 & C_1 S_2 S_3 - S_1 C_2 & S_1 S_2 S_3 + C_1 C_2 \end{bmatrix}, \qquad (6)
$$

где $C_i = \cos(\upsilon_i), S_i = \sin(\upsilon_i)$ - тригонометрические функции ориентационных углов.

Дифференциальные уравнения дополняются алгебраическими уравнениями относительно деформации оси стержня и кривизн:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon = \alpha\cdot\Delta t + \frac{1}{B_0}\cdot(Q_1\cdot l_{11} + Q_2\cdot l_{21} + Q_3\cdot l_{31}) \\
&\kappa_1 = \frac{1}{B_1}\cdot\left(M_1\cdot l_{11} + M_2\cdot l_{21} + M_3\cdot l_{31}\right) + (1-\varepsilon)\cdot\kappa_1^0 \\
&\kappa_2 = \frac{1}{B_2}\cdot\left(M_2\cdot l_{12} + M_2\cdot l_{22} + M_3\cdot l_{32}\right) + (1-\varepsilon)\cdot\kappa_2^0 \\
&\kappa_3 = \frac{1}{B_3}\cdot\left(M_1\cdot l_{13} + M_2\cdot l_{23} + M_3\cdot l_{33}\right) + (1-\varepsilon)\cdot\kappa_3^0
\end{aligned}, \qquad (7)
$$

где κ_i^0 - величины кривизн в недеформированном состоянии; B_i - жесткости стержня; α - коэффициент линейного температурного расширения.

3. Учет эффекта памяти формы в дифференциальных уравнениях упругой линии пространственного стержня

Для учета эффекта памяти формы в системе соотношений для пространственного стержня вводятся дополнительные внутренние силовые факторы, являющиеся результантами эффекта памяти формы по сечению. Вывод соотношений для дополнительных внутренних силовых факторов проводился при следующих допущениях:

- сечение стержня круглое;
- справедливыми являются гипотеза плоских сечений и гипотеза о неискривляемости радиуса;
- справедливо разложение деформации на упругую и неупругую составляющие.

Крутящий момент, действующий в сечении стержня, определяется по следующей известной формуле:

$$M_{кр} = 2\pi \cdot \int_0^{\frac{d}{2}} \tau \cdot r^2 dr \tag{8}$$

Воспользовавшись выражениями (2),(8) и представленными выше допущениями, было получено следующее выражение для максимальной угловой деформации сечения:

$$\gamma_{Max} = \frac{16}{\pi \cdot G \cdot d^3} \left[M_{кр} + 2\pi \cdot G \cdot \gamma_L \cdot \int_0^{\frac{d}{2}} \xi_S(r) \cdot r^2 dr \right] \tag{9}$$

Сравнивая выражение (9) с выражением для максимального угла поворота стержня из линейно-упругого материала, получаем:

$$\gamma_{Max} = \frac{16}{\pi \cdot G \cdot d^3} \left(M_{кр} + M_{кр}^{SMA} \right) \tag{10}$$

$$M_{кр}^{SMA} = 2\pi \cdot G \cdot \gamma_L \cdot \int_0^{\frac{d}{2}} \xi_S(r) \cdot r^2 dr \tag{11}$$

Выражение (11) представляет собой дополнительный внутренний силовой фактор, учитывающий интегральное действие эффекта памяти формы при кручении.

Изгибающие моменты и нормальное усилие в сечении стержня определяются по следующим известным соотношениям:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_A \sigma \cdot y \cdot dA \\ M_y &= \int_A \sigma \cdot x \cdot dA \\ N &= \int_A \sigma \cdot dA \end{aligned} \tag{12}$$

Для круглого поперечного сечения от изгибающих моментов M_x и M_y можно перейти к суммарному изгибающему моменту $M_{изг}$.

$$M_{изг} = \sqrt{(M_x)^2 + (M_y)^2} \tag{13}$$

Воспользовавшись выражениями (2),(12),(13) и представленными выше допущениями, были получены следующие выражения для изменения кривизны стержня и линейной деформации оси стержня:

$$\Delta\kappa = -\frac{M_{изг} + E\varepsilon_L \cdot \int_A \xi_s(\tilde{y}) \cdot \tilde{y} \cdot dA}{EI_{изг}} \tag{14}$$

$$\varepsilon = \frac{N + E\varepsilon_L \cdot \int_A \xi_s(\tilde{y}) \cdot dA}{EA} \tag{15}$$

Сравнивая выражения (14),(15) с выражениями для изменения кривизны и линейной деформации для линейно-упругого материала получаем:

$$\Delta\kappa = -\frac{M_{изг} + M_{изг}^{SMA}}{EI_{изг}} \tag{16}$$

$$M_{изг}^{SMA} = E\varepsilon_L \cdot \int_A \xi_s(\tilde{y}) \cdot \tilde{y} \cdot dA \tag{17}$$

$$\varepsilon = \frac{N + N^{SMA}}{EA} \tag{18}$$

$$N^{SMA} = E\varepsilon_L \cdot \int_A \xi_s(\tilde{y}) \cdot dA \tag{19}$$

Выражение (17) представляет собой дополнительный внутренний силовой фактор, учитывающий интегральное действие эффекта памяти формы при изгибе, выражение (19) представляет собой дополнительный внутренний силовой фактор, учитывающий интегральное действие эффекта памяти формы при растяжении-сжатии.

Для учета эффекта памяти формы дополнительные внутренние силовые факторы добавляются в выражения (7), которые окончательно принимают вид:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon = \alpha \cdot \Delta t + \frac{1}{B_0} \cdot (Q_1 \cdot l_{11} + Q_2 \cdot l_{21} + Q_3 \cdot l_{31} + N^{SMA}) \\
&\kappa_1 = \frac{1}{B_1} \cdot \left(M_1 \cdot l_{11} + M_2 \cdot l_{21} + M_3 \cdot l_{31} + M_{кр}^{SMA}\right) + (1-\varepsilon) \cdot \kappa_1^0 \\
&\kappa_2 = \frac{1}{B_2} \cdot \left(M_1 \cdot l_{12} + M_2 \cdot l_{22} + M_3 \cdot l_{32} + M_{изг}^{SMA} \cdot \sin(\omega)\right) + (1-\varepsilon) \cdot \kappa_2^0 \\
&\kappa_3 = \frac{1}{B_3} \cdot \left(M_1 \cdot l_{13} + M_2 \cdot l_{23} + M_3 \cdot l_{33} + M_{изг}^{SMA} \cdot \cos(\omega)\right) + (1-\varepsilon) \cdot \kappa_3^0
\end{aligned} \tag{20}$$

Где величина угла ω определяется с помощью соотношения:

$$\omega = \arctan\left(\frac{M_x}{M_y}\right) = \arctan\left(\frac{M_1 \cdot l_{12} + M_2 \cdot l_{22} + M_3 \cdot l_{32}}{M_1 \cdot l_{13} + M_2 \cdot l_{23} + M_3 \cdot l_{33}}\right) \tag{21}$$

Таким образом, напряженно-деформированное состояние пространственного стержня, выполненного из сплава с эффектом памяти формы, описывается системой соотношений: (1),(4),(11),(17),(19-21).

Представленные выше соотношения были протестированы на задачах изгиба, растяжения-сжатия и кручения.

4. Задача №1: совместное действие осевого усилия и изгибающего момента для консольно-защемленной балки

Консольно-защемленная балка рассматривается при температуре $T < T_f^{AM}$.

Материал имеет разные границы фазовых переходов для растяжения и сжатия:

S_S^{AS+} = 10 МПа;

S_F^{AS+} = 20 МПа;

S_S^{AS-} = 15 МПа;

S_S^{AS-} = 30 МПа;

Геометрические размеры балки:

l_1 = 200 мм;

d = 10 мм;

Расчетная схема балки представлена на рисунке 2.

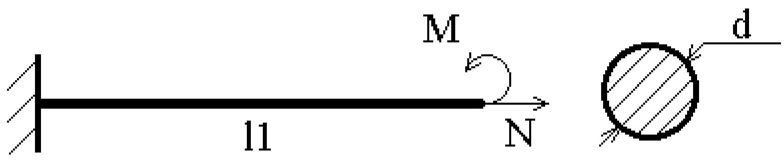

Рис. 2. Расчетная схема для задачи №1

Решается задача об изотермическом нагружении при температуре T . Так как в задаче отсутствует поперечная нагрузка, все сечения балки будут равноправными. Для разных соотношений между осевым усилием и изгибающим моментом рассматривается распределение фазовых долей ориентированного мартенсита по сечению, а также распределение нормальных напряжений по сечению. На рисунках 3-6 представлены результаты расчета.

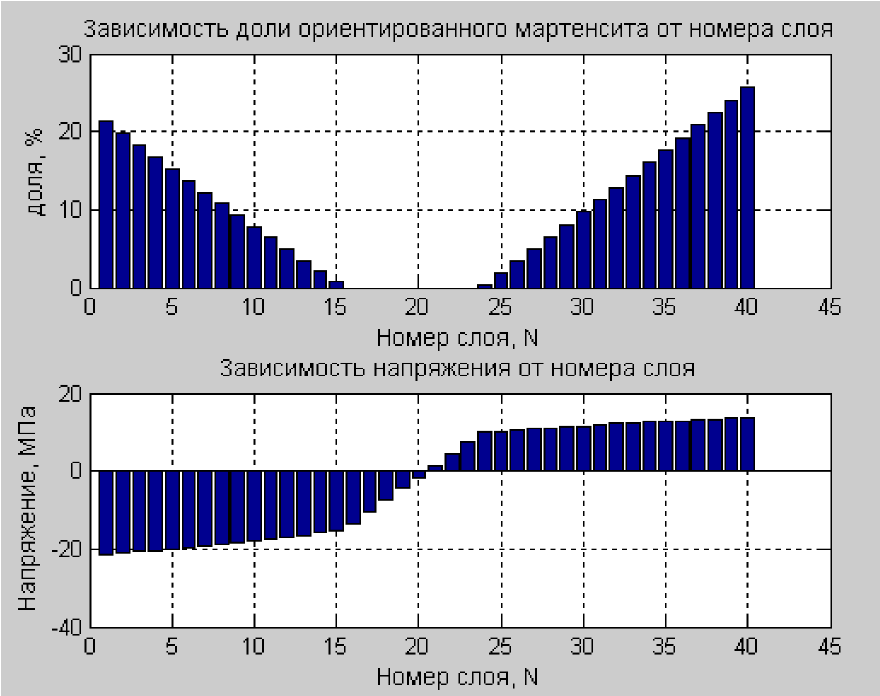

Рис. 3. Распределение напряжений и фазовых долей ориентированного мартенсита по сечению. М=2500 Н/мм, N = 0 Н.

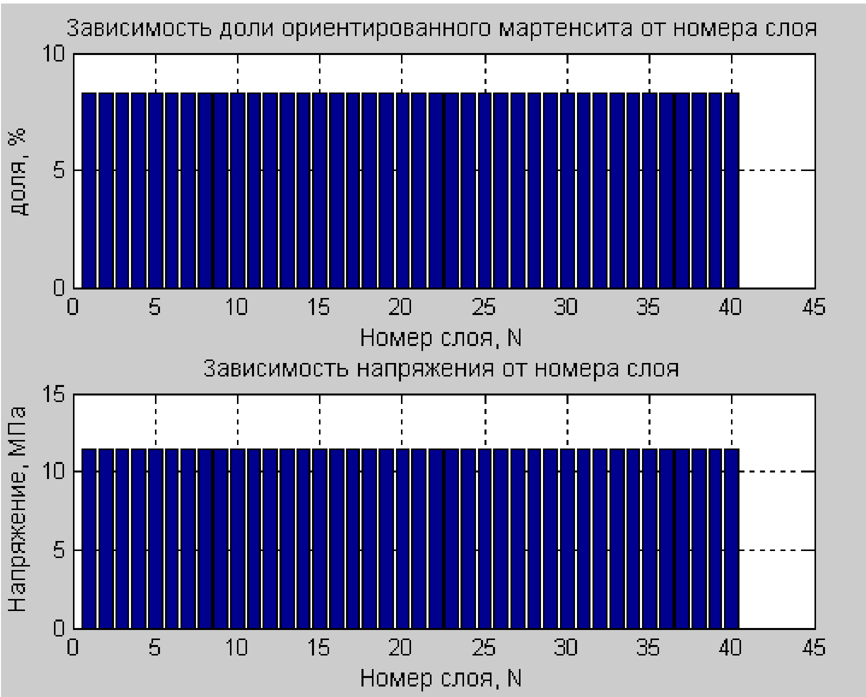

Рис. 4. Распределение напряжений и фазовых долей ориентированного мартенсита по сечению. М=0 Н/мм, N = 900 Н.

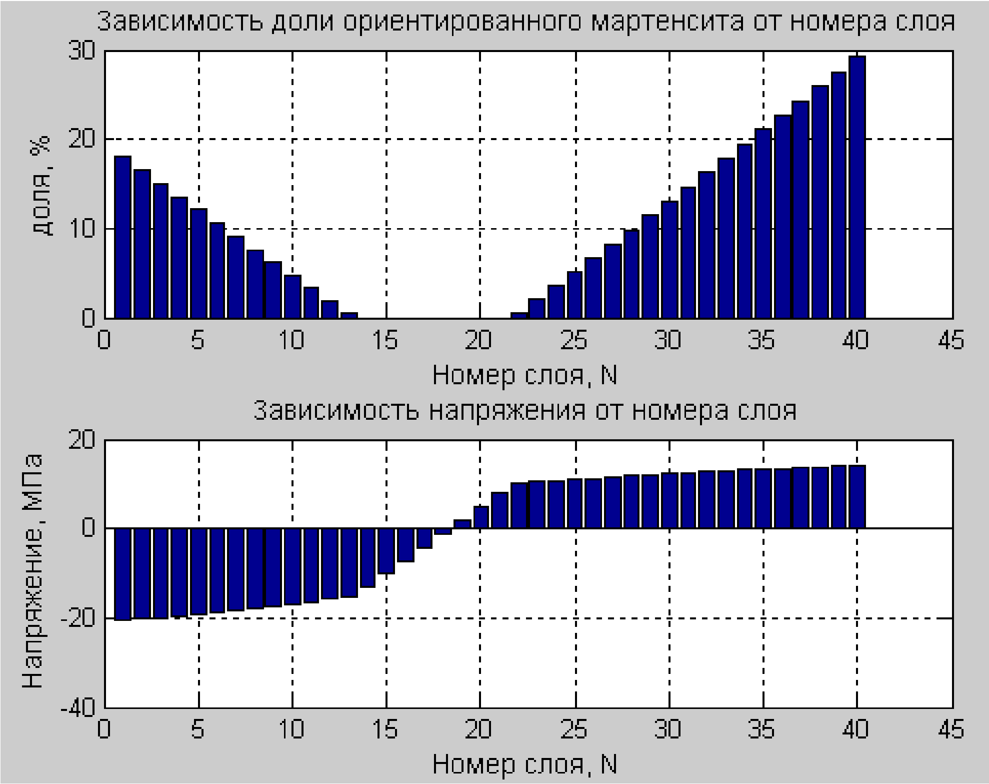

Рис. 5. Распределение напряжений и фазовых долей ориентированного мартенсита по сечению. M=2500 Н/мм, N = 500 Н.

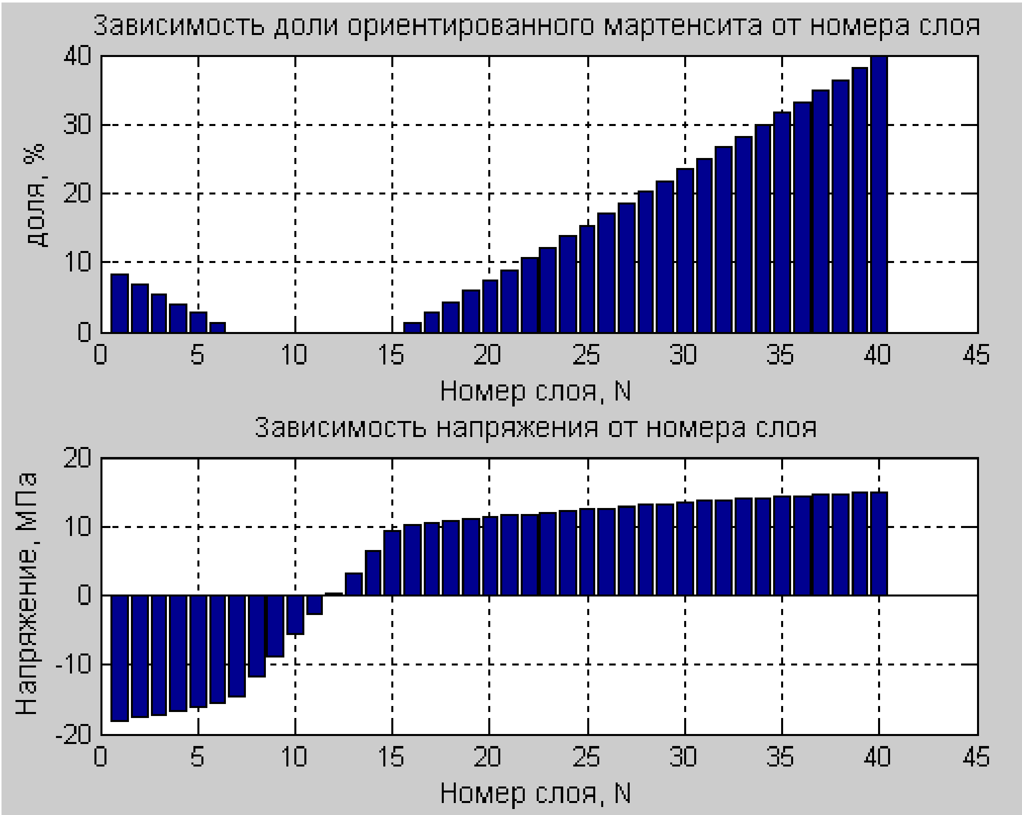

Рис. 6. Распределение напряжений и фазовых долей ориентированного мартенсита по сечению. M=2500 Н/мм, N = 900 Н.

5. Задача №2 Кручение консольно-защемленной балки сосредоточенным моментом

Консольно-защемленная балка рассматривается в изотермических условиях при температуре $T < T_f^{AM}$, а также в условиях нагрева при температуре $T > T_f^{SA}$. Материал имеет следующие параметры диаграммы фазовых переходов:

$T_f^{AM} = 20\ {}^0C$;

$T_S^{AM} = 40\ {}^0C$;

$T_S^{SA} = 60\ {}^0C$;

$T_f^{SA} = 80\ {}^0C$;

$S_S^{AS} = 10\ МПа$;

$S_F^{AS} = 20\ МПа$;

$G = 2000\ МПа$;

$\gamma_L = 0.02$;

Расчетная схема балки представлена на рисунке 7.

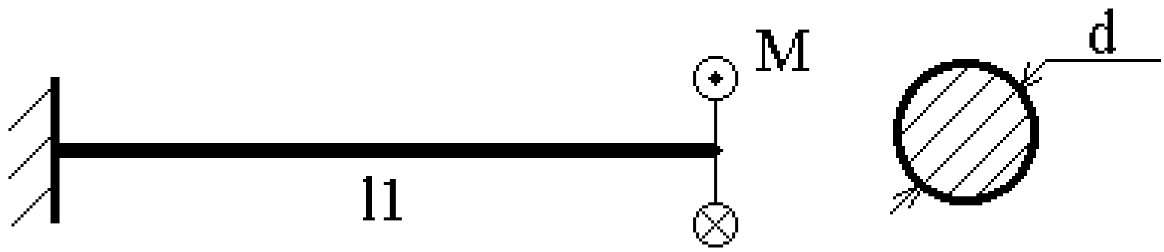

Рис. 7. Расчетная схема для задачи №2

На первом этапе нагружения, к балке прикладывается крутящий момент величиной $M = 2500\ Н/мм$, при этом балка нагружается при температуре $T < T_f^{AM}$. Были получены следующие результаты расчета, представленные на рисунках 8,9.

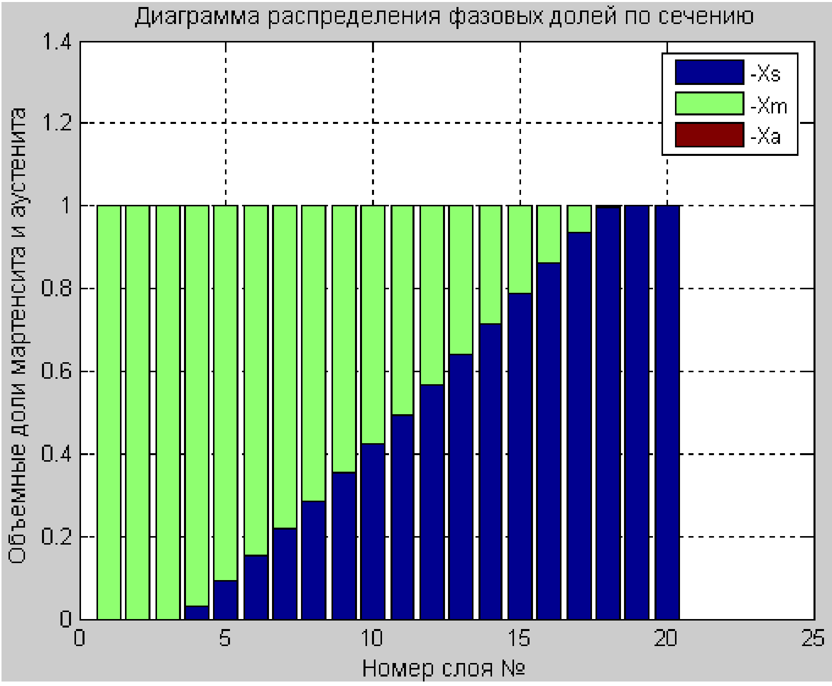

Рис. 8. Диаграмма распределения фазовых долей по сечению.

Рис. 9. Диаграмма распределения касательных напряжений по сечению.

На втором этапе нагружения, к балке остается приложенным крутящий момент, при этом балка нагревается. На данном этапе нагружения происходит переход ориентированного мартенсита в аустенит. Были получены следующие результаты расчета, представленные на рисунках 10-12.

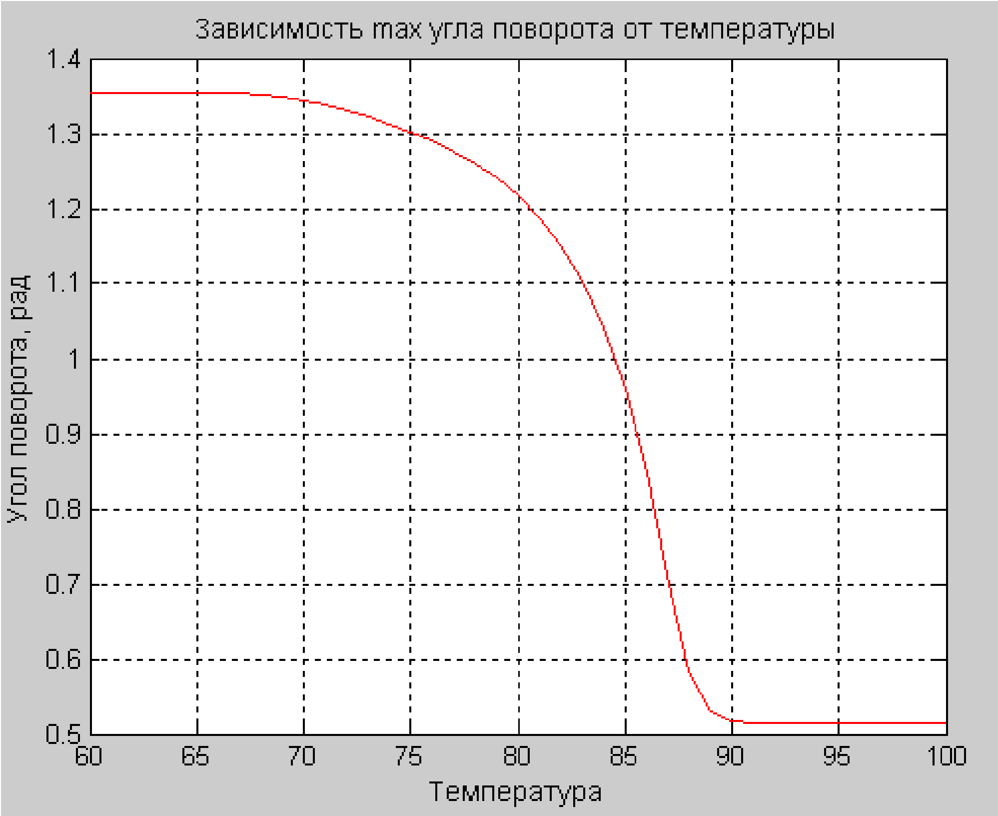

Рис. 10. Зависимость максимального угла поворота сечения от температуры.

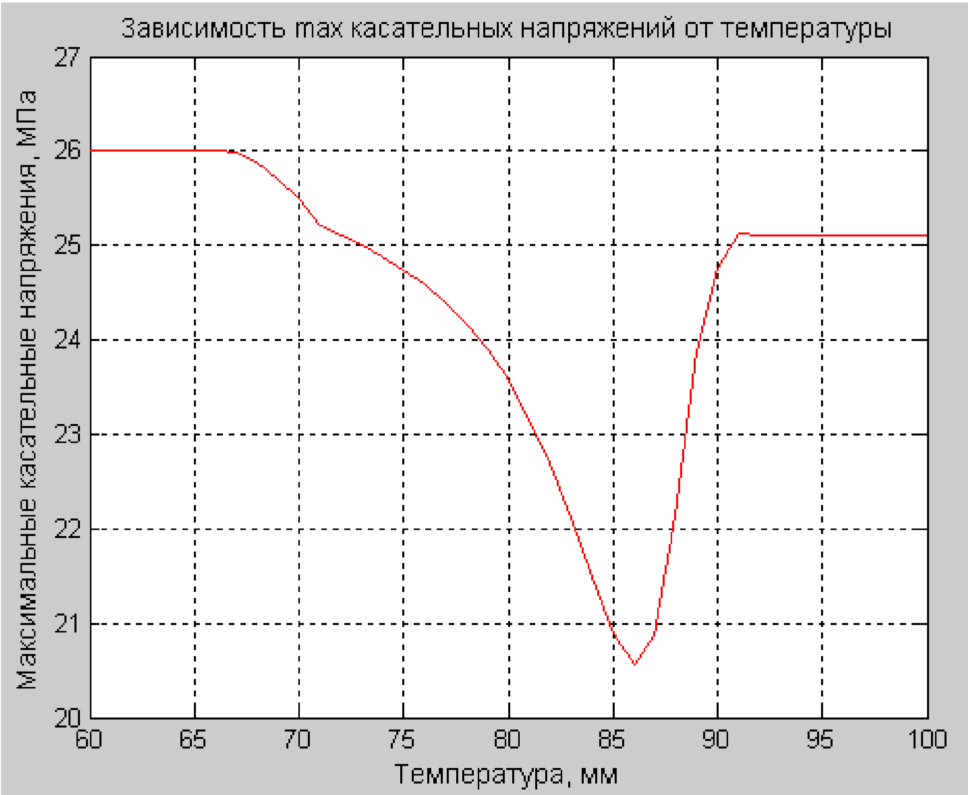

Рис. 11. Зависимость максимальных касательных напряжений от температуры.

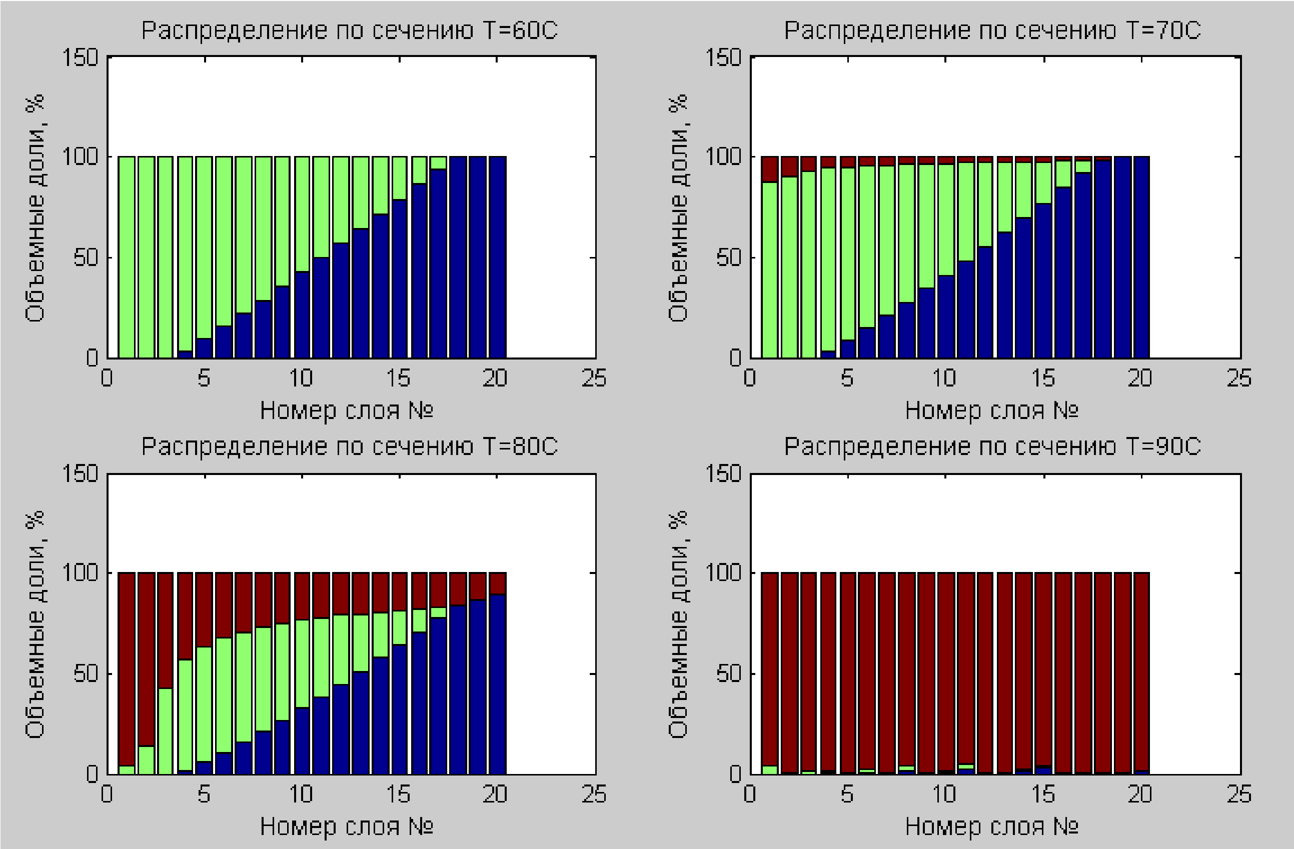

Рис. 12. Диаграммы распределения фазовых долей при различных значениях температуры.

Заключение

В статье рассмотрена математическая модель пространственного стержня из сплава с эффектом памяти формы. Предложены математическая модель материала, математическая модель пространственного стержня, а также способ интеграции модели материала в модель стержня.

Учет эффекта памяти формы с помощью дополнительных внутренних силовых факторов позволяет применять известные соотношения сопротивления материалов и строительной механики. Предложенный способ учета эффекта памяти формы не привязан к конкретной модели материала: если модель материала позволяет определить распределение фазовых долей ориентированного мартенсита по сечению, она может быть использована для определения дополнительных внутренних силовых факторов.

В рамках статьи были продемонстрированы две задачи: задача о совместном воздействии на стержень растягивающего усилия и изгибающего момента и задача о кручении стержня круглого поперечного сечения. Были получены распределения фазовых долей по сечению, а также эпюры напряжений. Полученные результаты согласуются с экспериментальными данными, представленными в литературе.

Представленная математическая модель и методика расчета могут быть рекомендованы для расчета упругих стержневых элементов из сплавов с эффектом памяти формы, таких как винтовые цилиндрические пружины растяжения-сжатия и плоские пружины.

Список литературы

1. F. Auricchio. Shape Memory Alloys: applications, micromechanics, macromodelling and numerical simulations. Berkeley, California, 1995, 163 c.
2. Шишкин С.В., Махутов Н.А. Расчет и проектирование силовых конструкций на сплавах с эффектом памяти формы. – М.- Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная динамика», 2007. – 412 с.
3. K. R. Melton. General applications of shape memory alloys and smart materials, in: K. Otsuka, C. M. Wayman (Eds.), Shape Memory Materials, Cambridge University Press, Cambridge, 1999, Ch.10, pp.220–239.
4. Гаврюшин С.С., Ганыш С.М. Численное моделирование процессов деформирования элемента в форме винтовой цилиндрической пружины, выполненного из материала с эффектом памяти формы. Известия вузов МАШИНОСТРОЕНИЕ, №8/2012, с. 15-20.
5. Гаврюшин С.С. Анализ и синтез тонкостенных элементов робототехнических устройств с предписанным законом деформирования. Известия вузов МАШИНОСТРОЕНИЕ, №12/2011, с. 12-19.